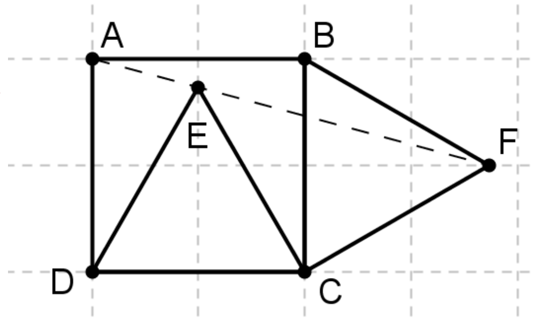
5ème3 DM4 : angles janvier 2022

CORRECTION

1) Problème d'alignement n°1

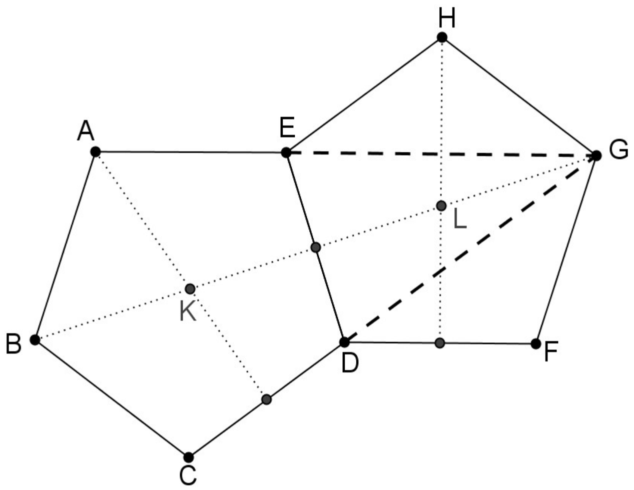
ABCD est un carré dans lequel on trace le triangle équilatéral CDE. Sur le bord extérieur du carré on trace un autre triangle équilatéral BCF (voir la figure). Montrer que A,E,F sont alignés.
(*calculer les angles des triangles DEC, ADE, ECF*)



ABCD est un carré, ses 4 angles sont donc égaux à 90°.
DEC est un triangle équilatéral, ces 3 angles sont donc égaux à 60°.
ADE est un triangle isocèle en D car DA=DE.
L'angle principal $\widehat{ADE}$ vaut $\widehat{ADC}-\widehat{EDC}=90-60=30°$,
les 2 angles égaux valent donc $(180-30)\div 2=150\div 2=75°$.
ECF est un triangle isocèle en C car CE=CF.
L'angle principal $\widehat{ECF}$ vaut $\widehat{ECB}+\widehat{BCF}=30+60=90°$,
les 2 angles égaux valent donc $(180-90)\div 2=90\div 2=45°$.
Finalement, en E se rejoignent les 3 angles $\widehat{AED}$, $\widehat{DEC}$ et $\widehat{CEF}$, adjacents et égaux, respectivement à 75°, 60° et 45°. L'angle $\widehat{AEF}$ mesure donc 75+60+45=180°.
Comme $\widehat{AEF}$ est un angle plat, les points A, E et F sont alignés.

2) Problème d'alignement n°2

ABCDE et DEHGF sont deux pentagones réguliers[1] de centres K et L, accolés par leur arête commune [DE].
L'objectif est de montrer que A, E et G sont alignés (comme aussi B, E et H ou encore C, D et G et B, D et F).



a) Calculer les angles des triangles joignant deux sommets consécutifs d'un pentagone régulier et leur centre, par exemple le triangle BAK.
$\widehat{AKB}=360\div 5=72°$ car c'est un des cinq angles adjacents égaux qui forment le tour (360°) du point K.
Le triangle BAK étant isocèle en K, on a donc :
$\widehat{BAK}=\widehat{ABK}=(180-72)\div 2=108\div 2=54°$.

b) Calculer les angles des triangles joignant trois sommets consécutifs d'un pentagone régulier, par exemple le triangle EHG.
Trois sommets consécutifs comme E,H,G ou B,A,E forment un angle égal à 108°, car les angles $\widehat{BAE}$ ou $\widehat{EHG}$ sont formés de deux angles adjacents égaux à 54°.
On a donc, par exemple, $\widehat{BAE}=\widehat{BAK}+\widehat{KAE}=54+54=108°$.
De la même façon, $\widehat{EHG}$ ou encore $\widehat{HGF}$ ou $\widehat{ABC}$, tous ces angles mesurent 108°.
Les autres angles du triangle BAE, isocèle en A (car BA=AE), mesurent $(180-108)\div 2=72\div 2=36°$.

