

CORRECTION

I] Nombres premiers

L'algorithme (on dit ici crible) d'Eratosthène permet de dresser la liste des premiers nombres premiers :

1. Entourer le premier nombre non-barré (il est premier) puis barrer tous ses multiples.
2. Recommencer l'étape 1 avec le premier nombre non-barré (il est forcément premier aussi).

a) Appliquer cet algorithme dans le tableau ci-dessous qui va jusqu'à 225.

Les multiples de 2 sont barrés et mis sur fond jaune ;

le 1^{er} nombre non barré est 3.

Les multiples de 3 non déjà barrés (non multiples de 2) sont barrés et mis sur fond vert ;

le 1^{er} nombre non barré est 5.

Les multiples de 5 non déjà barrés (non multiples de 2 ou 3) sont barrés et mis sur fond bleu ;

le 1^{er} nombre non barré est 7.

Les multiples de 7 non déjà barrés (non multiples de 2, 3 ou 5) sont barrés et mis sur fond violet ;

le 1^{er} nombre non barré est 11.

Les multiples de 11 non déjà barrés (non multiples de 2, 3, 5 ou 7) sont barrés et mis sur fond rouge ; le 1^{er} nombre non barré est 13.

Les multiples de 13 non déjà barrés (non multiples de 2, 3, 5, 7 ou 11) sont barrés et mis sur fond noir ;

le 1^{er} nombre non barré est 17.

4	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225															

b) Expliquer pourquoi, lorsqu'on a fini de barrer tous les multiples de 13 dans ce tableau, on peut obtenir tous les nombres premiers inférieurs à 225 sans en barrer de nouveaux.

Les multiples de 17 non déjà barrés (non multiples de 2, 3, 5, 7, 11 ou 13) ne sont pas présents sur cette liste ; le 1^{er} est $17 \times 17 = 289$... Donc, lorsqu'on a fini de barrer les multiples de 13, il ne faut pas s'attendre à voir un nombre multiple non barré puisque le premier est 289 (et $289 > 225$).

c) Donner alors la liste L_1 des nombres premiers inférieurs à 225.

Les nombres non barrés de la liste sont tous premiers, il y en a 48 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223.

Remarque : il y en a 25 entre 0 et 100, seulement 21 entre 100 et 200. Si on continue la liste, il y en a de moins en moins sur une tranche de 100 nombres (16 entre 200 et 300 ; encore 16 entre 300 et 400 ; 17 entre 400 et 500 (la descente n'est pas régulière) ; 14 entre 500 et 600 ; etc.). De nombreux [sites](#) donnent ces informations.

d) De quels nombres premiers faudrait-il éliminer tous les multiples pour déterminer les nombres premiers inférieurs à 1000 ?

En éliminant tous les multiples de 17, on aura tous les nombres premiers jusqu'à $19 \times 19 = 361$.

En éliminant tous les multiples de 19, on aura tous les nombres premiers jusqu'à $23 \times 23 = 529$.

En éliminant tous les multiples de 23, on aura tous les nombres premiers jusqu'à $29 \times 29 = 841$.

En éliminant tous les multiples de 29, on aura tous les nombres premiers jusqu'à $31 \times 31 = 961$.

Il faut donc aussi éliminer 961 (le seul multiple de 31 inférieur à 1000 qui n'a pas été barré).

Voilà ces nombres premiers inférieurs à 1000 (il y en a 168, puis seulement 133 entre 1000 et 2000, ...) :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997

II] Calendrier

Il n'y a que 7 types d'année : celles qui commencent par un lundi, celles qui commencent par un mardi, etc.

Pour déterminer le type de l'année abcd (où a, b, c et d sont des chiffres), on va utiliser l'algorithme suivant :

- e est le quotient de la division euclidienne du nombre cd par 4
- f est le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $5 \times ab$
- g est le quotient de la division euclidienne du nombre ab par 4
- h est le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $cd + e + f + g + 2$

Le type de l'année est le nombre h.

Montrer que l'année 2021 était une année 0 et que l'année 2022 est une année 1.

