Classe de $4^{ème}$ | **Chapitre 9 : Calcul littéral**

Le programme extrait du [Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008]

Connaissances : *Développement.*

Capacités : Calculer la valeur d'une expression littérale en *donnant aux variables des valeurs numériques. Réduire une expression littérale à une variable, du type : $3x - (4x - 2)$, $2x^2 - 3x + x^2$... Développer une expression de la forme $(a + b)(c + d)$.*

Résolution de problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

Capacités : L'apprentissage du calcul littéral est conduit très progressivement à partir de situations qui permettent aux élèves de donner du sens à ce type de calcul. Le travail proposé s'articule autour de trois axes :

utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ;

utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ;

utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique).

Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

Commentaires : Les situations proposées doivent exclure tout type de virtuosité et viser un objectif précis (résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique, établissement d'un résultat général). L'objectif reste de développer pas à pas puis de réduire l'expression obtenue. Les identités remarquables ne sont pas au programme.

Les activités de factorisation se limitent aux cas où le facteur commun est du type a, ax ou x^2.

Le fait que « comparer deux nombres est équivalent à chercher le signe de leur différence », intéressant notamment dans le calcul littéral, est dégagé. Ces propriétés [Comparaison de deux nombres relatifs] *sont l'occasion de réaliser des démonstrations dans le registre littéral.*

Les problèmes issus d'autres parties du programme et d'autres disciplines conduisent à l'introduction d'équations et à leur résolution. À chaque fois sont dégagées les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.

Les élèves, dans le cadre du socle commun, peuvent être amenés à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible.

1) Transformations d'une expression littérale

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les conventions suivantes pour simplifier les écritures littérales :

- Le symbole multiplicatif $\times$ n'est pas écrit lorsqu'il est devant une parenthèse ouvrante ou lorsqu'il est devant un nombre écrit au moyen d'une lettre. Par exemple, $3(x+1)$ signifie $3\times(x+1)$, de même $5xy$ signifie $5\times x\times y$. Cette règle n'est pas une obligation absolue, on écrira par exemple $(x+1)\times(x+1)$ à la place de $(x+1)^2$ pour expliciter le carré, comme aussi dans l'expression πR^2 qu'on pourra écrire $\pi\times R^2$ ou $\pi\times R^2$ ou encore carrément $\pi\times R\times R$. Attention, on n'écrit pas $(x+1)2$ car cela pourrait être confondu avec $(x+1)^2$ et donc, logiquement, on ne devrait pas écrire $(x+1)x$ ni non plus $(a+b)c$ ce que nous avons pourtant fait quelques lignes plus loin... Pour terminer ce long rappel, retenons que si il y a un nombre écrit avec des chiffres dans un produit, il est écrit devant. Par exemple $2a3b$ est une notation ambiguë à laquelle on substituera $6ab$, tout simplement.
- Les nombres relatifs sont écrits sans parenthèses (comme on le fait parfois au début, en $5^{ème}$, pour distinguer les signes des nombres et les symboles des opérations), sauf lorsqu'elles sont nécessaires (dans le cas d'un nombre négatif, s'il n'est pas au début de l'expression). On notera par exemple $-3x+2\times(-5)$ même si cela peut s'écrire plus simplement $-3x-2\times5$ ou encore $-3x-10$ ou $-(3x+10)$. La simplification des écritures étant l'objectif de cette partie, nous allons revoir cela en détail.

a) Factorisations et développements

Il existe une propriété, appelée *distributivité*, qui transforme un produit en somme et réciproquement. Cette propriété est utilisée depuis l'école primaire pour effectuer les multiplications. Par exemple, $7\times18 = 7\times(10+8) = 7\times10+7\times8 = 70+56$. Le produit 7×18 a été transformé en la somme $70+56$. Cela se généralise:

> Si a, b et c sont 3 nombres quelconques alors $a(b+c) = ab+ac$ et de même $(a+b)c = a\,c+bc$

Vocabulaire : Lorsque l'expression est écrite comme un produit, on dit qu'elle est *factorisée* (les membres de gauche dans les égalités ci-dessus sont factorisés), lorsqu'elle est écrite comme une somme on dit qu'elle est *développée* (les membres de droite ci-dessus sont développés). Passer de l'écriture développée à l'écriture factorisée s'appelle *factoriser,* on dit aussi *mettre en facteur*. Dans le sens contraire, cela s'appelle *développer*

Exemples de développements : $3(x+1) = 3x+3$; $x(1+x) = x+x^2$; $(1+x)\times(-5) = 1\times(-5)+x\times(-5) = -5-5x$.

