5ème3 DM3 : fractions *décembre 2021*

CORRECTION

1) Une infinité de fractions différentes

Partie 1 : Nombre de fractions

a) Il y a une infinité de fractions comprises entre deux nombres, par exemple entre 0 et 1.
Donner neuf fractions comprises entre 0 et 1, puis neuf autres entre 0 et 0,001.

Voici une liste de fractions comprises entre 0 et 1 rangées dans l'ordre décroissant :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \left[\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \ldots\right]$$

En suivant ce procédé de fabrication, je peux en donner une infinité : il y en a une plus grande ($\frac{1}{2}$) mais aucune plus petite. Mais elles sont toutes supérieures à 0.

Notez que j'aurai pu donner d'autres suites infinies de fractions comprises entre 0 et 1, comme celle-ci qui est croissante :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \left[\frac{10}{11}, \frac{11}{12}, \frac{12}{13}, \frac{13}{14}, \ldots\right].$$

Voici maintenant des fractions comprises entre 0 et 0,001 :

$$\frac{1}{2000}, \frac{1}{3000}, \frac{1}{4000}, \frac{1}{5000}, \frac{1}{6000}, \frac{1}{7000}, \frac{1}{8000}, \frac{1}{9000}, \frac{1}{10000}, \left[\frac{1}{11000}, \frac{1}{12000}, \frac{1}{13000}, \frac{1}{14000}, \ldots\right]$$

Comme précédemment, je peux aussi donner une suite croissante.
Celle-ci commence à 0,05 et ne contient que des nombres inférieurs à 0,01 :

$$\frac{1}{2000}, \frac{2}{3000}, \frac{3}{4000}, \frac{4}{5000}, \frac{5}{6000}, \frac{6}{7000}, \frac{7}{8000}, \frac{8}{9000}, \frac{9}{10000}, \left[\frac{10}{11000}, \frac{11}{12000}, \frac{12}{13000}, \frac{13}{14000}, \ldots\right]$$

Ce préliminaire était destiné à nous montrer que l'on peut trouver une infinité de fractions différentes entre deux nombres quelconques, aussi proches soient-ils.
J'ai choisi de demander des nombres entre 0 et 1 ou entre 0 et 0,001 mais on aurait fait de même entre 5 et 6 ou entre 1,2345678 et 1,23456789... Il y a donc une infinité d'infinités de fractions.

Décrire une méthode qui permet de fabriquer neuf fractions comprises entre deux fractions quelconques.

Les méthodes qui permettent de fabriquer une fraction comprise entre deux fractions quelconques sont multiples. Je vous en donne quatre ci-dessous. Notons ces fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ où *a*, *b*, *c* et *d* sont entiers.

Une première méthode est de calculer la moyenne de ces deux fractions (pour calculer la moyenne, on prend la demi-somme des deux nombres). Commençons par mettre les fractions au même dénominateur :

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times d}{b\times d} \text{ et } \frac{c}{d}=\frac{b\times c}{b\times d}$$

Puis, pour trouver une fraction entre $\frac{a\times d}{b\times d}$ et $\frac{b\times c}{b\times d}$, calculons la moyenne de ces deux nombres :

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{a\times d}{b\times d}+\frac{b\times c}{b\times d}\right)=\frac{a\times d+b\times c}{2\times b\times d}$$, nombre qu'on note pour simplifier $\frac{ad+bc}{2bd}$

Exemple : une fraction entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ est $\frac{1\times 3+2\times 1}{2\times 2\times 3}=\frac{5}{12}$.

Vérifions : $\frac{1}{2}=\frac{6}{12}>\frac{5}{12}$ et $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}<\frac{5}{12}$.

Est-on certain que la moyenne de deux nombres *a* et *b* avec $a < b$ est toujours comprise entre *a* et *b* ?
Autrement dit a t-on $a<\frac{a+b}{2}<b$? En multipliant par 2 cet encadrement, il s'écrit $2a<a+b<2b$.

