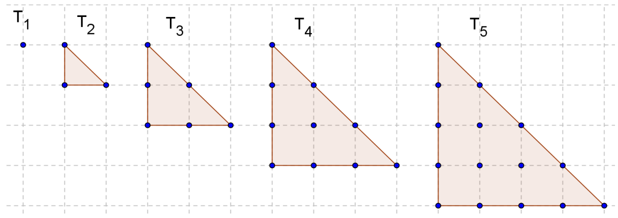
5ème Devoir n°6 : Calcul littéral

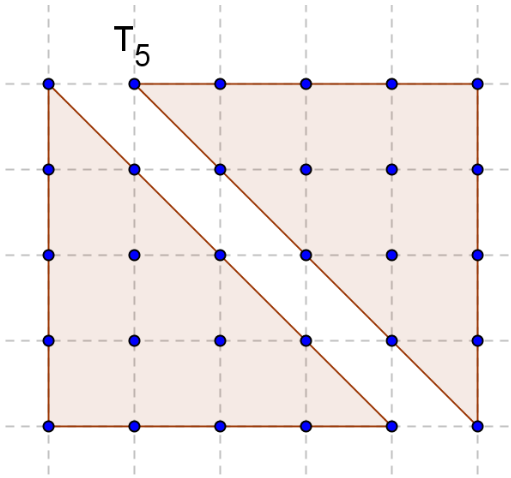
CORRECTION

1) Nombres triangulaires

Les nombres dits « triangulaires » sont les nombres de points que l'on peut disposer en forme de triangles comme on le voit sur la figure. Les premiers nombres triangulaires sont $T_1=1$, $T_2=3$, $T_3=6$, $T_4=10$, $T_5=15$. On note, d'une façon générale, T_n le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, qui contient n lignes.



a) Montrer à l'aide d'une figure qu'avec deux nombres triangulaires identiques on construit un rectangle. Déduisez-en la formule qui permet de calculer T_n à partir de n. Calculer alors T_{100} et T_{101} .



J'ai mis, têtes-bêches (l'une ayant subi un demi-tour par rapport à l'autre), deux nombres triangulaires T_5. Je m'aperçois alors qu'ils forment un rectangle de 6 points sur 5 points, soit $6\times5=30$ points.
De même, avec deux nombres triangulaires T_n, on s'apercevrait qu'ils forment un rectangle de $(n+1)$ points sur n points, soit $(n+1)\times n$ points.
Ainsi $T_5=6\times5\div2=30\div2=15$ et $T_n=(n+1)\times n\div2$.
On a donc $T_{100}=(101)\times100\div2=5050$ et $T_{101}=(102)\times101\div2=5151$ (101 de plus que T_{100}).
La division par 2 donne-t-elle toujours un nombre pair? Oui, car on multiplie toujours deux nombres successifs $n+1$ et n, il y en a toujours forcément un des deux qui est pair.

b) Montrer alors la propriété suivante, dite « théorème de Théon de Smyrne » : Si on ajoute deux nombres triangulaires consécutifs, on obtient un carré parfait. Montrer cela à partir d'exemples simples, puis de façon générale (avec la lettre n).
$T_2=3\times2\div2=3$ et $T_4=4\times3\div2=6$ et donc $T_2+T_3=3+6=9=3^2$
$T_3=4\times3\div2=6$ et $T_4=5\times4\div2=10$ et donc $T_3+T_4=6+10=16=4^2$
$T_4=5\times4\div2=10$ et $T_5=6\times5\div2=15$ et donc $T_4+T_5=10+15=25=5^2$
On constate en effet que, pour les 3 exemples envisagés, deux nombres triangulaires successifs donnent un carré. Voyons cela pour un entier n quelconque :
$T_n=(n+1)\times n\div2$ et $T_{n+1}=(n+2)\times(n+1)\div2$ et donc $T_n+T_{n+1}=(n+1)\times n\div2+(n+2)\times(n+1)\div2 = (n+n+2)\times(n+1)\div2$ on a mis en facteur $(n+1)\div2$. On peut maintenant réduire : $T_n+T_{n+1}=(2n+2)\times(n+1)\div2=(n+1)\times(n+1)=(n+1)^2$. On a mis en facteur le 2 de $(2n+2)$ qui s'est simplifié avec le 2 de $\div2$. On obtient bien un carré, celui de $n+1$.