c) Calculer les angles des triangles joignant deux sommets consécutifs et le sommet opposé, par exemple le triangle EGD.
Les triangles comme EGD peuvent être découpés en trois triangles contenant le point L (le centre du pentagone) :

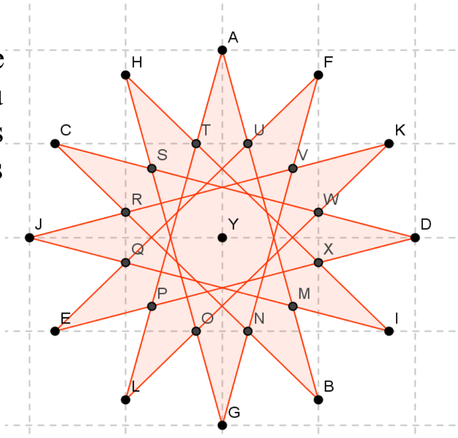
- EDL qui a comme BAK des angles égaux à 72°, 54° et 54° ;
- ELG et DLG qui sont isocèles, d'angle principal 2×72=144°.

Les angles égaux de ces derniers triangles font $(180-144)\div 2=36\div 2=18°$.
On déduit de cela que les angles $\widehat{EDG}$ ou $\widehat{DEG}$ sont formés de deux angles adjacents égaux l'un à 54°, et l'autre à 18°. Ils mesurent donc 54+18=72°.
L'angle principal $\widehat{EGD}$ de ces triangles est donc égal à $180-2\times 72=180-144=36°$.

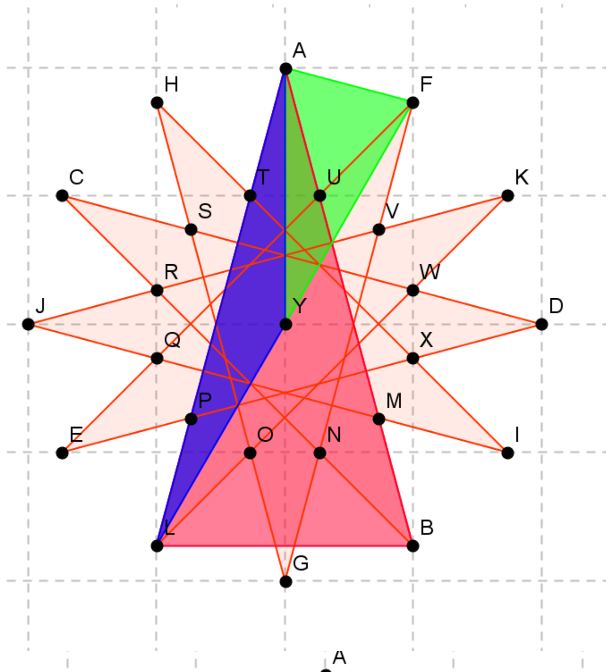
d) Calculer la somme $\widehat{AED}$ et $\widehat{DEG}$ et expliquer alors pourquoi les points A, E et G sont alignés.
On a vu que $\widehat{AED}=\widehat{BAE}=108°$ et que $\widehat{DEG}=72°$.
Comme ces angles sont adjacents, on en déduit que $\widehat{AEG}=\widehat{AED}+\widehat{DEG}=108+72=180°$.
L'angle $\widehat{AEG}$ étant plat, les points A, E et G sont alignés.

1 *Rappel : un polygone est régulier si tous ses côtés et tous ses angles internes sont égaux ; un polygone régulier est par conséquent inscriptible dans un cercle dont le centre est à égale distance des sommets du polygone.*