Pour abcd=2021 (a=2, b=0, c=2, d=1) on trouve que h=0 :

- e est le quotient de la division euclidienne du nombre 21 par 4 : **5** (car $21 = 5 \times 4 + 1$)
- f est le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $5 \times 20 = 100$: **2** (car $100 = 14 \times 7 + 2$)
- g est le quotient de la division euclidienne du nombre 20 par 4 : **5** (car $20 = 5 \times 4 + 0$)
- h est le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $21 + 5 + 2 + 5 + 2 = 35$: **0** (car $35 = 5 \times 7 + 0$)

année abcd	cd	e=E(cd/4)	cd+e [7]	ab	f=5ab [7]	g=E(ab/4)	cd+e+f+g+2 [7]
2010	10	2	5	20	2	5	0
2011	11	2	6	20	2	5	1
2012	12	3	1	20	2	5	3
2013	13	3	2	20	2	5	4
2014	14	3	3	20	2	5	5
2015	15	3	4	20	2	5	6
2016	16	4	6	20	2	5	1
2017	17	4	0	20	2	5	2
2018	18	4	1	20	2	5	3
2019	19	4	2	20	2	5	4
2020	20	5	4	20	2	5	6
2021	21	5	5	20	2	5	0
2022	22	5	6	20	2	5	1
2023	23	5	0	20	2	5	2
2024	24	6	2	20	2	5	4
2025	25	6	3	20	2	5	5
2026	26	6	4	20	2	5	6
2027	27	6	5	20	2	5	0
2028	28	7	0	20	2	5	2
2029	29	7	1	20	2	5	3
2030	30	7	2	20	2	5	4
2031	31	7	3	20	2	5	5
2032	32	8	5	20	2	5	0
2033	33	8	6	20	2	5	1

Pour abcd=2022 (a=2, b=0, c=2, d=2) on trouve que h=1 :

- e est le quotient de la division euclidienne du nombre 22 par 4 : **5** (car $22 = 5 \times 4 + 2$)
- f est le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $5 \times 20 = 100$: **2** (car $100 = 14 \times 7 + 2$)
- g est le quotient de la division euclidienne du nombre 20 par 4 : **5** (car $20 = 5 \times 4 + 0$)
- h est le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $22 + 5 + 2 + 5 + 2 = 36$: **1** (car $36 = 5 \times 7 + 1$)

Déterminer la prochaine année 0, puis la prochaine année 1.

J'ai utilisé un tableur pour entrer ces formules pour les années 2010 à 2033 (voir résultat ci-dessus).

De cette façon, je trouve la prochaine année 0 : c'est 2027, ensuite il y aura 2032, avant il y avait 2010.

Je trouve également la prochaine année 1 : c'est 2033, ensuite il y aura 2039, avant il y avait 2016 et 2011.

Sans tableur, cela ne se devine pas vraiment : il faut essayer toutes les années successivement ce qui n'est pas simple.

NB : avec cet algorithme, on peut réaliser cet ingénieux calendrier perpétuel (voir photo) qui montre, par exemple, le calendrier du mois de juin 2022...



Sur la photo du calendrier perpétuel de l'énoncé, on ne distingue pas bien les années qui sont écrites dans le trou du haut. En dessous de « june » (juin) on lit 22 et à côté, on lit 5. En effet 2005 et aussi une année 1 comme 2022 ; pour trouver les deux années 1 qui se glissent entre 2005 et 2022, il faut tourner le disque du calendrier.

Ce qui est intéressant c'est que toutes les années 1 ont le même mois de juin et aussi les mêmes autres mois (sauf les années bissextiles, pour lesquelles il y a des types différents de mois de janvier et février).

J'ai réalisé, sur le modèle de ce calendrier perpétuel en laiton (5cm de diamètre) un calendrier perpétuel en bois plus grand (30 cm de diamètre) où j'ai inversé la place des années et celle des mois. Du coup, j'ai eu la place d'écrire une liste bien plus importante d'années (il va de 1900 à 2037). Sur la photo, j'ai mis le calendrier du mois de juin 2022.



III] PPCM et PGCD

a) Le grand-bi de Jules est constitué d'une roue circulaire de périmètre 450 cm (à l'avant) et d'une roue circulaire de périmètre 135 cm (à l'arrière).

On a peint un repère rouge sur chaque roue. En partant, les deux repères rouges sont en contact avec le sol. Quelle longueur doit parcourir Jules sur son grand-bi pour que les deux repères soient, pour la première fois, de nouveau en contact avec le sol ? (*raisonner sur les multiples*)

Le périmètre de la roue avant du grand-bi est 450 cm. Si elle fait 1 tour, le grand-bi avance de 4,5 m et si elle en fait n , il avance de $4,5n$ m.