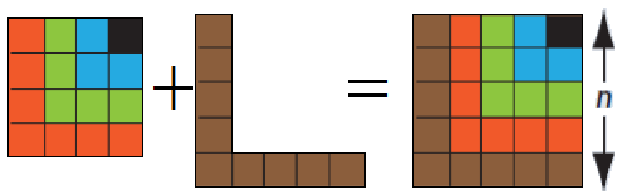
Quel carré obtient-on en additionnant T_{100} et T_{101} ? Quels nombres triangulaires faut-il prendre pour trouver 1936 ($1936 = 44^2$).
$T_n+T_{n+1}=(n+1)^2$ et donc $T_{100}+T_{101}=(101)^2=10\,201$. On aurait aussi pu additionner $5050+5151=10\,201$, pour trouver ce résultat (le carré de 101). Si on veut trouver le carré de 44, il faut additionner T_{43} et T_{44}. Cela vient directement de notre formule, mais on peut vérifier : $T_{43}=44\times43\div2=946$, $T_{44}=45\times44\div2=990$ et $946+990=1936=44^2$.

Voici un extrait du texte de Théon « Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon », où est mentionné ce théorème. Théon de Smyrne fut un maître d'école platonicien ayant vécu sous le règne de l'empereur Hadrien d'environ 70 à 135.

2) Nombres carrés

Les nombres dits « carrés » sont les nombres de points que l'on peut disposer en forme de carrés comme on le voit sur la figure. Les premiers nombres carrés sont $K_1=1$, $K_2=4$, $K_3=9$, $K_4=16$, $K_5=25$. On note, d'une façon générale, K_n le $n^{\text{ième}}$ nombre carré, qui contient n lignes de n points.

a) Donner la valeur de K_n en fonction du nombre n de points. Considérer la décomposition du carré de côté n en gnomons[1] colorés comme le montre l'image ci-contre :



1 Le *gnomon* d'un polygone est la figure qu'on doit ajouter au polygone pour reconstituer un polygone semblable mais plus grand

- combien de petits carrés G_n y a t-il dans les gnomons de longueur n ? (donner la valeur de G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 et de manière générale de G_n en fonction de n.
- Quelle relation y a t-il entre les valeurs de G_n et le nombre K_n ?

Les nombres carrés de côté n :

$K_1=1=1^2$

$K_2=4=2^2$

$K_3=9=3^2$

$K_4=16=4^2$

$K_5=25=5^2$

et d'une façon générale $K_n=n^2$ (le nombre carré de côté n est le carré du nombre n)

Les gnomons de longueur n :

$G_1=1=2\times1-1$

$G_2=3=2\times2-1$

$G_3=5=2\times3-1$

$G_4=7=2\times4-1$

$G_5=9=2\times5-1$

et d'une façon générale $G_n=2\times n-1$ (le gnomon de longueur n est le $n^{\text{ième}}$ nombre impair)

Relation entre les valeurs de G_n et le nombre K_n :

