Classe de 4ème	Chapitre 8 : Traitement des données

Le programme extrait du Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008

Capacités : *Moyennes pondérées.*

Connaissances : Calculer la moyenne d'une série de données. Créer, modifier une feuille de calcul, insérer une formule. Créer un graphique à partir des données d'une feuille de calcul.

Commentaires : *Les élèves sont confrontés à des situations familières* où deux procédés de calcul différents de la moyenne sont mis en œuvre : somme des *n* données divisée par *n, moyenne pondérée des valeurs par leurs effectifs.* Les élèves doivent savoir calculer, pour de petits effectifs, une moyenne par la procédure de leur choix. Pour des effectifs plus grands, cette procédure est basée sur l'usage du tableur ou de la calculatrice.

Pour mémoire :

Programme du cours de 5ème pour le traitement des données

Capacités : Effectifs. **Fréquences.* Classes. *Tableau de données,* représentations graphiques de données.

Connaissances : Calculer des effectifs, ** Calculer des fréquences.* Regrouper des données en classes d'égale amplitude. Lire et interpréter des informations à partir d'un tableau ou d'une représentation graphique (diagrammes divers, histogramme). Présenter des données sous la forme d'un tableau, les représenter sous la forme d'un diagramme ou d'un histogramme (dans ce cas les classes sont toujours de même amplitude).

Commentaires : *Les élèves sont entraînés à lire, interpréter et* représenter des données en utilisant un vocabulaire adéquat dans des contextes qui leur sont familiers. Le calcul d'effectifs cumulés n'est pas un attendu. ** Les écritures 4/10, 2/5, 0,4 40 % sont utilisées pour désigner une fréquence : elles permettent d'insister sur les diverses représentations d'un même nombre. Le choix de la représentation est lié à la nature de la* situation étudiée. L'utilisation d'un tableur permet d'enrichir ce travail en le prolongeant à des situations plus complexes que celles qui peuvent être traitées « à la main ».

Programme du cours de 6ème pour le traitement des données

Capacités : Représentations usuelles : tableaux. Repérage sur un axe. Représentations usuelles : diagrammes en bâtons, **diagrammes circulaires ou demi-circulaire*s, graphiques cartésiens.

Connaissances : Lire, utiliser et interpréter des données à partir d'un tableau. Lire interpréter et compléter un tableau à double entrée.
** Organiser des données en choisissant un mode de présentation adapté : tableaux en deux ou plusieurs colonnes, tableaux à double entrée. Lire et compléter une graduation sur une demi-droite* graduée, à l'aide d'entiers naturels, de décimaux, de fractions simples 1/2, 1/10, 1/4, 1/5
** ou de quotients (placement exact ou approché).Lire, utiliser et interpréter des informations à partir* d'une représentation graphique simple.

Commentaires : Il s'agit d'un premier pas vers la capacité à recueillir des données et à les présenter sous forme de tableau. Ce travail doit être l'occasion de manier les instruments de tracé et de mesure. La capacité visée concerne l'aptitude à faire une interprétation globale et qualitative de la représentation étudiée (évolution d'une grandeur en fonction d'une autre). Dès la classe de 6e, l'utilisation de calculatrices et de logiciels permet de familiariser les élèves avec le passage d'un type d'organisation, d'un type de présentation à un autre.

1) Moyennes

Quel élève de 4ème ne sait pas déjà ce qu'est une moyenne et comment la calculer ? L'approche du conseil de classe est l'occasion du calcul de la moyenne trimestrielle pour chaque matière et de la moyenne globale (toutes matières confondues) et à chaque évaluation, le professeur donne la moyenne de la classe et l'élève peut évaluer l'écart de sa note par rapport à cette moyenne. Ces notions prennent ainsi, périodiquement, une grande importance dans le vécu subjectif de l'élève. Mais ce n'est pas pour cette raison, que toutes les finesses de ce concept central sont connues des élèves. Quel est le rôle et les effets des coefficients parfois attribués à certaines notes ? Comment modifier une moyenne avec une note supplémentaire (comment par exemple augmenter sa moyenne d'un point) ? Quel est l'effet d'un zéro dans une moyenne ? Autant de questions régulièrement évoquées comme si une part de mystère s'ajoutait à l'angoisse compréhensible de ces situations.

a) Moyenne simple

On effectue une moyenne simple lorsqu'on dispose de toutes les valeurs d'une grandeur (pas nécessairement une note). La formule est simple car il s'agit d'ajouter toutes les valeurs et de diviser ce total par le nombre de valeurs.

Exemple : Lors d'un séjour linguistique à Londres, j'ai dépensé 25€ le premier jour, 30€ le second jour et 95€ le dernier jour. Combien ai-je dépensé par jour ? Je calcule pour cela le total de mes dépense : 10+30+95=135. J'ai dépensé 135€ en 3 jours. Mes dépenses ont été, en moyenne, de 45€ par jour.

Une **formule littérale** pour la moyenne simple.

Admettons que l'on utilise la notation indicielle suivante : x_i est la $i^{\text{ème}}$ valeur de la grandeur étudiée. L'indice i est un entier qui va de 1 à n, le nombre de valeurs. Avec ces notations, nos n valeurs se notent donc $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n$. La moyenne de ces n valeurs est notée, quant-à elle, $\bar{x}$. Cette moyenne sera donc calculée grâce à la formule $\bar{x}=(x_1+x_2+x_3+x_4+\ \ldots+x_n)\div n$ ou mieux, avec la notation fractionnaire $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots+x_n}{n}$. Une autre notation, plus concise mais aussi plus délicate à manier (surtout au début) est celle qui utilise le symbole $\sum$ qui se lit *sigma* (la lettre 's' en grec) et qui veut dire 'somme'. On note les valeurs de début et de fin pour l'indice i de la façon suivante : $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n$.

