Devoir sur les triangles

Vous présenterez ce travail sur une copie où vous collerez les figures demandées qui doivent être réalisées sur des feuilles blanches (sans quadrillage). Soignez la présentation et la précision qui comptent pour une part importante de la note. Les figures peuvent être réalisées avec un logiciel de géométrie dynamique de type GeoGebra.

1) Construction de la droite et du cercle de Euler d'un triangle

a) Tracer un triangle acutangle ABC. Vous pouvez prendre, pour que la figure ne soit ni trop grande, ni trop petite et qu'elle ne soit pas un cas particulier (rectangle ou isocèle): AB=7 cm, BC=8cm et CA=9cm.

b) Construire les médiatrices des 3 côtés du triangle (arcs de cercles au crayon). Tracer ces médiatrices en bleu. En déduire la position de A', B' et C' les milieux de [BC], [CA] et [AB] et de O, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Placer A', B', C' et O, puis tracer le cercle circonscrit à ABC en bleu.

c) Tracer en vert les hauteurs du triangle. En déduire la position de l'orthocentre H du triangle ainsi que celle des milieux I, J et K des segments [AH], [BH] et [CH] et celle des pieds des hauteurs L, M et N issues de A, B et C. Placer les points H, I, J, K, L et M.

d) Vérifier que [IA'], [JB'] et [KC'] ont même milieu O' et que le cercle de centre O' passant par I, J, K, A' ,B' et C' passe aussi par les points L, M et N. Tracer ce cercle de centre O' appelé cercle d'Euler du triangle en vert.

e) Vérifier que O' est aussi le milieu du segment [HO]. Tracer la droite (HO) appelée droite d'Euler du triangle, en rouge. Tracer les médianes du triangle au crayon et placer G, le centre de gravité de ABC. Vérifier que G est sur la droite d'Euler.

f) Recommencez les étapes b, c, d et e de cette construction avec au moins 2 cas particuliers de cette liste :

- un triangle obtusangle (on pourra prendre AB=7 cm, BC=9cm et CA=12cm).
- un triangle rectangle (on pourra prendre AB=6 cm, BC=8cm et CA=10cm).
- un triangle isocèle (on pourra prendre AB=BC=9cm et CA=7cm).
- un triangle équilatéral (on pourra prendre AB=BC=CA=8cm).

Écrire quelques remarques concernant la droite et le cercle de Euler dans les cas particuliers envisagés.

2) Lieu d'un centre de gravité

a) Tracer un segment [AB]. Construire le point C symétrique de B par rapport à A, puis le cercle $\mathcal{C}$ passant par C dont le centre est I, le milieu de [AB].

b) Sur le cercle $\mathcal{C}$, on place un point M qui peut se déplacer sur le cercle. On construit ensuite le point G qui est le centre de gravité du triangle ABM.

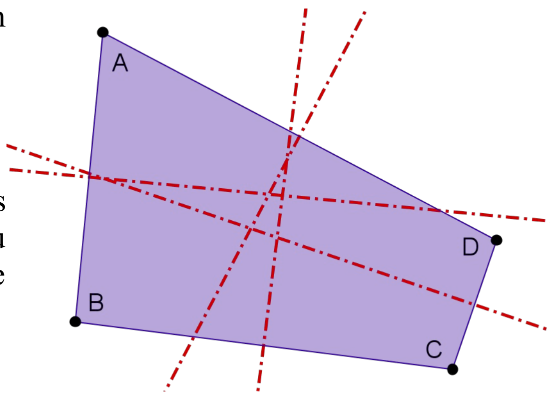
c) Faire une figure en plaçant le point M à différents endroits du cercle (mais toujours sur le cercle évidemment). Pour nommer les points de la figure, on pourra utiliser la notation M_1, M_2, M_3, etc. pour les différentes positions de M et G_1, G_2, G_3, etc. pour les différentes positions de G.

d) Quelle conjecture peut-on émettre concernant le lieu des points où se situe G lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$?

e) Prouver cette conjecture en utilisant une chaîne de déductions qui part des objets définis par le texte, qui utilise les propriétés de ces objets et qui s'achève avec une relation établissant la propriété finale.

3) Une question à propos des quadrilatère

En général, les 4 médiatrices d'un quadrilatères ne sont pas concourantes (voir figure). Cela arrive pourtant dans le cas du rectangle. Cela peut-il aussi arriver dans le cas d'un quadrilatère qui n'est pas un rectangle ? Si oui, préciser dans quel cas.



4) <u>Cercle inscrit et cercles exinscrits</u>

a) Tracer un triangle acutangle ABC. Vous pourrez prendre :
AB=7 cm, BC=8cm et CA=9cm.

b) Construire les bissectrices des 3 angles du triangle (arcs de cercles au crayon). Tracer ces bissectrices au crayon. Construire les perpendiculaires à ces bissectrices passant par le sommet correspondant du triangle (par exemple, la perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ passant par A). Vérifier que ces 6 droites se coupent en 4 points. Un de ces points est à l'intérieur du triangle, c'est l'intersection des 3 bissectrices. Nommer ce point I. Les autres points d'intersection sont à l'extérieur du triangle. Nommer I_A celui qui est sur la bissectrice de $\widehat{A}$, I_B celui qui est sur la bissectrice de $\widehat{B}$ et I_C celui qui est sur la bissectrice de $\widehat{C}$.

c) Tracer les perpendiculaires à (AB) passant par I, I_A, I_B et I_C. Ces droites coupent (AB) en J, J_A, J_B et J_C. Placer ces points puis tracer en couleur les cercles de centre I, I_A, I_B et I_C passant par J, J_A, J_B et J_C. Vérifier que ces cercles touchent chacune des droites (AB), (BC) et (CA) qui prolongent les côtés du triangle ABC.

d) Recommencez cette construction pour un triangle obtusangle. On pourra prendre AB=7 cm, BC=9cm et CA=12cm.