$K_1=1=G_1$

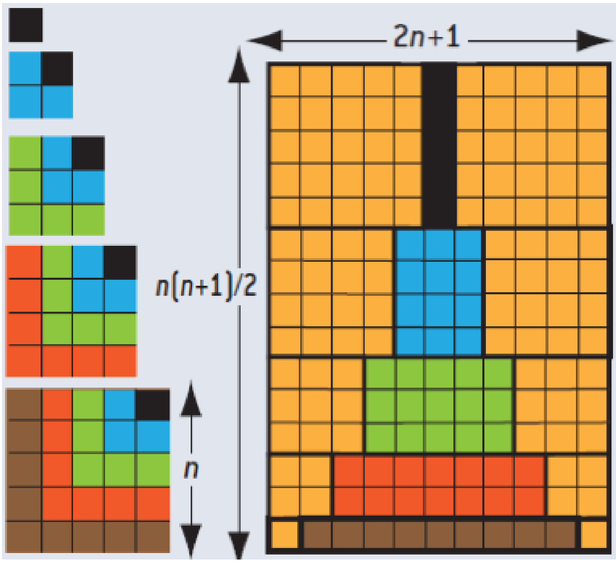
$K_2=4=1+3=G_1+G_2$

$K_3=9=1+3+5=G_1+G_2+G_3$

$K_4=16=1+3+5+7=G_1+G_2+G_3+G_4$

$K_5=25=1+3+5+7+9=G_1+G_2+G_3+G_4+G_5$

et d'une façon générale $K_n=n^2=1+3+5+...+(2\times n-1)=G_1+G_2+G_3+...+G_n$ (le nombre carré de côté n est la somme des gnomons de longueurs inférieures ou égales à n)



b) Expliquer pourquoi, dans la somme des n premiers nombres K_n ($1^2+2^2+3^2+...+n^2$), y a t-il un seul gnomon de longueur n, 2 gnomons de longueur $(n-1)$, …, n gnomons de longueur 1.

D'après ce qu'on vient de voir sur la décomposition de K_n en la somme $G_1+G_2+G_3+...+G_n$, dans la somme des n premiers nombres K_n :

- On trouve 1 G_n (gnomon de longueur n) : dans K_n
- On trouve 2 G_{n-1} (gnomons de longueur $n-1$) : dans K_{n-1} et aussi dans K_n
- On trouve 3 G_{n-2} (gnomons de longueur $n-2$) : dans K_{n-2}, K_{n-1} et aussi dans K_n
- etc.
- On trouve n G_1 (gnomons de longueur 1) : dans K_1, K_2, K_3, …, K_{n-2}, K_{n-1} et aussi dans K_n

Cette observation décrit très exactement la colonne de gauche de l'illustration principale dans laquelle on voit : 1 G_5 (en marron), 2 G_4 (en orange), 3 G_3 (en vert), 4 G_2 (en bleu), 5 G_1 (en noir).

c) La figure suivante donne une « preuve sans mot » de la propriété : la somme des n premiers carrés d'entier est égale au sixième du produit de n, de son suivant $(n+1)$ et du $n^{\text{ième}}$ nombre impair.

Autrement dit : $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

La question n'était pas posée ici, il s'agissait d'expliquer cette formule.

Une première remarque s'impose : $2n+1$ n'est pas le $n^{\text{ième}}$ nombre impair mais le $(n+1)^{\text{ième}}$ nombre impair.
En effet : 1, le 1^{er} nombre impair, s'écrit $2\times\mathbf{0}+1$; 3, le 2^{eme} nombre impair, s'écrit $2\times\mathbf{1}+1$...
le $n^{\text{ième}}$ nombre impair, s'écrit $2\times(\boldsymbol{n-1})+1$ et le $(n+1)^{\text{ième}}$ nombre impair, s'écrit $2\times\boldsymbol{n}+1$.