Le périmètre de la roue arrière du grand-bi est 135 cm. Si elle fait 1 tour, le grand-bi avance de 1,35 m et si elle en fait p , il avance de $1,35p$ m.

Pour que les deux repères rouges soient en contact avec le sol une deuxième fois, il faut que le vélo aie avancé d'un multiple de 4,5 m, soit $4,5n$ m, qui soit en même temps un multiple de 1,35 m, soit $1,35p$ m.

On doit donc avoir $4,5n = 1,35p \Leftrightarrow \frac{p}{n} = \frac{4,5}{1,35} \Leftrightarrow \frac{p}{n} = \frac{450}{135} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5}{3 \times 3 \times 3 \times 5} = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3}$

J'en déduis que $p=10$ et $n=3$.

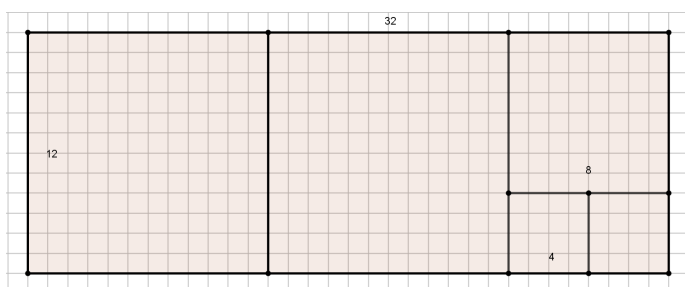
Vérification : si roue avant du grand-bi fait 3 tours, celui-ci avance de $4,5 \times 3 = 13,5$ m.

De même, si roue arrière du grand-bi fait 10 tours, celui-ci avance de $1,35 \times 10 = 13,5$ m.

Conclusion : si Jules parcourt une longueur de 13,5 m avec son grand-bi, les deux repères rouges de ses roues seront à nouveau en contact avec le sol. Et cela se reproduira tous les 13,5 m.



b) La figure ci-dessous montre comment Euclide envisageait graphiquement la recherche de la « commune mesure » (aujourd'hui on parle de PGCD) de deux entiers : pour déterminer la commune mesure de 32 et 12, il fait ce dessin et conclut qu'elle vaut 4.

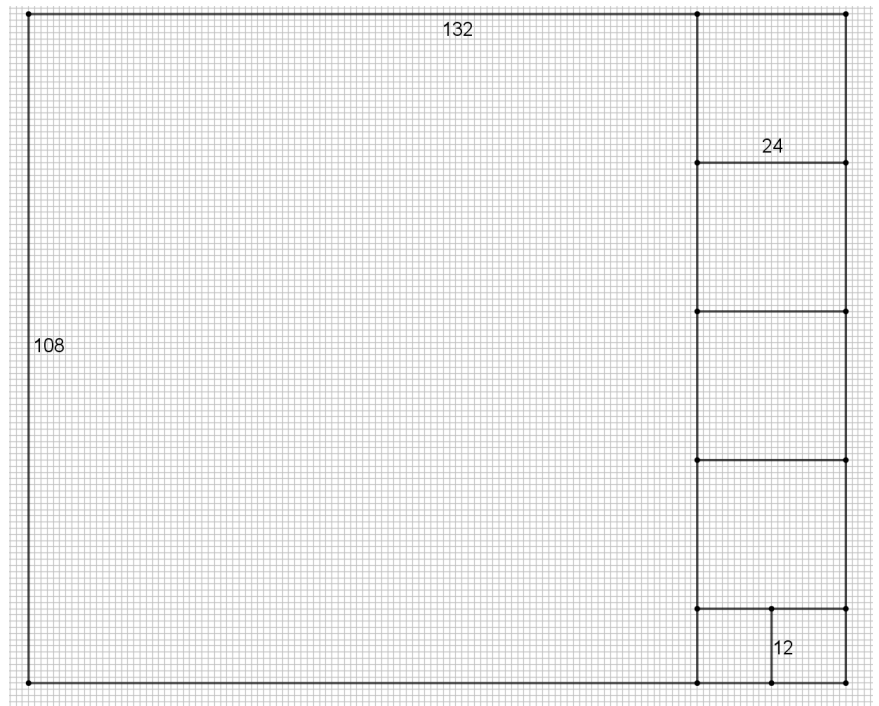


Suivant le même procédé graphique que Euclide, déterminer la commune mesure 132 et 108.

