5ème Devoir Maison n°1: les nombres entiers

CORRECTION

1) Le compte est bon

Écrire le calcul permettant de trouver le résultat en une seule ligne, en combinant les nombres écrits sur les plaques (chaque plaque est utilisée 0 ou 1 fois) et les 4 opérations (+, −, ×, ÷), avec des parenthèses si nécessaire. Si aucune solution exacte n'est trouvée, donner la valeur la plus proche.
Pour justifier le résultat, indiquer des étapes intermédiaires comme dans l'exemple.

Tirage n°	Plaque 1	Plaque 2	Plaque 3	Plaque 4	Plaque 5	Plaque 6	Résultat
1	6	3	8	5	10	2	989
2	2	6	75	10	3	2	574
3	2	8	1	5	9	9	235
4	3	2	1	7	6	75	945
5	100	8	2	50	6	2	869
6	9	2	10	1	4	2	564

Exemple pour un résultat attendu de 886 avec les plaques 1, 3, 4, 5, 6, 100 :

$(100-1)\times(6+3)-5 = 99\times9-5 = 891-5 = 886$. Le compte est bon!

Tirage n°1 : $(6\times8-5)\times(10\times2+3) = 43\times23 = 989$. Le compte est bon!
Tirage n°2 : $75\times(6+2)-(10+3)\times2 = 75\times8-13\times2 = 600-26 = 574$. Le compte est bon!
Tirage n°3 : $9\times9\times(2+1)-8 = 81\times3-8 = 243-8 = 235$. Le compte est bon!
Tirage n°4 : $7\times(6-1)\times(75\div3+2) = 35\times27 = 945$. Le compte est bon!
Tirage n°5 : $(100+2)\times8+50+6\div2 = 102\times8+53 = 816+53 = 869$. Le compte est bon!
Tirage n°6 : $(9\times10+4)\times(2+1)\times2 = 94\times6 = 564$. Le compte est bon!

2) Combinaisons de chiffres

On veut placer des symboles entre les neuf chiffres 1 2 3 4 5 6 7 8 9 pour obtenir un résultat N.

a) Avec seulement les règles S et E (voir la liste ci-dessous), quel est le plus grand résultat possible ?
La décomposition $362\,880=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9$ n'est pas la plus grande.
Multiplier par 1 ne change pas le produit $2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9$, alors qu'ajouter 1 l'augmente.
Le plus grand nombre possible avec ces règles est donc $362\,881=1+2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9$.

Montrer qu'avec seulement S et E, on peut obtenir moins de 44 (résultat obtenu avec un × et sept +).
On a $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$.
La seule opération qui fasse diminuer un résultat est la division, il faut donc en employer au moins une, sauf pour le résultat $1\times2+3+4+5+6+7+8+9=44$ qui exploite la particularité de la multiplication par 1.
On peut trouver 38 (mais c'est difficile), 37 et même 36 :

- $1+2+3\times4\times5\times6\times7\div8\div9 = 3+2520\div8\div9 = 3+315\div9 = 3+315\div9 = 3+35 = 38$
- $1+2+3\times4\times5\div6+7+8+9 = 3+60\div6+24 = 27+10 = 37$
- $1\times2+3\times4\times5\div6+7+8+9 = 2+60\div6+24 = 26+10 = 36$

Trouver des combinaisons qui donnent N=100 avec seulement S et E (il y en a quatre possibles).
Première solution : $1+2+3+4+5+6+7+8\times9 = 28+72 = 100$ (facile).
Deuxième solution : on remarque que $1+2+3=1\times2\times3$.
On peut donc remplacer le début de notre 1ère solution : $1\times2\times3+4+5+6+7+8\times9 = 100$.
Troisième solution : $1\times2\times3\times4+5+6+7\times8+9 = 24+11+56+9 = 35+65 = 100$ (moins évident).
Dernière solution, avec une division : $1+2\times3\times4\times5\div6+7+8\times9 = 1+120\div6+7+72 = 20+80 = 100$.

b) Trouver une combinaison qui donne N=100 avec seulement S, E et P.
Voici dix solutions :

```
Solution 1 : (1+2+3)x4+5+6+7x8+9 = 100      Solution 6 : (1+2):3+4+5x6+7x8+9 = 100
Solution 2 : 1+2x(3+4+5x6+7):8x9 = 100      Solution 7 : (1x2+3x4)x5+6+7+8+9 = 100
Solution 3 : (1+2)x3+4x5+6+7x8+9 = 100      Solution 8 : 1x(2+3x4)x5+6+7+8+9 = 100
Solution 4 : (1+2)x3x4+5+6x7+8+9 = 100      Solution 9 : 1x2x(3+4+5):6x7+8x9 = 100
Solution 5 : (1+2x3x4x5x6+7):8+9 = 100     Solution 10 : 1x2x(3+4)x5+6+7+8+9 = 100
```

Trouver une combinaison qui donne N=100 avec seulement S, E et O.
Voici sept solutions qui utilisent l'ordre décroissant des chiffres (on pouvait donner un autre ordre) :

Ordre décroissant

```
Solution 1 : 9+8x7+6+5+4x3x2x1 = 100
Solution 2 : 9+8x7+6+5+4x3x2:1 = 100
Solution 3 : 9x8+7+6+5+4+3+2+1 = 100
Solution 4 : 9x8+7+6+5+4+3x2x1 = 100
Solution 5 : 9x8+7+6+5+4+3x2:1 = 100
Solution 6 : 9x8+7+6x5x4:3:2+1 = 100
Solution 7 : 9x8x7:6+5+4+3x2+1 = 100
```