Deuxième remarque : Le rectangle dans lequel sont disposés les nombres carrés contient 3 fois chaque nombre carré. Deux fois en décroissant vers le bas et non colorés selon les découpages en gnomons ; une fois en croissant vers le bas, mais alors les nombres carrés sont découpés selon leurs gnomons :

- comme il y a n G_1, ceux-ci (en noir) sont disposés côte à côte avec les deux nombres carrés K_n
- comme il y a $n-1$ G_2, ceux-ci (en bleu) sont disposés côte à côte avec les deux nombres carrés K_{n-1}
- *etc.*
- comme il y a 1 G_n, celui-ci (en marron) est disposé à côté des deux nombres carrés K_1

Voilà ! L'astuce de cette disposition est que, en largeur, tous ces assemblages mesurent exactement le même nombre, indiqué en haut de l'image : $2n+1$. En haut de l'image, ce nombre se décompose en $n+1+n$; à l'étage d'en dessous, ce nombre se décompose en $(n-1)+1+(n-1)$; encore en dessous, ce nombre se décompose en $(n-2)+3+(n-2)$; etc. jusqu'en bas où ce nombre se décompose en $1+(2n-1)+1$. Comme les gnomons se suivent avec une différence de 2, cela compense les deux nombres carrés qui ont des côtés qui se suivent avec une différence de 1.

d) À partir de quelle valeur de n la somme des premiers carrés dépasse t-elle 10 ? 100 ? 1000 ? 10000 ? (*répondre en justifiant, avec un moyen accessible en 5ème*)

On peut employer un tableur. Il suffit d'insérer la formule de l'énoncé dans la feuille de calcul :

J'ai ajouté une ligne pour les carrés (elle est inutile ici puisqu'on a la formule, mais on pourrait s'en servir si on ne la connaissait pas).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n²	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
n(n+1)(2n+1)/6	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650	819	1015	1240	1496	1785	2109	2470	2870

La somme des premiers carrés dépasse 10 pour $n=3$ puisque $1^2+2^2+3^2=14>10$

La somme des premiers carrés dépasse 100 pour $n=7$ puisque $1^2+2^2+3^2+\ldots+7^2=140>100$

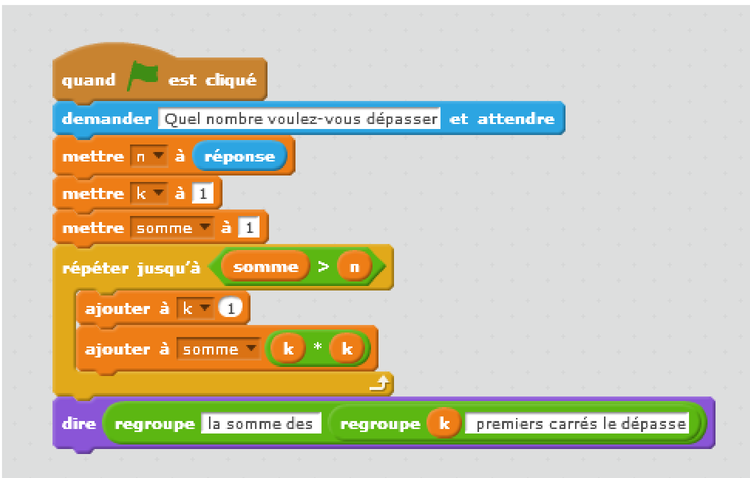
La somme des premiers carrés dépasse 1000 pour $n=14$ puisque $1^2+2^2+3^2\ldots+14^2=1015>1000$

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
441	484	529	576	625	676	729	784	841	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600
3311	3795	4324	4900	5525	6201	6930	7714	8555	9455	10416	11440	12529	13685	14910	16206	17575	19019	20540	22140

La somme des premiers carrés dépasse 10000 pour $n=31$ puisque $1^2+2^2+3^2\ldots+31^2=10416>10000$

Un autre moyen utilisable est la programmation en Scratch qu'on a déjà utilisée.

On peut demander de « dire » la valeur cherchée, la valeur de la variable k à partir de laquelle la somme des carrés $1^2+2^2+3^2\ldots+k^2$ dépasse la valeur n entrée :



Je vérifie que mon programme est correct en le relançant pour 10, 100, 1000 et 10000.