Ainsi on a, pour finir, la notation suivante pour le calcul de la moyenne : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Une **tableau** pour le calcul de la moyenne simple.

	A	B	C
1	i	NOM	X_i
2	1	André	14
3	2	Bernard	16
4	3	Christine	12
5	4	Dorothée	10
6	5	Elsa	18
7	6	France	15
8	7	Garance	19
9	8	Hélène	17
10	9	Inès	9
11	10	Jules	5
12	11	Killian	12
13	12	Laurent	17
14	13	Mohamed	16
15	14	Nelly	11
16	15	Origène	20
17	16	Philippe	13
18		Moyenne $\bar{x}$ =	**14**

Ce tableau comporte 2 lignes (ou 2 colonnes), une pour les valeurs de la variable x_i et une autre pour l'indice i. Lorsqu'il y a peu de valeurs (lorsque n est petit), on peut se passer de la ligne correspondant à l'indice. Parfois, on écrira des libellés à la place de l'indice, ou dans une 3^{ème} ligne.

Par exemple, les notes du trimestre en maths sont données par le tableau ci-contre où les éléments sont répartis en colonnes. Nous n'avons pas fait figurer la formule qui permet de calculer la moyenne de cette série de notes. Celle-ci est cachée dans la définition du contenu de la cellule[1] C18. On y a écrit :

=MOYENNE(C2:C17).

X_i	cumuls
14	14
16	30
12	42
10	52
18	70
15	85
19	104
17	121
9	130
5	135
12	147
17	164
16	180
11	191
20	211
13	224
14	**14**

En réalité, le calcul peut être décomposé en cumulant les notes et en divisant le total (224) de toutes les notes cumulées par le nombre de notes (16). Ainsi $\bar{x} = \frac{14+16+12+10+18+15+19+17+9+5+12+17+16+11+20+13}{16} \frac{224}{16} = 14$. La moyenne en maths ce trimestre est de 14.

N'ayons par peur d'affronter tout de suite, à ce stade, un tableau contenant les différentes moyennes obtenues par les élèves dans 4 matières différentes. Nous pouvons y lire 3 sortes de moyennes :

i	NOM	X_i	Y_i	Z_i	T_i	Moyennes
1	André	14	12	18	11	**13,75**
2	Bernard	16	13	17	12	**14,5**
3	Christine	12	12	12	12	**12**
4	Dorothée	10	12	9	9	**10**
5	Elsa	18	19	17	16	**17,5**
6	France	15	14	18	10	**14,25**
7	Garance	19	15	19	13	**16,5**
8	Hélène	17	18	16	14	**16,25**
9	Inès	9	12	11	10	**10,5**
10	Jules	5	7	12	3	**6,75**
11	Killian	12	17	16	15	**15**
12	Laurent	17	10	ABS	14	**13,67**
13	Mohamed	16	12	15	13	**14**
14	Nelly	11	13	15	10	**12,25**
15	Origène	20	11	17	18	**16,5**
16	Philippe	13	15	14	16	**14,5**
	Moyennes =	**14**	**13,25**	**15,07**	**12,25**	**13,64**

- Les moyennes par matière : $\bar{x}=14$ pour la moyenne des notes notées x_i (disons pour les maths), $\bar{y}=13{,}25$ pour la moyenne des notes notées y_i (disons pour la SVT), $\bar{z}=15{,}07$ pour la moyenne

1 Le vocabulaire courant pour les tableurs est supposé connu des élèves qui l'ont étudié en cours de technologie. Néanmoins, rappelons que la cellule est une case de la feuille d'un classeur (les documents que l'on manipule avec un tableur du genre 'scalc', le tableur de OpenOffice) et qu'elle est repérée par une lettre indiquant la colonne et un chiffre indiquant la ligne.

des notes notées z_i (disons pour la physique/chimie) et $\bar{t}=12{,}25$ pour la moyenne des notes notées t_i (disons pour la technologie). Ces moyennes ont été calculées comme on l'a indiqué précédemment, en divisant le total des notes d'une matière par le nombre de notes. Les formules sont $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$, $\bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}$ et $\bar{t}=\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$.

- Les moyennes par élèves : André a une moyenne de 13,75. La meilleure moyenne est celle de Garance (16,5) et la plus faible est celle de Jules (6,75). Si l'on veut calculer ces moyennes à la main, il faut additionner les 4 notes et les diviser par 4. Ainsi la moyenne de Garance est obtenue par le calcul $\bar{G}=\frac{x_7+y_7+z_7+t_7}{4}=\frac{19+15+19+13}{4}=\frac{66}{4}=16{,}5$ tandis que celle de Jules a été obtenue par le calcul $\bar{J}=\frac{x_{10}+y_{10}+z_{10}+t_{10}}{4}=\frac{5+7+12+3}{4}=\frac{27}{4}=6{,}75$.
- La moyenne des moyennes, notons la $\bar{Q}$ =13,64. Celle-ci peut être calculée de 2 façons différentes : en faisant la moyenne des moyennes par matières $\bar{Q}=\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+\bar{t}}{4}=\frac{14+13{,}25+15{,}07+12{,}25}{4}=\frac{54{,}57}{4}=13{,}6425$ ou bien en faisant la moyenne des moyennes par élèves $\bar{Q}=\frac{\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+...+\bar{P}}{16}=\frac{13{,}75+14{,}5+12+...+14{,}5}{16}=\frac{217{,}92}{16}=13{,}62$.