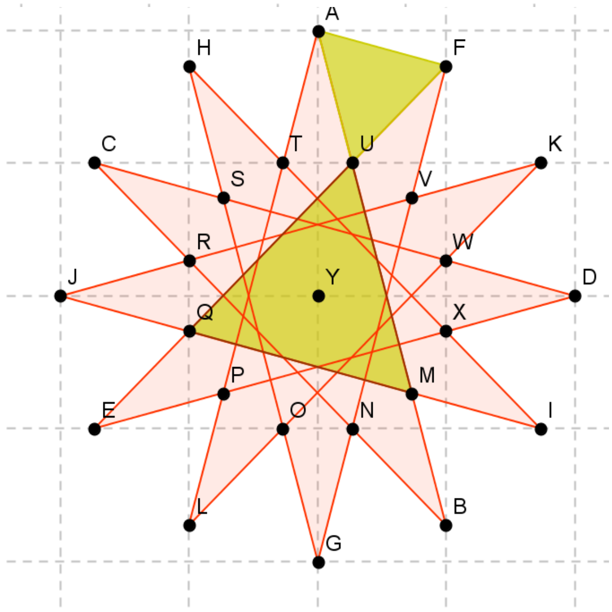
3) Dodécagone étoilé



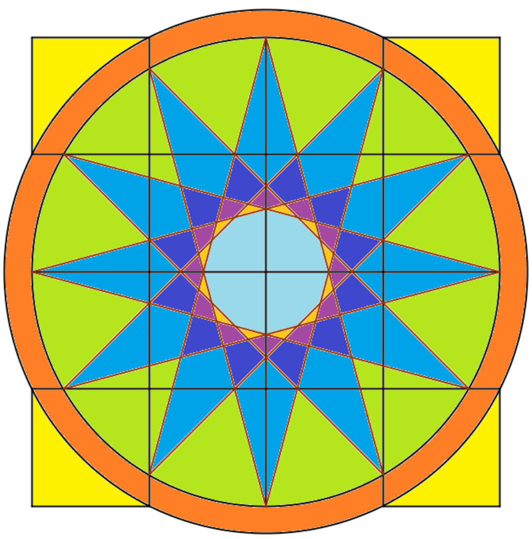
L'étoile ci-contre est régulière.
Pour la tracer (au crayon) : tracer un cercle de rayon 2 unités dont le centre est le centre d'un carré de 4 unités de côté. Découper l'intérieur du carré en un quadrillage de 16 petits carrés égaux. Marquer ensuite les intersections de ces petits carrés avec le cercle : il y en a 12 qui sont les sommets de l'étoile.
Tracer alors l'étoile en couleur.
Colorier de façon autant esthétique que symétrique.
Déterminer la mesure des angles intérieurs et extérieurs des branches.
(*se servir des noms de points indiqués sur la figure de droite où les angles à déterminer sont, par exemple, l'angle* $\widehat{BAL}$ *et l'angle* $\widehat{AUF}$)



Angles internes : Raisonnons sur la figure suivante où nous avons colorié les triangles isocèles AYF, AYL et ABL.
Comme AFKDIBGLEJCH est un dodécagone régulier, nous avons $\widehat{AYF}=360\div12=30°$ car c'est un des douze angles adjacents égaux qui forment le tour du point Y.
Le triangle AYL étant isocèle en Y, on a donc : $\widehat{YAF}=\widehat{AFY}=(180-30)\div2=75°$.
AYL est isocèle, d'angle principal 5×30=150° (car constitué de 5 angles adjacents égaux à 30°). Les angles égaux de AYL font $(180-150)\div2=15°$. L'angle $\widehat{BAL}$ est constitué de 2 angles adjacents égaux à 15°, il mesure donc 30°. Cet angle est l'angle interne du dodécagone étoilé qui est donc constitué de 12 angles internes consécutifs égaux à 30°. Ces 12 angles totalisent donc 360° et non 1 800° (10 fois 180°) comme le prévoit la règle concernant les angles des polygones non croisés (un triangle : 180°, un quadrilatère : 2×180°, un pentagone : 3×180°, etc.).

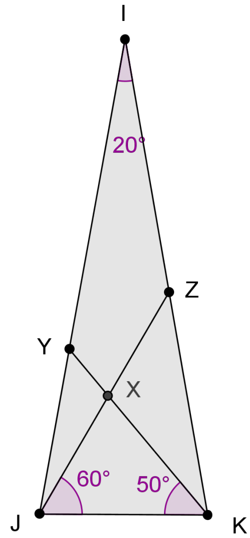


Angles externes : Raisonnons sur une autre figure, pour faire ressortir d'autres polygones. Le triangle AUF a le même angle en U que le triangle MUQ (angles opposés par le sommet). Or MUQ est un triangle équilatéral, car il est constitué de 3 sommets choisis parmi les 12 sommets du dodécagone convexe régulier MNOPQRSTUVWX, pris de 4 en 4 (et 12÷4=3). Cet angle vaut donc 60°. Il s'agit de l'angle externe de l'étoile, dans le sens où l'on peut mesurer cet angle entre les branches de l'étoile, en étant à l'extérieur de l'étoile.