L'inégalité de droite $a+b<2b$ est vraie car, en enlevant *b* des deux côtés, elle s'écrit $a < b$ ce qui est bien vrai.
De même, l'inégalité de gauche $2a<a+b$ est vraie car, en enlevant *a* des deux côtés, elle s'écrit également $a < b$.

Une deuxième méthode, nommée l'addition des « cancres » car elle ne donne pas la vraie somme de deux fractions, mais un nombre situé toujours entre les deux (cela reste à prouver). Il suffit d'ajouter les numérateurs des deux fractions et d'ajouter aussi les dénominateurs : cette fausse addition, notée ⊕, s'écrit :

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Les élèves inattentifs mais créatifs que l'on appelle des cancres (cancre vient du crabe, *cancer* en latin, qui n'avance pas droit) ont inventé cette méthode pour additionner deux fractions. Le seul problème de cette méthode élégante et assez logique : elle ne donne *jamais** le bon résultat... Dommage !

Pour que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, il faudrait que $ad^2+cb^2=0$ ce qui n'arrive *jamais** avec des entiers non nuls.

* : Il n'y a que lorsque *a* et *c* égalent 0 que la méthode des cancres est correcte : elle permet d'arriver au résultat indubitablement vrai 0+0=0, la tête à Toto.

Exemple : si on veut une fraction entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, on calcule $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$.

Vérifions : $\frac{1}{2}=0{,}5>\frac{2}{5}=0{,}4$ et $\frac{1}{3}=0{,}3333...<\frac{2}{5}=0{,}4$.

Remarque : en supposant que $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, est-on certain que $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$?

Un seul exemple ne suffit pas à prouver cela. On peut faire un peu de calcul littéral que certains d'entre vous comprendront (ce n'était pas attendu dans ce devoir) :

- montrer que $\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ revient à montrer (en multipliant des deux côtés par *d*(*b*+*d*) et en simplifiant) que $d(a+c)<c(b+d)$, soit après développement $ad+cd<bc+cd$ et, en éliminant *cd* des deux côtés, $ad<bc$, cela revient (en divisant des deux côtés par *bd* et en simplifiant) à $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ qui était notre point de départ.
- De même, montrer que $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$ revient à montrer que $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$.

L'addition des cancres, ⊕, donne donc bien *toujours* (si *a*<*c* on est certain que le cas *a*=0 et *b*=0 ne se produit pas) une fraction comprise entre deux fractions.

Une troisième méthode : après avoir mis les fractions au même dénominateur : $\frac{a}{b}=\frac{a\times d}{b\times d}$ et $\frac{c}{d}=\frac{b\times c}{b\times d}$, et les avoir rangées dans l'ordre croissant, on détermine la fraction intermédiaire en prenant le même dénominateur et en choisissant un numérateur compris entre les deux numérateurs si c'est possible, par exemple en ajoutant 1 au numérateur de la plus petite des deux car $\frac{ad}{bd}<\frac{ad+1}{bd}<\frac{bc}{bd}$. Si *ad*+1=*bc*, cela ne va pas marcher, il faut se donner davantage de choix. Pour cela, on ajoute un 0 au numérateur et au dénominateur : on aura le choix entre 9 possibilités. Prenons la 1ère. On a bien, cette fois : $\frac{ad\times 10}{bd\times 10}<\frac{ad\times 10+1}{bd\times 10}<\frac{bc\times 10}{bd\times 10}$.

Exemple : On veut une fraction entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. On les écrit au même dénominateur $\frac{3}{6}$ et $\frac{2}{6}$ et on les range $\frac{2}{6}<\frac{3}{6}$. Comme 2 et 3 se suivent, on prend $\frac{20}{60}<\frac{30}{60}$ et là, comme on a le choix pour le numérateur entre 21 et 29, on prend la 1ère solution $\frac{20+1}{60}=\frac{21}{60}$. On a rempli le contrat car $\frac{20}{60}<\frac{21}{60}<\frac{30}{60}$. Notez que si on avait pris la 4ème solution ($\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$) ou la 5ème ($\frac{25}{60}=\frac{5}{12}$), on serait tombé sur la somme des cancres ou la moyenne.