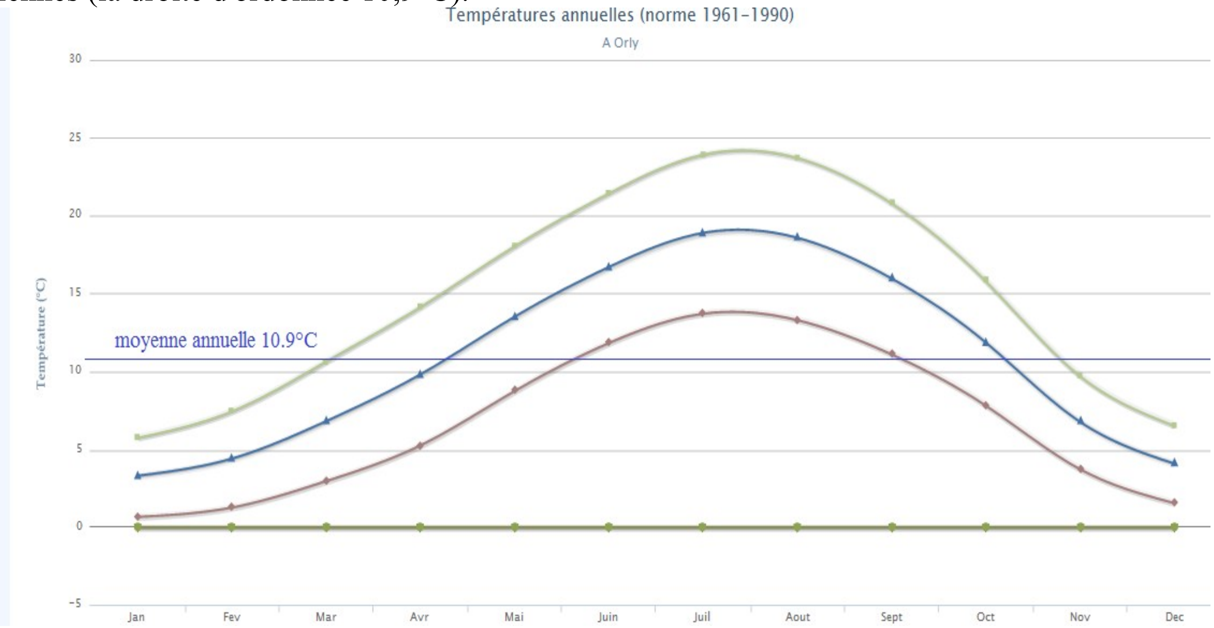
On remarque dans la liste des notes, une absence de note pour Laurent dans la matière Z (la physique/chimie). Cette absence n'a pas été comptabilisée dans les notes pour faire la moyenne $\bar{z}$. La formule donnée plus haut a été légèrement adaptée pour tenir compte de cette absence, on a divisé le total par 15, et non par 16 (ce qui aurait pour effet de comptabiliser l'absence comme un 0). $\bar{z}=\frac{226}{15}=15{,}0666...\approx 15{,}07$. Si l'on avait compté l'absence comme un 0 cela aurait baissé la moyenne de près de 1 point (15,07−14,125=0,945) car alors $\bar{z}=\frac{226}{16}=14{,}125$. Cette absence n'a pas non plus été comptabilisée dans la moyenne de Laurent $\bar{L}$. La formule a, là aussi, été adaptée pour tenir compte de cette absence, on a divisé le total par 3, et non par 4. $\bar{L}=\frac{17+10+14}{3}=\frac{41}{3}=13{,}666...\approx 13{,}67$. Si l'on avait compté l'absence comme un 0 cela aurait baissé la moyenne de près de 3,5 points (16,67−10,25=3,42) car alors $\bar{L}=\frac{41}{4}=10{,}25$. Pour ce qui est de la moyenne des moyennes $\bar{Q}$, celle-ci est affectée par l'absence de Laurent, car on ne trouve plus le même résultat si l'on effectue la moyenne des moyennes par matières $\bar{Q}=13{,}6425$ ou si l'on effectue la moyenne des moyennes par élèves $\bar{Q}=13{,}62$. La différence est minime ici, mais elle existe et elle pourrait être amplifiée davantage si les résultats de Laurent avaient été davantage éloignés de la moyenne (par exemple, étaient supérieurs) tandis que les notes de la matière Z avaient été éloignées dans le sens contraire (étaient inférieurs).

i	NOM	X_i	Y_i	Z_i	T_i	Moyennes	Moyennes
1	André	14	12	18	11	**13,75**	**13,75**
2	Bernard	16	13	17	12	**14,5**	**14,5**
3	Christine	12	12	12	12	**12**	**12**
4	Dorothée	10	12	9	9	**10**	**10**
5	Elsa	18	19	17	16	**17,5**	**17,5**
6	France	15	14	18	10	**14,25**	**14,25**
7	Garance	19	15	19	13	**16,5**	**16,5**
8	Hélène	17	18	16	14	**16,25**	**16,25**
9	Inès	9	12	11	10	**10,5**	**10,5**
10	Jules	5	7	12	3	**6,75**	**6,75**
11	Killian	12	17	16	15	**15**	**15**
12	Laurent	17	10	ABS	14	**13,67**	**10,25**
13	Mohamed	16	12	15	13	**14**	**14**
14	Nelly	11	13	15	10	**12,25**	**12,25**
15	Origène	20	11	17	18	**16,5**	**16,5**
16	Philippe	13	15	14	16	**14,5**	**14,5**
	Moyennes =	**14**	**13,25**	**15,07**	**12,25**	**13,6198**	**13,4063**
	Moyennes =	**14**	**13,25**	**14,13**	**12,25**	**13,6417**	**13,4063**