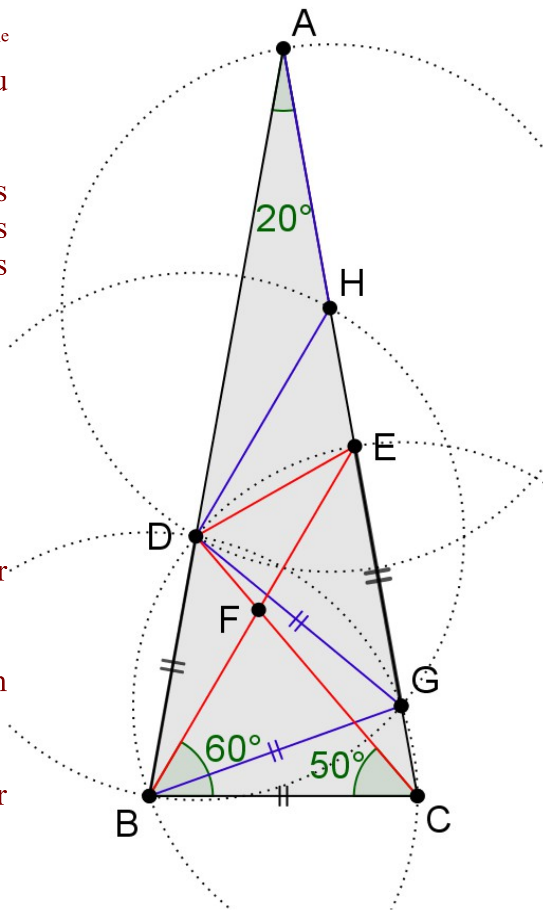


4) <u>Défi</u>

Un triangle isocèle IJK a pour mesure de l'angle principal 20°.
On construit Y sur [IJ] et Z sur [IK] de manière à avoir $\widehat{JKY}=50°$ et $\widehat{KJZ}=60°$.
Combien mesure l'angle $\widehat{XYZ}$?



Ce défi est assez difficile.
Même si on peut obtenir facilement la réponse (en traçant la figure sur GeoGebra et en mesurant les angles cherchés), et qu'on peut calculer facilement certains angles de la figure, dont $\widehat{YXZ}$ qui vaut 70°, les deux autres angles échappent à l'analyse directe de la figure. Il faut faire intervenir d'autres points, et c'est là toute la difficulté...
La solution que nous proposons ici vient de l'article « Variations sur un problème de géométrie élémentaire » de Jean-Pierre Friedelmeyer (Bulletin de l'APMEP n° 476, pp.375-382) où il est dit que ce problème est un classique, déjà répertorié par H.S.M. Coxeter et S.L. Greitzer dans *Redécouvrons la géométrie*, Éditions Dunod, Paris, 1971, p. 29. J'ai gardé les noms de points originaux de cette figure (ceux que l'on trouve dans le livre et aussi dans l'article de J.-P. Friedelmeyer), donc A, B, C, D, E et F à la place de I, J, K, Y, Z et X.
Notez que ce problème figurait dans l'ancien manuel de maths de 5ème (avant la réforme du collège) coécrit par une ancienne professeur du Lycée Henri IV (Mme Bramoullé) et publié chez Belin.



On commence par déterminer les angles que l'on peut en utilisant les propriétés du cours (somme des angles d'un triangle, angles opposés par le sommet, angles d'un triangle isocèle, angles adjacents, angles supplémentaires).
On trouve par exemple, que :
$\widehat{DBE}=20°$, $\widehat{DCE}=30°$,
$\widehat{DFE}=70°$, $\widehat{BEC}=40°$, $\widehat{BDC}=50°$.
Il y a 2 triangles isocèles qui émergent alors :

- BCD (d'angles 50°, 50° et 80°)
- BEA (d'angles 20°, 20° et 140°).

Voilà, on ne peut vraiment pas en dire beaucoup plus sans ajouter quelques éléments...