Exemples de factorisations : $3x+3 = 3(x+1)$; $x+x^2 = x(1+x)$; $-5-5x = -5(1+x)$.

Vous noterez que ces 3 exemples ont juste été écrits à l'envers, car factoriser et développer sont des transformations inverses l'une de l'autre. Dans un sens on factorise, dans l'autre on développe. Schématisons cela :

SOMME	$ab+ac \quad = \quad a(b+c)$	PRODUIT

Factoriser $\longrightarrow$

Remarque : il est souvent plus facile de développer, car il n'y a qu'à exécuter les opérations indiquées. Pour factoriser, il faut trouver un *facteur commun*, et comme généralement on cherche à mettre en facteur le maximum (pour simplifier), il faut trouver le meilleur facteur commun. Par exemple, on peut factoriser l'expression $18x^2+6x$ en remarquant que chacun des termes contient le facteur 2 : $18x^2=2\times 9x^2$ et $6x=2\times 3x$ et donc $18x^2+6x = 2(9x^2+3x)$. C'est bien factorisé, on a mis 2 en facteur, mais on aurait pu aussi mettre 3 en facteur car $18x^2+6x = 3(6x^2+2x)$ ou encore, on aurait pu mettre x en facteur car $18x^2+6x = x(18x+6)$. Laquelle de ces expressions factorisées est la meilleure ? Aucune des 3. Le mieux sera ici de mettre $6x$ en facteur, le maximum qu'on puisse «extraire» de la somme par factorisation, le produit des 3 facteurs communs 2, 3 et x. $18x^2+6x = 6x(3x+1)$. De cette manière, on obtient un facteur irréductible (non factorisable) $3x+1$ et le facteur $6x$ qui peut être vu comme un produit de 3 facteurs $2\times 3\times x$.

b) Développements doubles

Supposons que les 2 facteurs d'un produit soient des sommes. Il va falloir développer plusieurs fois, comme dans l'exemple suivant $(2+x)(3+x)$ que l'on peut écrire $(2+x)\times 3+(2+x)\times x$, en développant le produit du facteur $2+x$ par la somme $3+x$. On peut ensuite continuer, en développant le produit de 3 par la somme $2+x$ et puis, simultanément, le produit de x par la somme $2+x$. Cela donne $2\times 3+x\times 3+2\times x+x\times x$ que l'on écrira plutôt $6+3x+2x+x^2$. Généralisons ce développement :

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$$

En réalité, chacun des termes de la 1ère somme est multiplié par chacun des termes de la 2de somme. On pourrait tout aussi bien développer des expressions comme $(a+b+c)(d+e)$ ou encore $(a+b+c)(d+e+f)$ ou pire encore, mais le programme dit bien que *les situations proposées doivent exclure tout type de virtuosité [...] l'objectif reste de développer pas à pas.* Nous faisons donc cela pour nous entraîner à développer ce genre d'expression. Ce n'est pas à retenir par cœur bien sûr! Développons donc :

$(a+b+c)(d+e) = ad+bd+cd+ae+be+ce.$

$(a+b+c)(d+e+f) = ad+bd+cd+ae+be+ce+af+bf+cf.$

Un exemple moins général peut-être ?

$(1+x+3x^2)(2x+5) = 1\times 2x+x\times 2x+3x^2\times 2x+1\times 5+x\times 5+3x^2\times 5 = 2x+2x^2+6x^3+5+5x+15x^2.$

Nous avons développé en écrivant les symboles $\times$ puis nous avons effectué les quelques calculs possibles et nous avons utilisé les notations puissances qui ont été étudiées au chapitre 7 pour comprimer un peu l'écriture, mais il nous faut maintenant la réduire.