On voit dans le tableau ci-dessus, les 2 sortes de moyennes que l'on peut calculer, dans les 2 options (absence non comptabilisée, ou absence comptée comme 0). Dans la dernière option, l'absence étant comptée comme une note, la moyenne des moyennes est identique pour les 2 sortes de moyennes (colonne de droite, moyenne égale à 13,4063) alors que pour la 1ère option, cette moyenne des moyennes est légèrement plus élevée quand on fait la moyenne par matières (car la moyenne de la matière Z est plus élevée que la moyenne des matières) plutôt que par élèves (car la moyenne de Laurent est plus basse, proche de la moyenne de la classe).

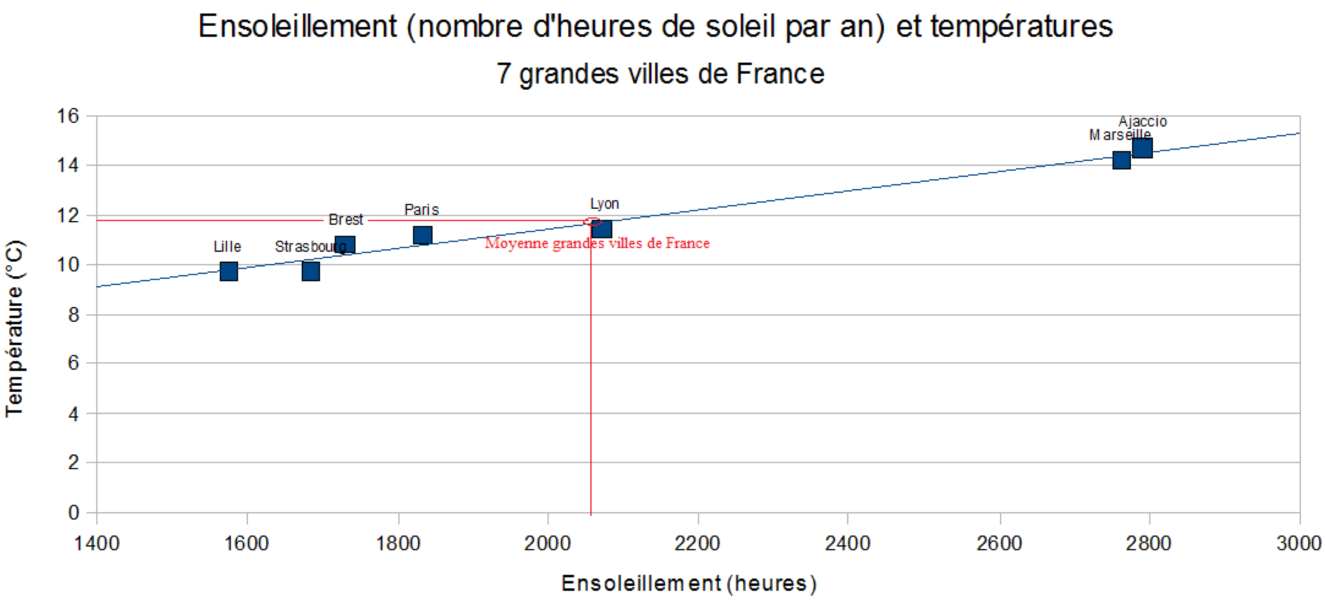
<u>Représentation graphique de la répartition des données</u>
La moyenne peut apparaître dans un graphique de différentes façons.
Si les indices et les valeurs sont réparties selon un système d'axes gradués : par exemple i est disposé en abscisse et x_i est disposé en ordonnée. La moyenne peut être matérialisée par une droite horizontale autour de laquelle fluctuent (varient) les données.

Exemple de la température à Orly selon les heures de la journée, valeurs moyennes sur la période 1961-1990 (source : info climat Europe). Sur ce graphique, 3 courbes représentent les températures moyennes quotidiennes (minimas, moyenne et maxima). Ce sont des moyennes sur la période de 30 ans considérée. La température moyenne quotidienne représente une autre sorte de moyenne : la moyenne des températures pendant la journée. Nous avons ajouté une 3ème moyenne : la moyenne annuelle des températures moyennes quotidiennes (la droite d'ordonnée 10,9°C).



Un autre exemple, toujours dans le domaine de la météorologie : la durée d'ensoleillement et la température moyenne dans 7 grandes villes de France. Ces 2 grandeurs sont reliées et il est intéressant de les observer conjointement pour mesurer leur relation. La moyenne pour ces villes est approximativement représentée par la ville de Lyon.

	Ajaccio	Lyon	Marseille	Brest	Lille	Paris	Strasbourg	moyenne
Ensoleillement	2790	2072	2763	1729	1574	1833	1685	2064
Température	14,7	11,4	14,2	10,8	9,7	11,2	9,7	11,7



b) Moyenne pondérée

On effectue une moyenne pondérée lorsqu'on attribue un « poids » aux différentes valeurs observées. Une valeur aura un poids d'autant plus important qu'elle va compter dans le calcul de la moyenne. La formule pour calculer la moyenne va donc tenir compte de ces poids, en plus des valeurs elles-mêmes.