Une dernière méthode : calculer l'écart entre les deux fractions ; diviser cet écart par un entier *n* quelconque (supérieur ou égal à 2) ; ajouter cette partie de l'écart à la plus petite fraction.
Remarque : Si *n*=2 cela revient à la méthode de la moyenne (voir plus haut, la 1ère méthode) ; si *n*=10 c'est la méthode précédente dans le cas où *ad*+1=*bc*. La plupart des autres valeurs de *n* donnent une solution originale.

Exemple : si on veut une fraction entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, on calcule la différence $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$. On divise cet écart par 3 : $\frac{1}{6}\div 3=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$. On ajoute cette partie de l'écart à la plus petite fraction : $\frac{1}{2}+\frac{1}{18}=\frac{9}{18}+\frac{1}{18}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$ qui est bien une 4ème valeur intermédiaire comprise entre nos deux fractions.

b) Il y a une infinité de fractions ayant un même numérateur.
Donner dix fractions *irréductibles* (non simplifiables) dont le numérateur est 2.
Quelle condition doit vérifier les dénominateurs de ces fractions ?
Combien de nombres vérifient cette condition ?

La question demande d'examiner la succession des fractions de numérateur 2 :

$\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{8}, \frac{2}{9}, \frac{2}{10}, \frac{2}{11}, \frac{2}{12}, \frac{2}{13}, \ldots$

Pour avoir des fractions irréductibles avec la première, il faut, que les dénominateurs soient impairs.
La 1ère suite expurgée des fractions simplifiables devient alors :

$\frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}, \frac{2}{13}, \frac{2}{15}, \frac{2}{17}, \frac{2}{19}, \frac{2}{21}, \frac{2}{23}, \frac{2}{25}, \ldots$ (les dénominateurs ne doivent pas être des multiples de 2).

On a enlevé les fractions de dénominateur pair : $\frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{8}, \frac{2}{10}, \frac{2}{12}, \frac{2}{14}, \frac{2}{16}, \frac{2}{18}, \frac{2}{20}, \frac{2}{22}, \frac{2}{24}, \ldots$ qui, une fois simplifiées, forme la suite $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \ldots$

Nous avons donc une infinité de fractions ayant même numérateur, que ce soit 2 ou n'importe quel autre entier.
Il y a donc une infinité d'infinités de fractions.

c) Il y a une infinité de fractions ayant un même dénominateur.
Donner dix fractions irréductibles dont le dénominateur est 3.
Quelle condition doit vérifier les numérateurs de ces fractions ?
Combien de nombres vérifient cette condition ?

Les fractions de dénominateur 3 :

$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, \frac{12}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$

La même suite, expurgée des fractions simplifiables par 3 devient :

$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \frac{14}{3}, \frac{16}{3}, \frac{17}{3}, \ldots$ (les numérateurs ne doivent pas être des multiples de 3).

On a enlevé les fractions dont le numérateur est divisible par 3 : $\frac{3}{3}, \frac{6}{3}, \frac{9}{3}, \frac{12}{3}, \frac{15}{3}, \frac{18}{3}, \ldots$ qui, une fois simplifiées, forme la suite des nombres entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Nous avons donc une infinité de fractions de dénominateur 3 ou n'importe quel autre entier (sauf zéro).
Il y a donc une infinité d'infinités de fractions.

Partie 2 : Numérotation des fractions

Il est paradoxalement possible de numéroter *toutes* les fractions irréductibles :

On note S la somme du numérateur et du dénominateur d'une fraction (S=numérateur+dénominateur)
On liste d'abord toutes les fractions irréductibles dont la somme S vaut 1,
puis on liste celles pour lesquelles S=2, puis celles pour lesquelles S=3, et ainsi de suite jusqu'à l'infini.
On range les fractions ayant une même valeur de S selon l'ordre croissant des numérateurs.
La fraction numéro 0 est ainsi égale à $\frac{0}{1}$, la fraction numéro 1 est égale à $\frac{1}{1}$, etc.
Rappel : on oublie (on ne numérote pas) les fractions simplifiables.

a) Vérifier que, selon ce principe, la fraction $\frac{2}{3}$ porte le n°7 et la fraction $\frac{1}{6}$ porte le n°12.