Remarquez que certaines sont des variantes de celles trouvées avec l'ordre croissant.
Trouver une combinaison qui donne N=100 avec seulement S, E et C.
Voici trois solutions qui utilisent juste une concaténation

Juste avec une concaténation

```
Solution 1 : 12+3x4+5+6+7x8+9 = 100
Solution 2 : 1+2x3+4+5+67+8+9 = 100
Solution 3 : 1x2+34+5+6x7+8+9 = 100
```

<u>Liste de règles :</u>
S : Les seuls S*ymboles* acceptés sont +, × et ÷. Pas de soustraction donc avec la règle S.
E : Le résultat doit être un E*ntier* et tous les résultats intermédiaires aussi.
P : Un couple de P*arenthèses* utiles, comme par exemple dans 1+2×3×4×(5+6×7+8+9), est obligatoirement présent.
O : L'O*rdre* des chiffres doit être modifié. On peut par exemple écrire 9+8×7+1+2×3×6×5÷4.
C : Une C*oncaténation* de deux chiffres est nécessaire. On peut par exemple écrire 12×3÷4×5+6+7×8+9.

3) Le système binaire

a) Notre *système numérique* repose sur les puissances de dix (les nombres 1, 10, 100, 1000, etc.) et l'utilisation de dix chiffres (0, 1, 2, …, 9). La signification du nombre 1473 repose sur la décomposition selon les puissances de dix suivante : **1**×1000+**4**×100+**7**×10+**3**×1. Quelles sont les décompositions des nombres 30, 500 et 2021 qui justifient leur écriture dans notre système numérique ?
30 = **3**×10+**0**×1.
500 = **5**×100+**0**×10+**0**×1.
2021 = **2**×1000+**0**×100+**2**×10+**1**×1.

b) Le système numérique *binaire* repose sur les puissances de 2 (les nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc.). On ne dispose que de deux chiffres en binaire (0 et 1), mais cela suffit pour décomposer n'importe quel entier. Ainsi, comme 1473=**1**×1024+**0**×512+**1**×256+**1**×128+**1**×64+**0**×32+**0**×16+**0**×8+**0**×4+**0**×2+**1**×1, on écrit ce nombre en binaire : **10111000001**. Expliquer pourquoi le nombre 9 s'écrit 1001 en binaire.
9 = **1**×8+**0**×4+**0**×2+**1**×1
Décomposer ensuite les nombres 30, 500 et 2021 selon les puissances de deux et donner leur écriture dans le système binaire.
30 = 16+8+4+2 = **1**×16+**1**×8+**1**×4+**1**×2+**0**×1
donc 30 s'écrit 11110 en binaire.
500 = 256+128+64+32+16+4 = **1**×256+**1**×128+**1**×64+**1**×32+**1**×16+**0**×8+**1**×4+**0**×2+**0**×1
donc 500 s'écrit 111110100 en binaire.
2021 = 1024+512+256+128+64+32+4+1 =
= **1**×1024+**1**×512+**1**×256+**1**×128+**1**×64+**1**×32+**0**×16+**0**×8+**1**×4+**0**×2+**1**×1
donc 2021 s'écrit 11111100101 en binaire.

4) Opérations cryptées

Dans les égalités suivantes, les lettres a, b, c, d, e, f, g, h, i et j représentent les dix chiffres, pas forcément rangés dans l'ordre. Il s'agit de découvrir quel chiffre se cache derrière chacune des lettres afin que les deux égalités soient vraies simultanément : $abc\ def\times g = def\ abc$ et $abc\ def\times f = hhh\ hhh$.
Qu'est-ce qui peut faire $abc\ def\times f = hhh\ hhh$?
Ce n'est pas possible d'avoir h=1 car le produit $abc\ def\times f$ dépassera forcément 111 111.
Le chiffre des unités de ce produit est le chiffre des unités de $f\times f$, or 1×1=**1**, 2×2=**4**, 3×3=**3**, 4×4=1**6**, 5×5=2**5**, 6×6=3**6**, 7×7=4**9**, 8×8=6**4**, 9×9=8**1**. En dehors du h=1, ce peut être 3, 4, 5, 6 ou 9.
La possibilité h=3 est impossible car on ne l'obtient qu'avec f=3 mais f et h ne peuvent être égales.
De même, les possibilités h=5 et h=6 sont impossibles car on ne les obtient qu'avec f=5 et f=6.
Il reste h=4 et h=9.
Si h=4, alors soit 444 444÷2=$abc\ de$2, soit 444 444÷8=$abc\ de$8.
Mais 444 444÷2=222 222 et 444 444÷8=55 555,5. Ni l'une ni l'autre ne convient.

Par contre, avec h=9 on devrait avoir 999 999÷7=*abc de*7 et on a 999 999÷7=142 857.
C'est exactement ce qu'il fallait, et les chiffres sont bien différents comme il convient.
Donc on a a=1, b=4, c=2, d=8, e=5, f=7, g= ?, h=9, i= ? et j= ?
Il reste à découvrir si il est possible d'avoir *abc def*×*g*=*def abc*, c'est-à-dire 142 857×*g*=857 142.
Peut-on trouver un chiffre g qui donne ce résultat étonnant (il permute les deux parties du nombre 142 857) ? Il suffit d'effectuer la division 857 142÷142 857. On trouve g=6 pour ce quotient.
Voilà donc la solution finale. Ainsi, 142 857×6=857 142 et 142 857×7=999 999.