Exemple introductifs : Supposons que nous voulions calculer la moyenne des âges des élèves d'une classe. Nous disposons pour cela de la liste des âges des élèves. Bien sûr, il est possible dans ce cas, d'effectuer directement un calcul de moyenne simple, comme nous l'avons décrit dans la partie a). Mais, comme il y a peu de valeurs différentes (seulement 11, 12, 13 et 14), nous pouvons regrouper celles-ci dans un tableau où, pour chaque valeur des A_i, on indique l'effectif n_i, c'est-à-dire le nombre d'individus qui possèdent la caractéristique A_i. Pour le calcul de la moyenne, on va calculer le total des âges en multipliant chaque valeur A_i par son « poids », c'est-à-dire son effectif. La formule utilisée ici peut se résumer à cette opération : $\overline{A}=\frac{1\times 11+5\times 12+9\times 13+1\times 14}{1+5+9+1}=\frac{202}{16}=12{,}63$

Cette façon de calculer une moyenne « pondérée » peut être notée $\overline{A}=\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$, l'écriture de cette formule est simplifiée généralement, car la présence des valeurs de début et de fin pour l'indice n'apporte pas grand chose ici et donc, on peut noter $\overline{A}=\frac{\sum n_i A_i}{\sum n_i}$.

i	NOM	A_i
1	André	13
2	Bernard	13
3	Christine	12
4	Dorothée	13
5	Elsa	12
6	France	13
7	Garance	11
8	Hélène	13
9	Inès	13
10	Jules	12
11	Killian	12
12	Laurent	14
13	Mohamed	13
14	Nelly	13
15	Origène	13
16	Philippe	12
	$\overline{A}$ =	12,63

Ages A_i	Effectifs n_i	Sommes $A_i n_i$
10	0	0
11	1	11
12	5	60
13	9	117
14	1	14
15	0	0
Total	16	202
	Moyenne $\overline{A}$ =	12,63

Remarque : les « poids » ou coefficients de la pondération peuvent être des effectifs ou des fréquences (rapports des effectifs d'une valeur sur l'effectif total). On affectera la fréquence f_i à la place de l'effectif n_i, mais il n'y a alors plus à diviser par l'effectif total car

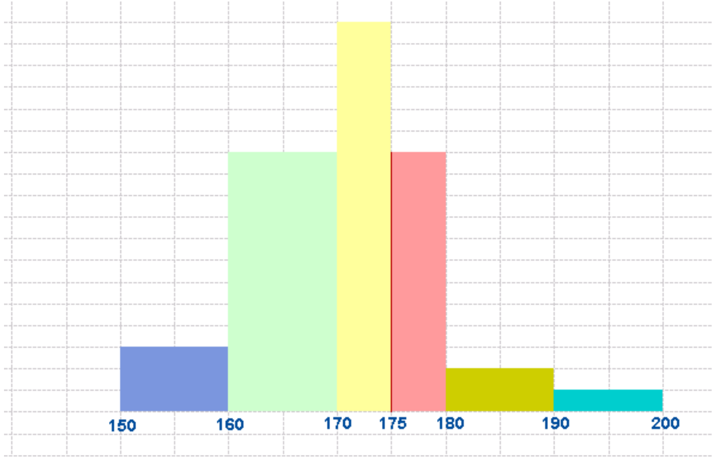
$$\overline{A}=\frac{\sum n_i A_i}{\sum n_i}=\frac{n_1 A_1+n_2 A_2+\ldots+n_n A_n}{n}=\frac{n_1 A_1}{n}+\frac{n_2 A_2}{n}+\ldots+\frac{n_n A_n}{n}=f_1 A_1+f_2 A_2+\ldots+f_n A_n=\sum f_i A_i$$

Exemple : 40% des élèves de la classe sont enfant unique (donc ont 0 frère ou sœur), 33% des élèves ont 1 frère ou 1 sœur, 20% ont deux frères ou sœurs, le restant des élèves ont 3 frères ou sœurs. Combien y a t-il de frères ou sœurs en moyenne ? Réponse : 0,94 en moyenne. Il suffit de calculer $\overline{x}=0{,}33\times 1+0{,}2\times 2+(1-(0{,}4+0{,}33+0{,}2))\times 3=0{,}33+0{,}4+0{,}21=0{,}94$. On peut aussi utiliser un tableau

Fréquence f_i	nombre de frères ou sœurs x_i	$f_i x_i$
0,4	0	0,00
0,33	1	0,33
0,2	2	0,40
0,07	3	0,21
	Moyenne $\overline{x}$	0,94

Valeurs regroupées en classes

Les séries statistiques sont parfois regroupées en classe pour synthétiser les données. Dans ces cas, il y a un effectif associé à chaque classe (ou une fréquence) et les moyennes sont alors calculées en prenant pour chaque classe la valeur centrale ou « centre de la classe » qui n'est autre que la moyenne des extrémités de l'intervalle formé par les valeurs possibles dans l'intervalle.