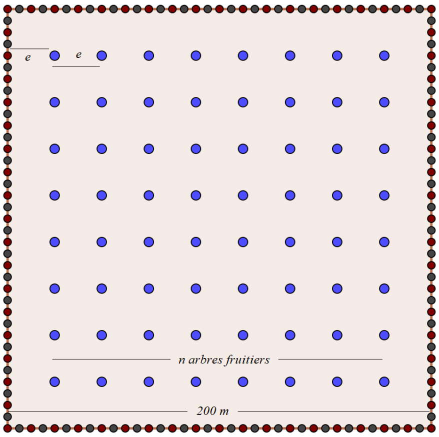
Je peux alors facilement obtenir les valeurs suivantes de la série :

- La somme des premiers carrés dépasse 100 000 pour $n=67$ puisque $1^2+2^2+3^2\ldots+67^2=102\,510>100\,000$
- La somme des premiers carrés dépasse 1 000 000 pour $n=144$ puisque $1^2+2^2+3^2\ldots+144^2=1\,005\,720>1\,000\,000$
- La somme des premiers carrés dépasse 10 000 000 pour $n=311$ puisque $1^2+2^2+3^2\ldots+311^2=10\,075\,156>10\,000\,000$
- La somme des premiers carrés dépasse 100 000 000 pour $n=669$ puisque $1^2+2^2+3^2\ldots+669^2=100\,029\,995>100\,000\,000$
- etc.

3) <u>Aménagement d'un jardin</u>

Le verger – un grand carré de 200 m de côté – va être réaménagé. Les jardiniers ont prévu d'appliquer le principe suivant : planter n lignes de n arbres fruitiers régulièrement espacés dans la partie centrale ; autour de la partie centrale, réaliser une haie d'arbustes résistants (ifs et lauriers) deux fois plus serrés que les fruitiers.

a) Pour une valeur de n donnée, combien y a-t-il de d'arbres fruitiers, combien d' arbustes résistants ? Quel est l'écartement entre les arbres ?



Sur la figure, on a représenté la situation pour n=8. Dans ce cas, on peut calculer les arbres fruitiers : il y en a 8×8=64 ; on peut aussi calculer le nombre d'arbustes résistants : il y en a 18×4=72.

D'une façon générale, il y a $n \times n = n^2$ arbres fruitiers et $4(4n+4)=16n+16$ arbustes résistants (j'ai enlevé sur chaque bord un arbuste et constaté qu'il y avait 4 fois plus de résistants que de fruitiers, mais qu'il fallait encore ajouter 4 arbustes pour l'alongement du bord ; cela mène à $4n+4$ par bord, et il y a 4 bords).

L'écartement entre les arbres fruitiers est $200 \div (n+1)$ car il y a 1 intervalle de plus que le nombre de fruitiers.

L'écartement entre les arbustes est le quart de l'écartement des fruitiers, soit $50 \div (n+1)$.

b) Représenter graphiquement le nombre d'arbres fruitiers et le nombre d'arbres résistants en fonction de n. Déterminer ensuite la valeur de n pour laquelle les nombres d'arbres fruitiers et d'arbres résistants sont les plus proches. Quel est alors l'écartement entre chaque arbre fruitier ?

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n²	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
16n+16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320	336
ecart	100,0	66,7	50,0	40,0	33,3	28,6	25,0	22,2	20,0	18,2	16,7	15,4	14,3	13,3	12,5	11,8	11,1	5,3	5,0	4,8

Les formules ayant été copiées sur un tableur, j'obtiens les différents nombres d'arbres selon les valeurs de n. Je constate alors que pour n=17 il y a presque autant d'arbres (289) que d'arbustes (288).

Après cette valeur de n, il y a davantage de fruitiers ; avant cette valeur, il y a davantage d'arbustes. Pour n=17, l'écartement entre les arbres fruitiers est égal à 11,1 m (car 200÷(17+1)=200÷18≈11,1). Il y a 2,8 m entre chaque arbuste résistant (le quart de 11,1).