Nous en venons à la partie la plus étonnante concernant cet infini des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction. Le principe de numérotation que nous vous avons proposé est connu sous le nom du zig-zag (notre zig-zag est très légèrement différent de celui proposé habituellement, comme sur ce site). Pour notre propos, nous utiliserons un tableau linéaire qui donne toutes les fractions dans l'ordre particulier induit par ce principe.

	S=1	S=2	S=3		S=4		S=5				S=6		S=7						S=8				S=9							
Numérateur	0	1	1	2	1	3	1	2	3	4	1	5	1	2	3	4	5	6	1	3	5	7	1	2	4	5	7	8	0	0
Dénominateur	1	1	2	1	3	1	4	3	2	1	5	1	6	5	4	3	2	1	7	5	3	1	8	7	5	4	2	1	1	1
Valeur décimale	0	1	0,5	2	0,33	3	0,25	0,67	1,5	4	0,2	5	0,17	0,4	0,75	1,33	2,5	6	0,14	0,6	1,67	7	0,13	0,29	0,8	1,25	3,5	8	0	0
Numéro	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Vous avez remarqué que nous avons numéroté les fractions à partir de 0. Cela paraît un peu facétieux, mais 0 n'est-il pas un nombre, le premier des nombres entiers? Alors pourquoi ne pas l'utiliser pour compter les fractions? D'ailleurs, celle qui porte le numéro 0 est la fraction égale à 0.

Avec cette méthode de numérotation, la fraction $\frac{2}{3}$ porte le numéro 7 et $\frac{1}{6}$ porte le numéro 12.

b) Quelle fraction porte le n°25 ? Justifier en donnant les 25 premières fractions dans l'ordre des numéros.

La fraction qui porte le numéro 25 est ainsi la fraction $\frac{5}{4}$ (voir mon tableau ci-dessus).

c) Pourquoi peut-on en déduire qu'il y a autant de fractions irréductibles que de nombres entiers ?

Vous avez noté que, selon ce principe, on passe en revue toutes les fractions irréductibles, en les disposant dans un ordre qui n'est pas l'ordre de leur valeur numérique. En augmentant S jusqu'à des valeurs infinies, et en numérotant les fractions dans l'ordre où elles apparaissent, nous passerons successivement par toutes les fractions possibles imaginables. L'*infinité d'infinité* des fractions se réduit alors à la simple infinité des nombres entiers puisqu'il suffit d'un nombre entier pour définir une fraction : le rang 7 définit la fraction $\frac{2}{3}$, au rang 12 c'est $\frac{1}{6}$ et au rang 25 on a $\frac{5}{4}$. Il y a donc autant de fractions irréductibles que de nombres entiers. On dit que l'ensemble des fractions est *dénombrable* : il a le même nombre d'éléments que l'ensemble des entiers (aussi paradoxal que cela puisse paraître).

Bien sûr ce résultat indique également que l'ensemble des nombres décimaux est dénombrable (il y a autant de nombres décimaux que de nombres entiers) puisque tous les décimaux peuvent s'écrire sous forme de fraction.

Vous allez me dire que c'est pareil pour tous les ensembles infinis : vous pensez qu'on peut toujours compter les éléments d'un ensemble infini ? Et bien non. Il existe plusieurs sortes d'infini : au moins deux : l'infini dénombrable et l'infini indénombrable.

C'est au mathématicien Cantor[1] que l'on doit cette idée neuve, et sa preuve, que l'ensemble des nombres réels, des nombres comme $\sqrt{2}$ ou π (leur écriture décimale infinie n'est généralement pas périodique) est indénombrable.