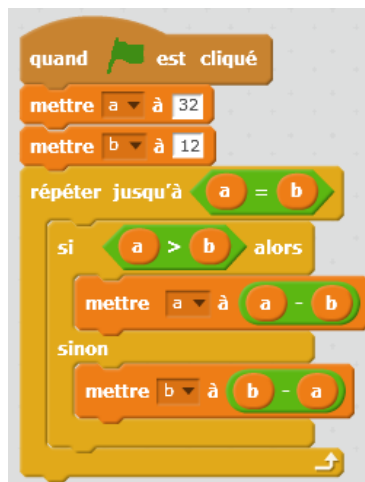
Pour savoir la mesure commune de 32 et 12, Euclide enlève des carrés de côté 12 dans le rectangle 12×32 ; puis, dans le rectangle 8×12 restant, il enlève des carrés de côté 8 ; puis, dans le rectangle 4×8 restant, il enlève des carrés de côté 4. Comme il ne reste plus de rectangle, il en déduit que 4 est la mesure commune de 12 et 32. Si on voulait carrelé ce rectangle avec des carreaux carrés de la plus grande taille possible, il faudrait les prendre de côté 4.

Reproduisons le raisonnement d'Euclide sur un rectangle de 132 sur 108 :

Pour savoir la mesure commune de 132 et 108, j'enlève un carré de côté 108 dans le rectangle 132×108 ; puis, dans le rectangle 24×108 restant, j'enlève successivement quatre carrés de côté 24 ; puis, dans le rectangle 12×24 restant, j'enlève deux carrés de côté 12. Comme il ne reste plus de rectangle, j'en déduis que 12 est la mesure commune de 132 et 108. Si on voulait carrelé ce rectangle avec des carreaux carrés de la plus grande taille possible, il faudrait les prendre de côté 12.



Expliquer ensuite en quoi le script Scratch ci-contre atteint le même objectif.



Le script manipule des variables. Dans le cas du rectangle 32×12 , ces variables sont $a=32$ et $b=12$. Comme $a \neq b$, on entre dans la boucle :

On a : $a > b$, donc on enlève 12 à 32, le résultat : 20 est affecté à la variable a.

Les variables contiennent $a=20$ et $b=12$.

Comme $a \neq b$, on reste dans la boucle :

On a : $a > b$, donc on enlève 12 à 20, le résultat : 8 est affecté à la variable a.

Les variables contiennent $a=8$ et $b=12$.

Comme $a \neq b$, on reste dans la boucle :

On a : $a < b$, donc on enlève 8 à 12, le résultat : 4 est affecté à la variable b.

Les variables contiennent $a=8$ et $b=4$.

Comme $a \neq b$, on reste dans la boucle :

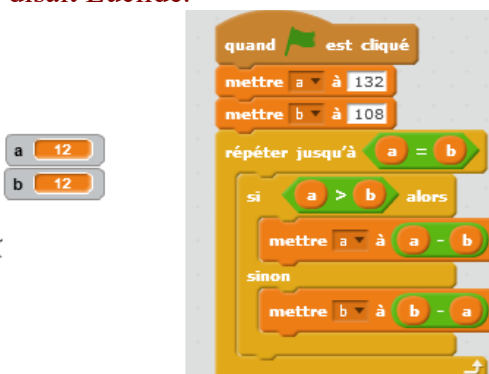
On a : $a > b$, donc on enlève 4 à 8, le résultat : 4 est affecté à la variable a.

Les variables contiennent $a=4$ et $b=4$.

Comme $a=b$, on sort de la boucle, ce qui achève le script.

On constate que ce script et l'algorithme géométrique d'Euclide font les mêmes opérations. Bien sûr la méthode d'Euclide est plus visuelle, plus concrète. Le script Scratch est plus abstrait, on ne voit rien s'effectuer ; seules le contenu des variables est modifié à chaque étape.

Comme elles partent des mêmes données et font les mêmes opérations, ces deux méthodes conduisent au même résultat : le PGCD des deux nombres de départ, la « commune mesure » de ces nombres, comme le disait Euclide.



L'avantage du script Scratch est de s'adapter bien plus facilement à de nouvelles données : si j'entre 132 dans a et 108 dans b, j'obtiens directement le résultat, la commune mesure de 132 et 108 vaut 12. On note cela aujourd'hui $\text{PGCD}(132, 108) = 12$.

On aurait aussi pu utiliser les décomposition de $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ et $108 = 2^2 \times 3^3$. En prenant les facteurs communs de ces décompositions : $\text{PGCD}(132, 108) = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$.