Construisons le point G sur [AC] tel que BG=BC. On a ainsi un triangle isocèle BCG d'angles 80°, 80° et 20°.
Le triangle BGD apparaît alors comme équilatéral car :

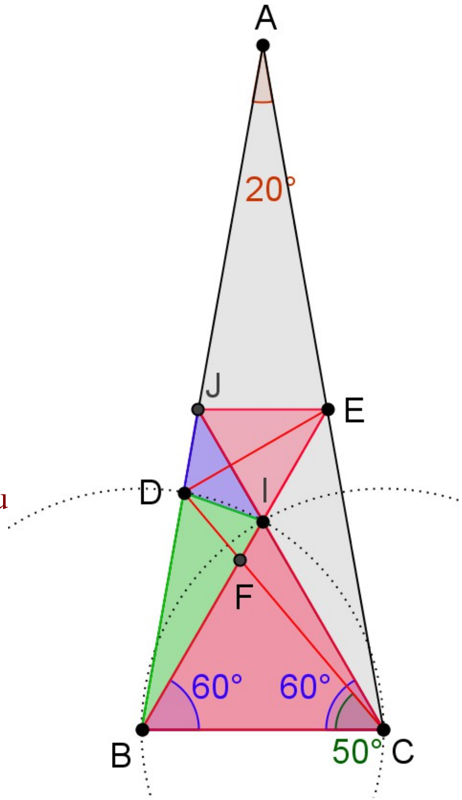
- BD=BC car BCD est isocèle en B et comme BG=BC par construction, on a BD=BG
- d'autre part $\widehat{DBG}=80-20=60°$

On peut introduire encore le point H sur [AC] de manière à avoir DGH isocèle en D (angles 40°, 40° et 100°).
L'angle $\widehat{ADH}$ vaut alors 20° (180-60-100) ce qui montre que ADH est lui-aussi isocèle, en H.
Ce point H n'apporte rien pour ce qui est de la solution, c'est plutôt histoire de comprendre pourquoi cette solution marche bien, car AHDGBC est alors un « iso-zigzag » comme le définit Henri Bareil dans *Des zigzags, des pavages et des constructions*, BV n° 473, nov. - déc. 2007.

Revenons à notre problème. BGE est un triangle isocèle en G d'angles 40°, 40° et 100°.
En effet, il a deux angles égaux : $\widehat{BEC}$ qui vaut 40° d'où $\widehat{BEG}=40°$ et $\widehat{EBG}$ qui vaut 60-20=40°.
On en déduit que BG=EG et donc, comme BG=DG, on obtient DG=EG.
Le triangle DGE est donc isocèle lui-aussi d'angles 70°, 70° et 40°.
Les angles $\widehat{EDG}$ et $\widehat{DEG}$ vallent donc 70°. D'où $\widehat{FED}=\widehat{DEG}-\widehat{FEG}=70-40=30°$
Comme $\widehat{DFE}$ vaut 70° et $\widehat{FED}=30°$, le 3ème angle du triangle vaut $\widehat{EDF}=180-70-30=80°$.

Une autre solution, plus naturelle peut-être :
On ajoute le point J de [AB] tel que $\widehat{BCJ}=60°$.
On appelle I l'intersection de [CJ] et [BE],
les triangles BIC et JIE sont donc équilatéraux et on a BC=BI.
Ayant calculé $\widehat{BDC}=50°$, on savait que BDC est isocèle en B
On en déduit que BD=BC.
Les deux égalités soulignées montrent que BD=BI,
le triangle BDI est donc isocèle en B,
les angles $\widehat{BDI}$ et $\widehat{BID}$ sont donc égaux à $(180-20)\div 2=80°$.
Le triangle DIJ (en bleu) a donc :

- son angle en D égal à $180-80=100°$,
- son angle en I est égal à $180-80-60=40°$ car :
  JIE est équilatéral et B, I et E sont alignés
- son angle en J est égal, lui aussi, à 40° car c'est le 3ème angle du triangle BCJ ou le 3ème angle du triangle DIJ.



DIJ est donc isocèle en D.
La médiatrice de sa base, [IJ], contient :

- le point D (sommet principal du triangle isocèle DIJ)
- le point E car JIE est équilatéral.

(DE) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{IEJ}$ mesurant 60°.
On en déduit que $\widehat{IED}=\widehat{FED}=60\div 2=30°$,
et aussi que $\widehat{FDE}=180-70-30=80°$.