2) Écriture décimale des fractions

Partie 1 : Écriture décimale finie ou infinie

Comment reconnaître les fractions qui ont la propriété, notée ($\mathscr{P}$), d'avoir une écriture décimale finie ?

a) Donner douze fractions irréductibles de dénominateurs différents inférieurs à 100 qui vérifient ($\mathscr{P}$).

Voici douze fractions qui ont un développement décimal fini :

$\frac{1}{2}=0{,}5$, $\frac{1}{4}=0{,}25$, $\frac{2}{5}=0{,}4$, $\frac{3}{8}=0{,}375$, $\frac{7}{10}=0{,}7$, $\frac{11}{20}=0{,}55$, $\frac{13}{25}=0{,}52$,

$\frac{17}{40}=0{,}425$, $\frac{19}{50}=0{,}38$, $\frac{23}{64}=0{,}359375$, $\frac{29}{80}=0{,}3625$, $\frac{31}{16}=1{,}9375$

Ce n'est pas si facile à trouver avec toutes ces contraintes, mais on y arrive.

b) Donner toutes les fractions de dénominateur 12 dont le numérateur est compris entre 1 et 12.

Simplifier au maximum ces fractions puis, donner pour chacune d'elle l'écriture décimale, finie ou infinie (avec des … lorsque cela se répète).

Quel est le point commun entre les numérateurs de celles qui ont une écriture décimale finie ?

Donnons les fractions de dénominateur 12 dont le numérateur est compris entre 1 et 12 :

$\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12}, \frac{12}{12}$.

Simplifions ces fractions : $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{1}{1}$.

Écrivons ces fractions avec une écriture décimale finie ou infinie :

$\frac{1}{12}=0{,}08333\ldots$, $\frac{1}{6}=0{,}166666\ldots$, $\frac{1}{4}=0{,}25$, $\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$, $\frac{5}{12}=0{,}4166666\ldots$, $\frac{1}{2}=0{,}5$

$\frac{7}{12}=0{,}58333\ldots$, $\frac{2}{3}=0{,}666\ldots$, $\frac{3}{4}=0{,}75$, $\frac{5}{6}=0{,}8333\ldots$, $\frac{11}{12}=0{,}91666\ldots$, $\frac{1}{1}=1$.

Celles qui ont une écriture décimale finie sont $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$;

leur dénominateur est soit 1, soit 2, soit 4.

À chaque fois, c'est une puissance de deux ($2^0=1, 2^1=2, 2^2=4$).

1 Georg Cantor est un mathématicien allemand, né le 3 mars 1845 à Saint-Pétersbourg et mort le 6 janvier 1918 à Halle

c) Montrer sur des exemples que si une fraction irréductible a un dénominateur qui peut s'écrire sous la forme $\underbrace{2\times2\times...\times2}_{n\ facteurs\ 2}\times\underbrace{5\times5\times...\times5}_{p\ facteurs\ 5}$ (avec n et p entiers), alors on peut toujours la transformer en une fraction décimale.

Donnons des fractions irréductibles ayant un dénominateur qui n'est divisible que par des nombres de la forme $2\times2\times...\times2\times5\times5\times...\times5$ (un nombre quelconque de facteurs 2 et 5) et montrons qu'alors, on peut toujours les transformer en une fraction décimale :

$$\frac{3}{50}=\frac{3}{2\times5\times5}=\frac{3\times2}{2\times5\times2\times5}=\frac{6}{100}$$

$$\frac{13}{1250}=\frac{13}{2\times5\times5\times5\times5}=\frac{13\times2\times2\times2\times2}{2\times5\times2\times5\times2\times5\times2\times5}=\frac{208}{10000}$$

$$\frac{71}{320}=\frac{71}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times5}=\frac{71\times5\times5\times5\times5\times5}{2\times5\times2\times5\times2\times5\times2\times5\times2\times5\times2\times5}=\frac{221875}{1000000}$$

Nos trois exemples montrent comment il faut procéder : on décompose le dénominateur en produit de 2 et de 5, ensuite on complète ces dénominateurs en les multipliant par des 2 ou des 5 de manière à obtenir autant de facteurs 2 que de facteurs 5, et donc, par combinaison (10=2×5) une puissance de dix. Évidemment, il faut multiplier les numérateurs par les mêmes facteurs, de manière à conserver toujours une fraction égale à celle de départ. De cette manière, on a bien toujours une fraction décimale à la fin, signe que le nombre est décimal.