Exemple : On a interrogé les élèves d'une classe sur leur taille. Les résultats sont regroupés dans 6 classes et sont donnés par l'histogramme ci-contre à partir duquel une simple lecture graphique permet de retrouver le tableau des effectifs qui indique également les intervalles des tailles pour chaque classe. Les centres de classe sont calculés en effectuant juste la moyenne entre les bornes de ces intervalles (par exemple, 155 cm correspond à la moyenne entre 150 cm et 160 cm qui sont les bornes ou extrémités de l'intervalle[2] [150-160[). La moyenne des tailles de la classe est alors calculée avec la formule des moyennes pondérées : $\overline{x}=\frac{\sum n_i x_i}{n}=\frac{465+1980+...+195}{33}=\frac{5627{,}5}{33}=170{,}53$

Tailles (en cm)	[150-160[	[160-170[	[170-175[	[175-180[	[180-190[	[190-200[	Totaux
Effectifs n_i	3	12	9	6	2	1	33
Centres de classe x_i	155	165	172,5	177,5	185	195	-
Sommes $x_i n_i$	465	1980	1552,5	1065	370	195	5627,5
Moyenne	-	-	-	-	-	-	170,53

Coefficients de pondération

Dans certains cas, les différentes valeurs sont associées à des coefficients qui ont pour fonction de rendre plus importants les « poids » de certaines valeurs relativement à d'autres valeurs de moindre importance. Ainsi, à l'examen du BAC, en série S, jusqu'en 2012, les coefficients de pondération sont donnés par le tableau ci-dessous sauf pour les épreuves anticipées de français (passées en 1ère de coefficient 2 pour l'écrit et 2 pour l'oral) et les épreuves facultatives :

Liste des épreuves	**Coefficients**	**Nature de l'épreuve**	**Durée**
3. Mathématiques	7 ou 9	écrite	4 heures
4. Physique-chimie	6 ou 8	écrite et pratique	3 heures 30 et 1 heure
5. Sciences de la vie et de la Terre	6 ou 8	écrite et pratique	3 heures 30 et 1 heure
6. Histoire-géographie	3	écrite	4 heures
7. LV 1 étrangère	3	écrite	3 heures
8. LV 2 étrangère ou régionale	2	écrite	2 heures
9. Philosophie	3	écrite	4 heures
10. Éducation physique et sportive	2	CCF (contrôle continu)	

Un candidat ayant choisi les mathématiques comme spécialité aura un coefficient de 9 pour l'épreuve de mathématiques, 6 pour la physique-chimie, 6 pour la SVT, etc.

La moyenne d'un candidat s'effectuera selon la formule des moyennes pondérées, exactement comme si il s'agissait d'un effectif de 9 notes de maths, 6 notes de physique-chimie, etc. chaque note ayant alors le même coefficient (moyenne simple). Voici, par exemple, les notes de Simon qui a passé le Bac S spécialité maths en 2011 :

2 Les crochets dans [150-160[indiquent que 150 est contenu dans l'intervalle alors que 160 ne l'est pas. Une taille qui serait contenue dans cet intervalle vérifierait l'encadrement 150≤taille<160. Si on veut inclure 160 dans l'intervalle, il faut noter [150-160], mais ce genre d'intervalle ne convient pas aux classes statistiques car dans les classes consécutives [150-160] et [160-170], la valeur 160 serait contenu 2 fois, ce qui ne se peut pas dans une répartition.

Liste des épreuves	Coeff. n_i	Note x_i	$x_i n_i$
1. Français écrit	2	15	30
2. Français oral	2	12	24
3. Mathématiques	9	17	153
4. Physique-chimie	6	14	84
5. Sciences de la vie et de la Terre	6	13	78
6. Histoire-géographie	3	11	33
7. LV 1 étrangère	3	15	45
8. LV 2 étrangère ou régionale	2	12	24
9. Philosophie	3	15	45
10. Éducation physique et sportive	2	17	34
Totaux, moyenne	38	14,47	550

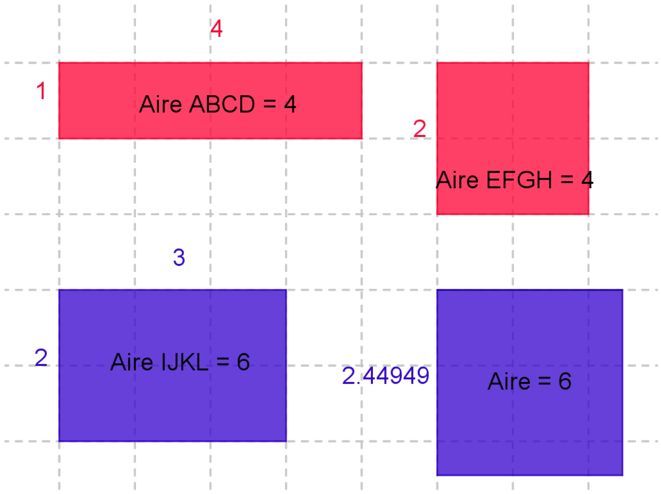
La moyenne de Simon est calculée comme s'il avait 38 notes (la somme de tous les coefficients) selon la formule de la moyenne pondérée : $\overline{x}=\frac{\sum n_i x_i}{n}=\frac{30+24+...+34}{38}=\frac{550}{38}=14{,}47$

2) Autres moyennes

Dans certaines situations, on peut penser à calculer une moyenne comme on vient de le faire (moyenne arithmétique) alors qu'il s'agit d'un autre type de moyenne.

