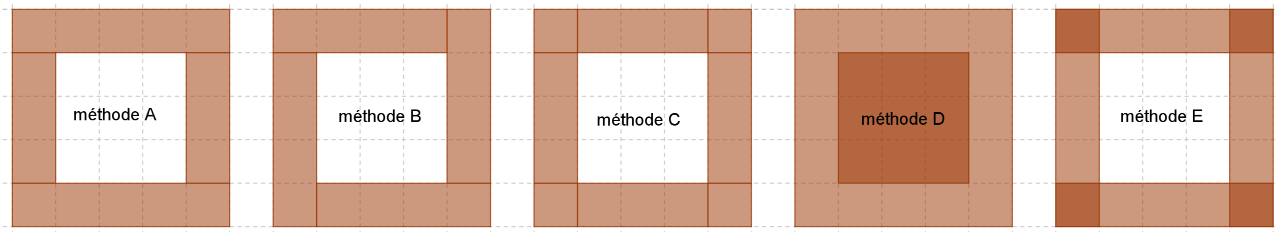
Choisir 2 exercices parmi les 3 suivants. Traiter ces exercices de façon détaillée en restant concis.

1) Formules du bord d'un carré



On considère un carré de $n\times n$ carreaux et on cherche à calculer le nombre B_n des carreaux qui sont au bord. La figure ci-dessus montre différentes méthodes de découpage du bord d'un carré de 5×5 carreaux. Les méthodes A et B considèrent 4 rectangles, la méthode C en considère 8, la méthode D considère 2 carrés (l'un enlevé à l'autre) et la méthode E considère 4 rectangles qui se superposent à leurs extrémités.

a) Illustrer les 5 découpages qui permettent de calculer B_3 et B_4.

b) Utiliser chacune de ces méthodes pour calculer B_3, B_4 et B_5 en donnant les détails des calculs.

	Méthode A	Méthode B	Méthode C	Méthode D	Méthode E
B_3					
B_4					
B_5					

c) Nous considérons ici des carrés $n\times n$ (contenant n carreaux par côtés). Trouver l'expression littérale qui traduit le calcul de B_n pour chacune des 5 méthodes. Vérifier, en développant et en réduisant ces 5 expressions, qu'elles reviennent toutes à la même formule.

d) Utiliser la formule qui convient le mieux pour calculer B_{100} et B_{750}. Existe t-il une valeur de n pour laquelle $B_n=100$? Même question pour $B_n=750$.

2) Affirmations sur la parité

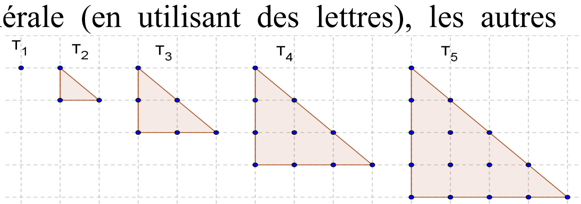
Voici 6 affirmations : ① La somme de 2 nombres pairs est paire. ② La somme de 2 nombres impairs est impaire. ③ La somme de 2 nombres impairs est paire. ④ Le produit de 2 nombres pairs est pair. ⑤ Le produit de 2 nombres impairs est impair. ⑥ Le produit de 2 nombres impairs est pair.

a) Dire lesquelles sont fausses en donnant un contre-exemple (un exemple qui prouve que c'est faux).

b) Expliquer pourquoi on peut exprimer un nombre pair p sous la forme $2n$ et un nombre impair q sous la forme $2n+1$. Donner des exemples.

c) Calculer $p+p'$ la somme de 2 entiers pairs en utilisant les décompositions vues dans la partie b), c'est-à-dire en considérant qu'il existe des entiers n et n' tels que $p=2n$ et $p'=2n'$. Montrer alors que $p+p'$ est bien un nombre pair.

d) Sur le modèle de la question c) prouver, d'une façon générale (en utilisant des lettres), les autres affirmations qui sont toujours vraies.



3) Nombres triangulaires

Les nombres dits « triangulaires » sont les nombres de points que l'on peut disposer en forme de triangles comme on le voit sur la figure. Les premiers nombres triangulaires sont $T_1=1$, $T_2=3$, $T_3=6$, $T_4=10$, $T_5=15$. On note, d'une façon générale, T_n le $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, qui contient n lignes.

a) Montrer à l'aide d'une figure qu'avec 2 nombres triangulaires identiques on construit un rectangle. Déduisez-en la formule qui permet de calculer T_n à partir de n. Calculer alors T_{100} et T_{101}.

b) Montrer alors la propriété suivante, dite « théorème de Théon de Smyrne » : Si on ajoute 2 nombres triangulaires consécutifs, on obtient un carré parfait. Montrer cela à partir d'exemples simples, puis de façon générale (avec la lettre n). Quel carré obtient-on en additionnant T_{100} et T_{101} ? Quels nombres triangulaires faut-il prendre pour trouver 1936 ($1936 = 44^2$)?