Partie 2 : Longueur des séquences périodiques*

Il est facile de trouver des fractions qui ont une écriture décimale infinie avec 1, 2 ou 6 chiffres qui se répètent, mais il est moins facile d'en trouver avec des séquences ayant une longueur différente.

Déterminer les premières fractions de la forme $\frac{1}{n}$ qui ont entre 1 et 7 chiffres qui se répètent (*pour chaque longueur de la séquence périodique, donner la valeur de n trouvée et la séquence de chiffres qui se répète en complètant le tableau ci-dessous ; justifier en posant la division*).

Je vais utiliser un tableur pour chercher la suite des décimales des nombres $\frac{1}{n}$ et pour les afficher. Pour cela je crée un tableau de 10 lignes et 10 colonnes pour mettre ces nombres ; la ligne a donne le chiffre des dizaines, et la colonne b donne le chiffre des unités. Ainsi j'obtiens le début de l'écriture décimale de $1 \div ab$.

a\ b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-	1	0,5	0,3333333333	0,25	0,2	0,1666666667	0,1428571429	0,125	0,1111111111
1	0,1	0,0909090909	0,0833333333	0,0769230769	0,0714285714	0,0666666667	0,0625	0,0588235294	0,0555555556	0,0526315789
2	0,05	0,0476190476	0,0454545455	0,0434782609	0,0416666667	0,04	0,0384615385	0,037037037	0,0357142857	0,0344827586
3	0,0333333333	0,0322580645	0,03125	0,0303030303	0,0294117647	0,0285714286	0,0277777778	0,027027027	0,0263157895	0,0256410256
4	0,025	0,0243902439	0,0238095238	0,023255814	0,0227272727	0,0222222222	0,0217391304	0,0212765957	0,0208333333	0,0204081633
5	0,02	0,0196078431	0,0192307692	0,0188679245	0,0185185185	0,0181818182	0,0178571429	0,0175438596	0,0172413793	0,0169491525
6	0,0166666667	0,0163934426	0,0161290323	0,0158730159	0,015625	0,0153846154	0,0151515152	0,0149253731	0,0147058824	0,0144927536
7	0,0142857143	0,014084507	0,0138888889	0,0136986301	0,0135135135	0,0133333333	0,0131578947	0,012987013	0,0128205128	0,0126582278
8	0,0125	0,012345679	0,012195122	0,0120481928	0,0119047619	0,0117647059	0,011627907	0,0114942529	0,0113636364	0,0112359551
9	0,0111111111	0,010989011	0,0108695652	0,0107526882	0,0106382979	0,0105263158	0,0104166667	0,0103092784	0,0102040816	0,0101010101
10	0,01	0,0099009901	0,0098039216	0,0097087379	0,0096153846	0,0095238095	0,0094339623	0,0093457944	0,0092592593	0,0091743119
11	0,0090909091	0,009009009	0,0089285714	0,0088495575	0,0087719298	0,0086956522	0,0086206897	0,0085470085	0,0084745763	0,0084033613

Dans ce tableau, on repère facilement les nombres décimaux, ou au moins ceux qui s'écrivent avec moins de 9 chiffres décimaux. On repère aussi facilement les suites de 1, 2 ou 3 chiffres qui se répètent, et même les suites des 6 chiffres 142857 qui se remarquent assez clairement. Pour continuer ce travail, j'affiche davantage de chiffres. En même temps, j'ai remplacé les résultats par le nombre de chiffres qui se répètent. J'ai surligné en jaune la 1ère occurrence d'une certaine longueur de séquence périodique.