c) Réduction d'une expression développée

La réduction est une transformation qui utilise des factorisations partielles pour simplifier une expression développée. Si notre expression contient, comme l'expression du dessus, les termes $2x$ et $5x$, il est possible de regrouper ces 2 termes en un seul en mettant x en facteur, car $2x+5x = (2+5)x = 7x$. De même, nous allons regrouper $2x^2$ et $15x^2$ en factorisant la somme $2x^2+15x^2$ sous la forme plus compacte $17x^2$. Finalement, on obtient une expression développée qui n'est pas trop longue et qui ne peut plus être réduite :

$(1+x+3x^2)(2x+5) = 2x+2x^2+6x^3+5+5x+15x^2 = 6x^3+17x^2+7x+5.$

Vous remarquez que nous avons ordonné les différentes puissances du nombre inconnu x selon les exposants décroissants. C'est une forme standard – une manie de matheux – qui prendra du sens plus tard. Nous aurions pu écrire cette expression développée et réduite $5+7x+17x^2+6x^3$ (ordonnée selon les puissances décroissantes de x) ou encore $6x^3+5+7x+17x^2$ (désordonnée). Le rangement est souvent exigé par une consigne précise dans un exercice «développez, réduisez et ordonnez l'expression suivante...» mais il est aussi naturel, ou plutôt habituel. Lorsque nous effectuons la décomposition 1234=1000+200+30+4 pour effectuer le produit 5×1234, nous avons ordonné cette décomposition selon les puissances décroissantes de 10 (notre base de numération).

d) Expressions avec des signes –

Vous avez sans doute remarqué aussi l'absence presque totale de signes – dans nos exemples et nos règles. Pourtant il va falloir maintenant les réintroduire car ils font partie du paysage algébrique familier depuis la classe de $5^{ème}$. Comme il a été dit en introduction, nous ne travaillerons plus qu'avec des formes simplifiées de sommes algébriques comme par exemple $-3x-10$ qui est une somme algébrique : le nombre $-3x$ (qui est positif ou négatif, on ne sait pas) est ajouté au nombre -10 (qui lui est bien négatif). En $5^{ème}$ on écrivait cela $(-3x)+(-10)$ pour bien faire la différence entre le + de l'addition et le – du signe. En prenant $x = 1$, cette expression vaut $-3-10$ et il faut bien effectuer une addition des 2 nombres négatifs -3 et -10. On trouve alors -13. En prenant $x = -1$, cette expression vaut $3-10$ et il faut alors effectuer une soustraction car les 2 nombres qu'on ajoute n'ont pas le même signe (3 est positif tandis que -10 est négatif). On trouve dans ce cas $3-10 = -(10-3) = -7$.

Commençons par écrire les développements suivants :

$$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd$$
$$(a - b)(c + d) = ac - bc + ad - bd$$
$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$$

Vous porterez toute votre attention sur le dernier terme qui est précédé d'un + (et non d'un –), car il y a 2 signes – qui se neutralisent mutuellement, selon la fameuse règle des signes (*les ennemis de mes ennemis sont mes amis*, ce qui est discutable dans la vie mais pas en ce qui concerne les nombres).

Voyons cela sur trois exemples :

$(2+x)(3-x) = 2\times3+x\times3-2\times x-x\times x = 6+3x-2x-x^2 = 6+(3-2)x-x^2 = 6+x-x^2$

$(2-3x)(4+5x) = 2\times4-3x\times4+2\times5x-3x\times5x = 8-12x+10x-15x^2 = 8+(-12+10)x-15x^2 = 8-2x-15x^2$

$(2x-3)(4-5x) = 2x\times4-3\times4-2x\times5x+3\times5x = 8x-12+10x^2-15x = -12+(8-15)x+10x^2 = -12-7x-10x^2$

Bien sûr, cela ne serait pas logique de se limiter qu'à des formes comme celles que nous venons d'écrire. Pourquoi n'y aurait-il pas des développements comme celui-ci $(-2x-3)(4-5x)$? Ou celui-là $(-1-x)(-1-2x)$? Non, effectivement, cela est possible. Mais cela peut s'arranger facilement en considérant cette règle, dite du signe – devant une parenthèse.

Un signe – devant une parenthèse change tous les signes à l'intérieur de la parenthèse. On a ainsi pour tous nombres a et b : $-(a+b) = -a-b$; $-(a-b) = -a+b$; $-(-a-b) = a+b$; $-(-a+b) = a-b$

Ces règles fonctionnent dans les 2 sens. Ainsi on a aussi, pour la première égalité : $-a-b = -(a+b)$.