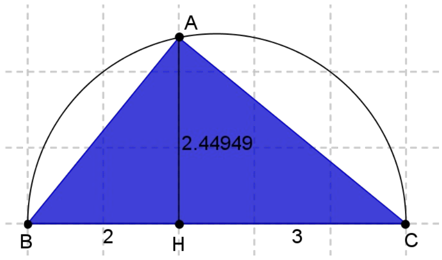
a) Moyenne géométrique

Si on a un rectangle de longueur *a* et de largeur *b*, l'aire du rectangle est obtenu par la formule $a\times b$. Un carré qui aurait même aire que ce rectangle, aurait pour côté $\sqrt{a\times b}$. Il s'agit d'une forme de moyenne, appelée moyenne géométrique de *a* et *b*.



Le carré de côté 2 a la même aire que le rectangle de côtés 1 et 4, car 2 est la moyenne géométrique de 1 et 4 : $\sqrt{1\times 4}=\sqrt{4}=2$.
Le carré de côté $\sqrt{6}\approx 2{,}44949$ a la même aire que le rectangle de côtés 2 et 3, car $\sqrt{6}$ est la moyenne géométrique de 2 et 3 : $\sqrt{2\times 3}=\sqrt{6}$.

Un autre moyen de construire géométriquement la moyenne géométrique de 2 nombres *a* et *b* est indiqué sur la figure ci-dessous où la hauteur du triangle AH est égale à la moyenne géométrique $\sqrt{a\times b}$ de *a*=BH par *b*=CH. Avec *a*=2 et *b*=3, on retrouve la moyenne géométrique de 2 et 3 qui vaut $\sqrt{2\times 3}=\sqrt{6}\approx 2{,}44949$. Pour construire A, il suffit de tracer le segment [BC] de longueur *a*+*b* contenant le point H tel que BH=*a* et CH=*b*, puis le demi-cercle de diamètre [BC] et la perpendiculaire à [BC] passant par H. A est l'intersection du demi-cercle et de cette perpendiculaire. La justification de cette construction repose sur les angles des triangles ABH et CAH qui sont égaux. Plus particulièrement, $\widehat{ABH}=\widehat{CAH}$ et $\widehat{BAH}=\widehat{ACH}$. Dans ces conditions $\tan\widehat{ABH}=\frac{AH}{BH}=\frac{CH}{AH}$ et les produits en croix donnent l'égalité cherchée $AH\times AH=BH\times CH$ d'où $AH=\sqrt{BH\times CH}$.



La moyenne géométrique intervient dans une « suite géométrique », c'est-à-dire une suite de nombres construits à partir d'un premier nombre en multipliant à chaque fois par un même coefficient (appelé la raison de la suite). Par exemple, la suite de nombres 1, 3, 9, 27, 81, 972, etc. est une suite géométrique commençant par 1 dont la raison est 3. Dans toute suite géométrique, un nombre quelconque est la moyenne géométrique des nombres qui l'encadrent. Dans notre exemple, 3 est la moyenne géométrique de 1 et 9 (car $3=\sqrt{1\times 9}$), de même 9 est la moyenne géométrique de 3 et 27 (car $\sqrt{3\times 27}=\sqrt{81}=9$).

b) Moyenne harmonique

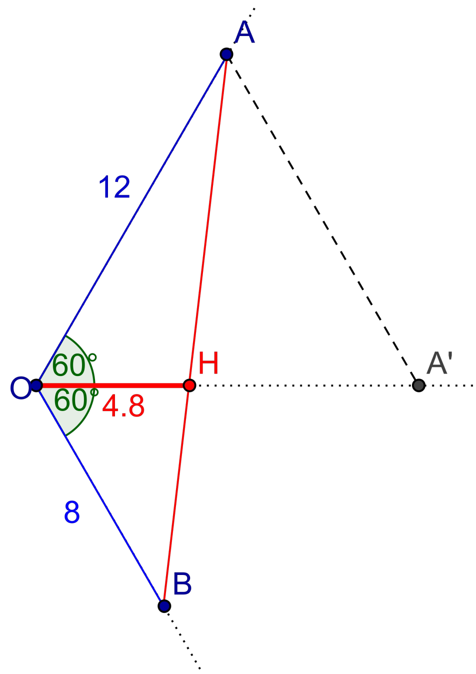
Si, lors d'un trajet, vous roulez à 120 km/h pendant 1h, vous parcourez 120 km. Si vous roulez ensuite à 80 km/h pendant 1h, vous parcourez 80 km. En tout, vous avez roulé pendant 2 h et parcouru 200 km. Votre vitesse moyenne sur ce trajet a été de 100 km/h. C'est la moyenne arithmétique de 120 et 80.

Si, lors du même trajet, vous roulez à 120 km/h sur 100 km, ce parcours dure 100÷120 h, soit 50 minutes. Si vous roulez ensuite à 80 km/h sur les 100 km restants, cette fin du trajet parcours dure 100÷80 h, soit 1,25 h ou encore 75 minutes. En tout, vous avez roulé pendant 125 minutes, soit $\frac{125}{60}=\frac{25}{12}$ h et parcouru 200 km. Votre vitesse moyenne sur ce trajet a été de $200\div\frac{25}{12}=\frac{200\times 12}{25}=8\times 12=96$ km/h. C'est la moyenne harmonique de 120 et 80.