a\ b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-	0	0	1	0	0	1	7	0	1
1	0	2	1	0,076923076923077	7	1	0	0,058823529411765	1	0,052631578947368
2	0	0,047619047619048	2	0,043478260869565	1	0	0,038461538461539	3	7	0,034482758620690
3	1	0,032258064516129	0	2	0,029411764705882	7	1	3	0,026315789473684	6,000000000000000
4	0	5	0,023809523809524	0,023255813953488	2	1	0,021739130434783	0,021276595744681	1	0,020408163265306
5	0	0,019607843137255	0,019230769230769	0,018867924528302	3	2	0,017857142857143	0,017543859649123	0,017241379310345	0,016949152542373
6	1	0,016393442622951	0,016129032258065	0,015873015873016	0	0,015384615384615	2	0,014925373134328	0,014705882352941	0,014492753623188
7	7	0,014084507042254	1	8	3	1	0,013157894736842	0,012987012987013	0,012820512820513	0,012658227848101
8	0	9	0,012195121951220	0,012048192771084	0,011904761904762	0,011764705882353	0,011627906976744	0,011494252873563	2	0,011235955056180
9	1	0,010989010989011	0,010869565217391	0,010752688172043	0,010638297872340	0,010526315789474	0,010416666666667	0,010309278350516	0,010204081632653	2
10	0	4	0,009803921568627	0,009708737864078	0,009615384615385	0,009523809523810	0,009433962264151	7	0,009259259259259	0,009174311926606
11	2	3	0,008928571428571	0,008849557522124	0,008771929824561	0,008695652173913	0,008620689655172	0,008547008547009	0,008474576271186	0,008403361344538

J'avoue que ce n'est pas évident d'affirmer avec certitude que 1÷81 a une écriture décimale qui contient une suite de 9 chiffres qui se répète. Mais c'est la 1ère valeur pour laquelle on a un candidat. Pour vérifier il

* Séquence périodique : le motif de la suite de chiffres qui se répète jusqu'à l'infini

faut faire le calcul à la main.

```
1                       | 81
1 0 0                   |_______________________________
  1 9 0                 | 0,  0 1 2 3 4 5 6 7 9 0 1. . .
    2 8 0               |
      3 7 0             |
        4 6 0           |
          5 5 0         |
            6 4 0       |
              7 3 0     |
                1 0 0   |
```

Pour le reste, ce n'est pas évident de savoir, avec si peu de chiffres affichés, quelle est la longueur des suites de chiffres. Il ne fallait, de toutes les façons, que marquer la première valeur de *n* pour laquelle on a une certaine longueur. Je récapitule les informations obtenues dans le tableau ci-dessous.

	1 chiffre	2 chiffres	3 chiffres	4 chiffres	5 chiffres	6 chiffres	7 chiffres	8 chiffres	9 chiffres	10 chiffres
n	3	11	27	101	41	7	239	73	81	451
séquence	3	09	037	0099	02439	142857	0041841	01369863	012345679	0022172949

La suite A003060 de SLOANE répertorie les premières valeurs de *n* telles que $\frac{1}{n}$ possède *k* chiffres qui se répètent, *k* étant le rang du terme de la suite, comme dans la ligne 1 de notre tableau :

1, 3,
11, 27, 101, 41, 7, 239, 73, 81, 451, 21649, 707, 53, 2629, 31, 17, 2071723, 19,
1111111111111111111, 3541, 43, 23,
11111111111111111111111, 511, 21401, 583, 243, 29, 3191, 211, 2791, 353, 67, 103, 71, 1919, 2028119, etc.

Vous remarquerez la présence, dans cette liste, des nombres qui ne s'écrivent qu'avec des 1 ?
On les appelle des *repunits* (rep*eated* units). Ne sont-ils pas étranges ?
Et cette suite de chiffres qui se répètent obtenue pour la division 1÷81 (012345679), n'est-elle pas curieuse ?