On peut reconnaître dans cette règle <u>très importante</u>, un avatar de la distributivité. En effet, une expression comme $-(a+b)$ ou d'une manière plus générale le nombre $-a$ (l'opposé de a) n'est rien d'autre que $(-1)\times a$ et donc $-(a+b) = (-1)\times(a+b) = (-1)\times a +(-1)\times b = -a -b$. Ce n'est que pour simplifier que nous notons l'expression $-a -b$ sous cette forme (sans les parenthèses). Mais lorsque c'est nécessaire, on doit pouvoir utiliser l'autre forme, la forme «factorisée» $-(a+b)$. Par exemple lorsqu'on doit développer $(-2x-3)(4-5x)$ on va écrire d'abord $(-2x-3)(4-5x) = -(2x+3)(4-5x)$ et ensuite, seulement, on va développer mais en gardant le signe – devant une grande parenthèse (ne pas oublier cette parenthèse!).

$-(2x+3)(4-5x) = -[8x+12-10x^2-15x] = -[-10x^2-7x+12] = 10x^2+7x-12$.

Tout est clair ? Il faut s'entraîner à effectuer des développements sans rien oublier, ni les signes, ni les coefficients, ni les parenthèses, ni les exposants... Cela demande une grande attention. Il faut procéder méthodiquement, dans un certain ordre (tout le monde n'emploie pas forcément le même ordre). On peut sauter quelques étapes lorsqu'on est suffisamment sûr de ne rien oublier. Il faut que cela reste compréhensible pour un relecteur (le professeur ou vous peut-être si vous pensez avoir fait une erreur et qu'il faut vérifier les calculs...). Les étapes qu'on peut sauter assez rapidement, car écrire des étapes supplémentaires augmente le risque de se tromper (et oui!) et fait perdre du temps :

- Lorsqu'on a des signes qui se neutralisent, n'écrire que le signe final. Écrire par exemple $2+7x$ plutôt que $2-7(-x)$. Cela ne veut pas dire qu'il faut sauter l'étape grandes parenthèses de l'exemple précédent. Écrire des étapes évite tout de même quelques erreurs (calcul mental).
- Lorsqu'on a un produit de nombres écrits en chiffres, n'écrire que le résultat final. Écrire par exemple $8x$ plutôt que $2x\times4$. Ne faire cela que si les nombres sont petits ou si on a le droit d'utiliser la calculatrice.
- Écrire tout de suite les nombres qui ont un exposant qu'il est facile de calculer. Écrire par exemple $6x^3$ plutôt que $3x^2\times2x$.

Ne pas sauter trop d'étapes, il faut que cela soit lisible, compréhensible. Vous n'écrivez pas seulement des calculs pour trouver un résultat. Vous écrivez parce que vous communiquez une démarche, vous effectuez une tâche complexe avec de la précision, du soin, de la concentration, tout ça.

Développons, réduisons et ordonnons l'expression $E = (2+x)(3-x)-(2x+3)(4-5x)$
$E = 6+3x-2x-x^2 -[8x+12-10x^2-15x] = 6+x-x^2 -[12-7x-10x^2] = 6+x-x^2-12+7x+10x^2 = -6+8x+9x^2$.

2) Résolutions de problèmes

Les problèmes qui font intervenir un nombre inconnu qu'il faut déterminer se résolvent en utilisant le schéma habituel pour ce genre de situation qui n'est pas une innovation (déjà rencontré au primaire) :

- on définit le nombre inconnu, en disant quelle lettre désigne quelle quantité.
- on traduit l'énoncé du problème par une égalité contenant le nombre inconnu : l'équation
- on résout l'équation posée à l'étape précédente, en utilisant les propriétés des égalités et celles des opérations (factorisation, développement, etc.) et une stratégie générale (voire plus loin)
- on conclue selon les données du problème, par une phrase

Exemple : ma grand-mère, ex-prof de maths me dit qu'aujourd'hui elle a le triple de l'âge de son ami mais que dans 10 ans il aura juste la moitié de l'âge qu'elle a aujourd'hui. Quel est l'âge de son ami ?
Désignons par la lettre x l'âge de son ami.

