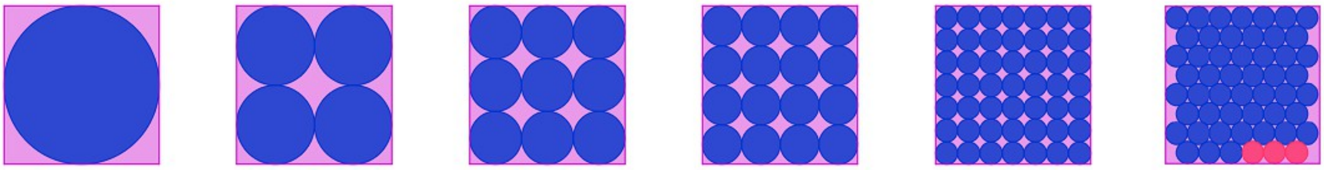
5ème — DM7 : Aires — *avril-mai 2022*

Travail pouvant être fait à deux (une copie porte un ou deux noms, pas trois)

1) Cercles dans carré

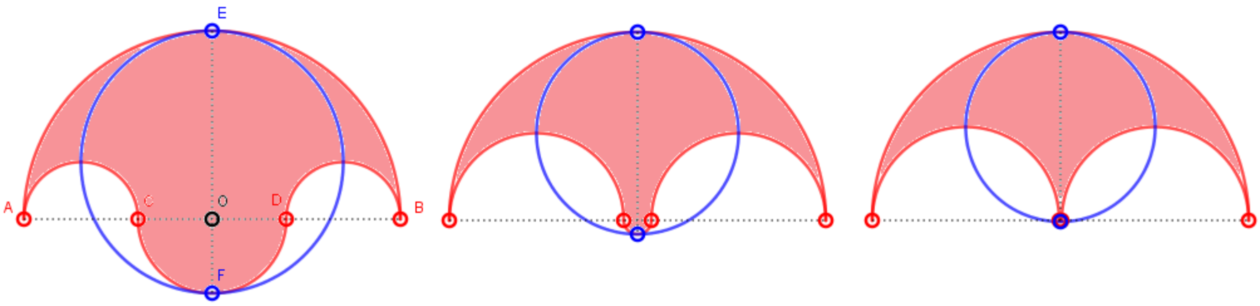
a) Lorsqu'on met un cercle dans un carré de façon à ce que les bords du cercle soient au contact avec les côtés du carré, on dit qu'on a « rempli » le carré avec le cercle. Calculer l'aire extérieure au cercle contenue dans un carré de côté 10 rempli par ce cercle (en rose sur l'image). Si l'on rempli le carré avec 4 cercles, quel est l'aire extérieure aux cercles contenues dans le carré rempli par les cercles ? Même question pour 9, 16, 25 et 49 cercles dans le carré (réponses dans un tableau avec, pour justification : le calcul littéral du rayon des cercles, de leur aire et de l'aire extérieure aux cercles).



b) Pour un carré contenant 49 cercles, on se demande s'il est possible d'en glisser trois de plus en rangeant les cercles en quinconce (dessin sur la figure de droite). Le carré serait-il alors bien rempli d'après vous ?

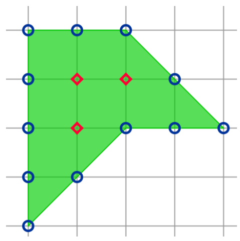
2) Salinons et arbelos

Un salinon est le nom donné par Archimède[1] à cette surface limitée par 4 demi-cercles (en rose ci-dessous) qui ressemble à une salière :

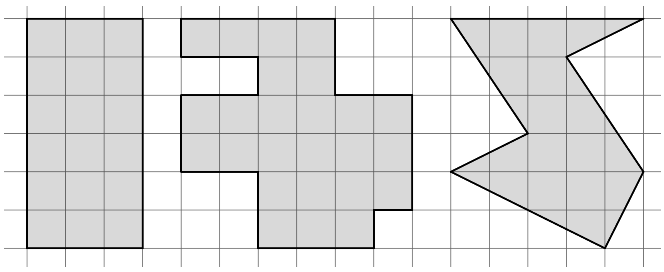


En supposant que AB=10 cm et OF=4 cm, déterminer l'aire S du salinon ainsi que l'aire C du cercle de diamètre [EF].
Comparer ces deux aires. Que semble t-il ? Vérifier cette propriété en prenant une autre valeur pour AB et OF.
Prouver la propriété dans le cas général, en prenant AB = $2R$ et OF = $r<R$.
Que se passe t-il dans le cas où $r=0$ (le salinon dans ce cas est un arbelos) ?

3) Théorème de Pick[2]



Un polygone *sur quadrillage* est un polygone dont les sommets appartiennent aux intersections d'un quadrillage régulier (des droites parallèles, régulièrement espacées, coupent des droites perpendiculaires, régulièrement espacées).
L'aire A de tous les polygones sur quadrillage est donnée par la relation : $2\times(A+1-I)=P$ où P est le nombre d'intersection du quadrillage le long du *P*érimètre et I le nombre d'intersection à l'*I*ntérieur du polygone.
Exemple : le pentagone de droite a une aire A=8, I=3 points du quadrillage à l'intérieur (carrés rouges) et P=12 points du quadrillage sur son périmètre (ronds bleus). Ces nombres vérifient la relation de Pick car $2\times(8+1-3)=2\times6=12$.



a) Montrer que les trois polygones sur quadrillage ci-contre vérifient bien la relation de Pick.

b) On veut tracer des triangles sur quadrillage contenant toujours $I=3$ points d'intersection du quadrillage et ayant des nombres P différents.
Trouver le maximum de valeurs possible pour P.
À chaque fois, tracer le triangle avec les points pour P et pour I de deux couleurs différentes ; déterminer les valeurs de A à l'aide de la relation de Pick.

c) On veut tracer des rectangles sur quadrillage de périmètre P=24 et ayant des aires A différentes.
Montrer qu'il ne peut y avoir que six formes différentes de rectangle (rapports longueur/largeur différents).
Donner les valeurs de A et de I dans ces six cas et illustrer chacune de ces valeurs par un exemple.

d) On veut tracer des pentagones sur quadrillage d'aire A=8 et ayant des nombres I différents.
Montrer que les caractéristiques P et I ne peuvent prendre que sept valeurs différentes.
Illustrer chacune de ces valeurs par un exemple de pentagone sur quadrillage d'aire A=8.

---

1 Archimède de Syracuse (−287 ;−212) est un grand scientifique grec, à la fois physicien, mathématicien et ingénieur.
2 Georg Alexander Pick (1859 ;1942) est un mathématicien autrichien. Son théorème date de 1899.