$5^{ème}3$	DM3 : fractions	*décembre 2021*

Devoir à réaliser à deux, si possible

1) Une infinité de fractions différentes

Partie 1 : Nombre de fractions

a) Il y a une infinité de fractions comprises entre deux nombres, par exemple entre 0 et 1.
Donner neuf fractions comprises entre 0 et 1, puis neuf autres entre 0 et 0,001.
Décrire une méthode qui permet de fabriquer neuf fractions comprises entre deux fractions quelconques.

b) Il y a une infinité de fractions ayant un même numérateur.
Donner dix fractions *irréductibles* (non simplifiables) dont le numérateur est 2.
Quelle condition doit vérifier les dénominateurs de ces fractions ?
Combien de nombres vérifient cette condition ?

c) Il y a une infinité de fractions ayant un même dénominateur.
Donner dix fractions irréductibles dont le dénominateur est 3.
Quelle condition doit vérifier les numérateurs de ces fractions ?
Combien de nombres vérifient cette condition ?

Partie 2 : Numérotation des fractions

Il est paradoxalement possible de numéroter *toutes* les fractions irréductibles :

> On note S la somme du numérateur et du dénominateur d'une fraction (S=numérateur+dénominateur)
> On liste d'abord toutes les fractions irréductibles dont la somme S vaut 1,
> puis on liste celles pour lesquelles S=2, puis celles pour lesquelles S=3, et ainsi de suite jusqu'à l'infini.
> On range les fractions ayant une même valeur de S selon l'ordre croissant des numérateurs.
> La fraction numéro 0 est ainsi égale à $\frac{0}{1}$, la fraction numéro 1 est égale à $\frac{1}{1}$, etc.
> *Rappel* : on oublie (on ne numérote pas) les fractions simplifiables.

a) Vérifier que, selon ce principe, la fraction $\frac{2}{3}$ porte le n°7 et la fraction $\frac{1}{6}$ porte le n°12.

b) Quelle fraction porte le n°25 ? Justifier en donnant les 25 premières fractions dans l'ordre des numéros.

c) Pourquoi peut-on en déduire qu'il y a autant de fractions irréductibles que de nombres entiers ?

2) Écriture décimale des fractions

Partie 1 : Écriture décimale finie ou infinie

Comment reconnaître les fractions qui ont la propriété, notée ($\mathscr{P}$), d'avoir une écriture décimale finie ?
a) Donner douze fractions irréductibles de dénominateurs différents inférieurs à 100 qui vérifient ($\mathscr{P}$).

b) Donner toutes les fractions de dénominateur 12 dont le numérateur est compris entre 1 et 12.
Simplifier au maximum ces fractions puis, donner pour chacune d'elle l'écriture décimale, finie ou infinie (avec des … lorsque cela se répète).
Quel est le point commun entre les numérateurs de celles qui ont une écriture décimale finie ?

c) Montrer sur des exemples que si une fraction irréductible a un dénominateur qui peut s'écrire sous la forme $\underbrace{2\times2\times...\times2}_{n\ facteurs\ 2}\times\underbrace{5\times5\times...\times5}_{p\ facteurs\ 5}$ (avec n et p entiers), alors on peut toujours la transformer en une fraction décimale.

Partie 2 : Longueur des séquences périodiques*

Il est facile de trouver des fractions qui ont une écriture décimale infinie avec 1, 2 ou 6 chiffres qui se répètent, mais il est moins facile d'en trouver avec des séquences ayant une longueur différente.
Déterminer les premières fractions de la forme $\frac{1}{n}$ qui ont entre 1 et 7 chiffres qui se répètent (*pour chaque longueur de la séquence périodique, donner la valeur de n trouvée et la séquence de chiffres qui se répète en complètant le tableau ci-dessous ; justifier en posant la division*).

	1 chiffre	2 chiffres	3 chiffres	4 chiffres	5 chiffres	6 chiffres	7 chiffres
n							
séquence							

Indication : pour n=4 il faut chercher n au-delà de 100 et pour n=7, au-delà de 100...

* Séquence périodique : le motif de la suite de chiffres qui se répète jusqu'à l'infini