- Ce nombre x doit vérifier l'égalité $3x=2(x+10)$. Remarquons qu'à gauche et à droite du signe égal figure l'âge de ma grand-mère qui n'est pas demandé, même si c'est un nombre inconnu...
- Résolvons cette équation en développant $3x=2x+20$, puis en regroupant dans le membre de gauche les quantités qui contiennent le nombre inconnu $3x-2x=20$. Factorisons maintenant le membre de gauche $(3-2)x=x=20$.
- Concluons : l'ami de ma grand-mère a 20 ans aujourd'hui.
- On peut ajouter une étape de vérification [facultatif] : $3\times20=60$ et $2(20+10)=2\times30=60$ (ma grand-mère a 60 ans).

Quelles sont les propriétés des égalités utilisées ?
Lorsqu'on a une égalité qui est vraie, par exemple $a = b$, alors on peut écrire les égalités suivantes qui seront vraies aussi pour tous nombres relatifs a, b et c (sauf dans un cas particulier où $c\neq0$) :

i. $b = a$. On a le droit d'intervertir les 2 membres d'une égalité.
ii. $a+c = b+c$. On a le droit d'ajouter le même nombre aux 2 membres d'une égalité.
iii. $a\times c = b\times c$. On a le droit de multiplier par le même nombre les 2 membres d'une égalité.

Remarque : la 2ème propriété comprend également l'ajout d'un nombre négatif, on doit comprendre qu'il s'agit de somme algébrique. Pour ce qui est de la 3ème propriété, cela comprend également la multiplication par l'inverse, c'est-à-dire la division. Mais on ne peut pas diviser par 0, donc il faut reformuler la propriété pour ce cas : on a le droit de diviser par un même nombre non nul les 2 membres d'une égalité.

Vocabulaire des équations : une **équation** est une égalité dans laquelle figure un nombre (ou plusieurs) inconnu, noté avec une lettre. Le **degré** de l'équation est l'exposant maximum de l'inconnu. **Résoudre** une équation signifie trouver toutes les valeurs du nombre inconnu (ou des nombres inconnus s'il y en a plusieurs) qui vérifient l'égalité. On appelle ces valeurs les **solutions** de l'équation. Résoudre une équation consiste donc à déterminer ses solutions.

Exemple : $2x+1=0$ est une équation du 1er degré, d'inconnu x. La seule solution de cette équation est $-0,5$. Pour déterminer cette équation, on ne cherche pas au hasard, en essayant des valeurs successivement jusqu'à trouver la bonne. On enlève 1 des 2 membres (propriété ii) $2x=0-1=-1$, puis on divise par 2, le coefficient de x et on trouve $x=-1\div2=-0,5$.

La stratégie à utiliser (il y a des variantes possibles) :

(a) On développe si c'est nécessaire
(b) On utilise la propriété ii pour regrouper dans le membre de gauche les quantités qui contiennent le nombre inconnu (on «fait passer les x» à gauche et le reste à droite, en changeant les signes).
(c) On factorise et on réduit le membre de gauche (on met x en facteur) ; on calcule le membre de

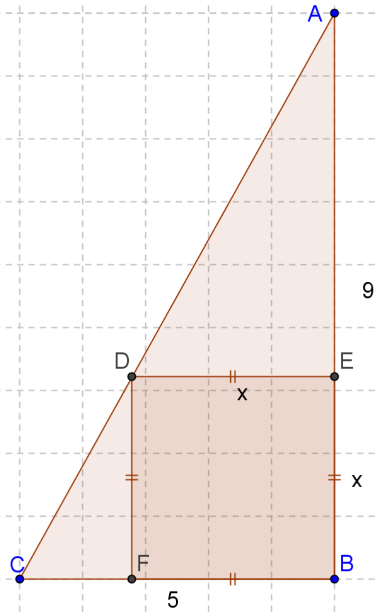
droite (ne contenant que des nombres connus)

(d) On utilise la propriété iii pour déterminer le nombre inconnu (on divise par le coefficient de x).

NB : L'étape de développement n'est nécessaire que si certains groupes de nombres sont factorisés, s'il y a des parenthèses. En fait, dans cette étape, on enlève les parenthèses qui sont présentes, pour n'avoir que des expressions simples.

Quelques exemples supplémentaires :

a) Exemple de problème simple : ma sœur Zoé a 42 € dans son porte-monnaie en pièces de 1 € et 2 €. Sachant qu'elle a 25 pièces en tout, combien a t-elle de pièces de chaque sorte ?
Appelons x le nombre de pièces de 1 €. Comme elle a 25 pièces en tout, le nombre de pièces de 2 € est $25-x$. Le total des pièces est donc $x+2(25-x)=42$. Résolvons cette équation :
Développons $x+50-2x=42$. Regroupons $x-2x=42-50$. Factorisons $x(1-2)=-x=-8$. Changeons le signe (multiplication par -1) $x = 8$. Zoé a donc 8 pièces de 1 € et $25-8=17$ pièces de 2 € dans son porte-monnaie. Remarquons qu'on trouve un nombre x entier et positif, ce qui est normal ici. Si on avait trouvé 8,5 ou -8 il aurait fallu conclure à l'impossibilité du problème (ou à une erreur d'énoncé)...



b) Exemple de problème en géométrie montrant principalement une difficulté pour l'étape (c) : on cherche à déterminer le côté d'un carré inscrit dans un triangle rectangle, comme le montre la figure.
Appelons x le côté de ce carré.
L'aire du triangle ABC peut être calculée de 2 façons différentes : directement elle vaut $5\times9\div2=45\div2=22{,}5$ et en décomposant ce triangle en 3 parties (2 triangles et un carré) : $x\frac{(9-x)}{2}+x\frac{(5-x)}{2}+x^2$, expression que l'on peut simplifier grandement en la factorisant de la manière suivante $x\frac{9-x+5-x}{2}+x^2=x\frac{14-2x}{2}+x^2=x(7-x)+x^2=x(7-x+x)=7x$. Il ne reste plus qu'à écrire l'équation que doit vérifier x : $7x = 22{,}5$. En divisant par 7 on trouve $x = 22{,}5\div7=\frac{45}{14}$. Conclusion : un carré inscrit dans un triangle rectangle de côtés 5 et 9 doit mesurer $\frac{45}{14}$ de côté. Ce n'est pas un nombre décimal, mais rien n'obligeait à trouver un nombre décimal ou entier ici. Sans l'équation, en traçant la figure (sur GeoGebra pour être très précis) et en mesurant, on n'aurait pu trouver qu'une valeur approchée de cette solution, même très précise ce n'est pas la solution...

c) Un problème du second degré qui s'avère finalement n'être que du 1er degré et montrant principalement une difficulté pour l'étape (a) : Deux nombres diffèrent de 7, leurs carrés diffèrent de 217. Quels sont ces nombres ?
Nommons x le plus petit des 2 nombres. L'autre sera égal à $x+7$. La différence des carrés valant 217 on doit avoir $(x+7)^2-x^2=217$. Si on développe le membre de gauche, on obtient $x^2+7x+7x+7^2-x^2=217$ ce qui se réduit à $14x+49=217$ et donc, en enlevant 49 on a $14x=217-49=168$. Il ne reste plus qu'à diviser par 14 pour trouver $x=168\div14=12$. Conclusion : les nombres cherchés sont 12 et 19. Notons qu'on trouve des entiers car la différence (217) est bien choisie ; en général on ne trouvera pas des entiers.

d) Un dernier problème montrant une difficulté causée par la présence de l'inconnu au dénominateur de l'équation : On a une fraction, disons $\frac{2}{5}$, à laquelle on ajoute au numérateur et au dénominateur le même nombre, notons le n (pour changer, et aussi parce que c'est un entier que l'on cherche). Le résultat étant le double de la fraction de départ, quel est ce nombre ?
Traduisons la situation par une égalité $\frac{2+n}{5+n}=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$. Comment se sortir d'affaire ici ? Le produit en croix, bien sûr, nous apporte la clef. On doit en effet avoir l'égalité suivante (dite des produits en croix) $(2+n)\times5=4\times(5+n)$ qui se résout comme on sait le faire : $10+5n=20+4n$ et en enlevant $10 + 4n$ on obtient $n=10$. Vérification $\frac{2+10}{5+10}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}=2\times\frac{2}{5}$