Faisons 1 km à v_1 km/h et 1 km à v_2 km/h. Nous mettons des temps en heures respectivement égaux à $\frac{1}{v_1}$ pour le premier et $\frac{1}{v_2}$ pour le second, soit un temps total égal à $\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}$ pour 2 km. En divisant par 2, nous avons une durée moyenne au kilomètre : c'est l'inverse de la vitesse moyenne v. Ainsi l'inverse de la vitesse moyenne v est la moyenne (arithmétique) des inverses de v_1 et v_2 si v est la moyenne harmonique de v_1 et v_2. On a donc :

$\frac{1}{v}=\frac{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}{2}$, cette formule se transforme pour obtenir directement $v=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$.

Ainsi, avec $v_1=120$ et $v_2=80$, on trouve $v=\frac{2\times 120\times 80}{120+80}=\frac{19200}{200}=\frac{192}{2}=96$.

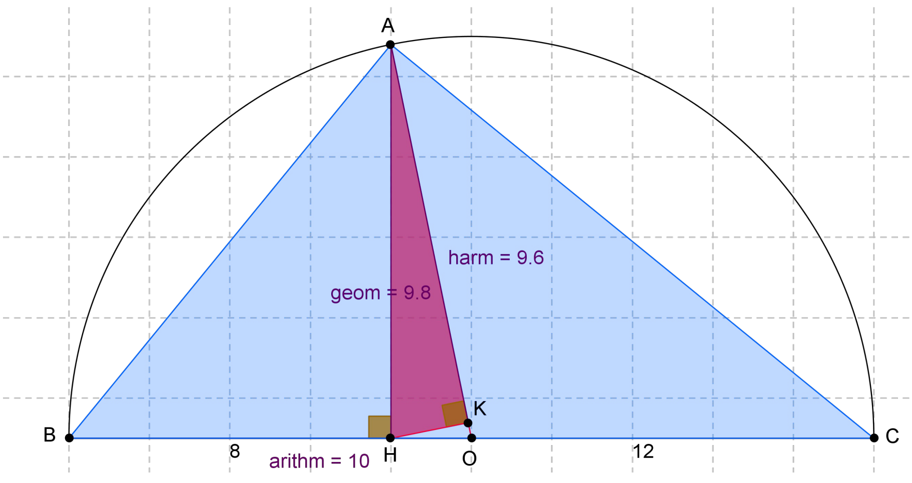


Un moyen de construire géométriquement la moyenne harmonique de 2 nombres a et b est indiqué sur la figure ci-contre où [OA), [OB) et [OH) sont des demi-droites de même origine formant 2 angles adjacents de 60°. On place A sur [OA) de manière à avoir OA=a et on place B sur [OB) de manière à avoir OB=b. Le segment [AB] coupe la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ en H tel que OH est la moitié de la moyenne harmonique de a et b. Sur notre figure, on voit que la moyenne harmonique de 8 et 12 est le double de 4,8 c'est-à-dire 9,6.

Pour justifier cette construction, construisons A' sur [OH) tel que (AA')//(OB). Dans ces conditions, on peut appliquer le théorème de Thalès et on a :

$\frac{AH}{HB}=\frac{HA'}{HO}=\frac{AA'}{OB}=\frac{a}{b}$.

On en déduit que $\frac{HA'}{HO}=\frac{a-HO}{HO}=\frac{a}{HO}-1=\frac{a}{b}$ et donc, en divisant par a, on obtient $\frac{1}{HO}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$, soit $\frac{1}{HO}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.



Une dernière construction géométrique (attribuée à Archimède) donnant les 3 moyennes étudiées jusqu'ici :

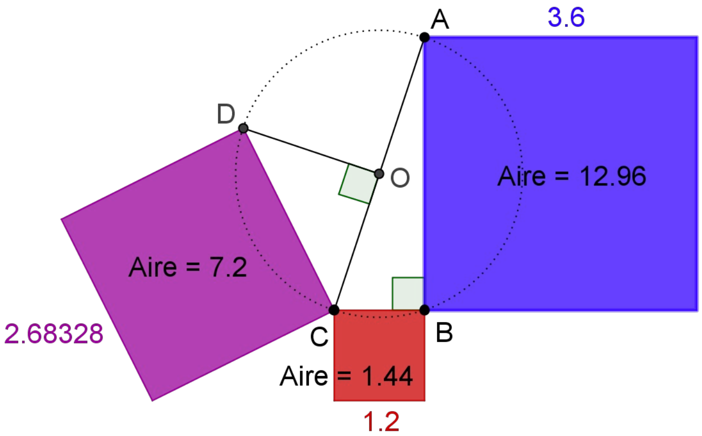
On a déjà vu cette construction qui donne la moyenne géométrique AH des nombres BH et CH, la moyenne arithmétique étant BO=AO=CO. Le pied de la hauteur issue de H dans le triangle AOH est un un point K tel que KA est la moyenne harmonique de BH et CH. Avec 8 et 12, on trouve une moyenne géométrique de $\sqrt{8\times 12}=\sqrt{96}\approx 8{,}797958971$ et on retrouve la moyenne harmonique égale à 9,6.

La moyenne harmonique intervient dans une « suite harmonique », c'est-à-dire une suite de nombres construits à partir des inverses des nombres composant une suite arithmétique. Par exemple, la suite des inverses des entiers $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, etc.$, est une suite harmonique construite à partir de la suite arithmétique des entiers. Dans toute suite harmonique, un nombre quelconque est la moyenne harmonique des nombres qui l'encadrent. Dans notre exemple, $\frac{1}{3}$ est la moyenne géométrique de $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ (car $\frac{2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$), de même $\frac{1}{4}$ est la moyenne géométrique de $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ (car $\frac{2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{15}}=\frac{2}{15}\times\frac{15}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$).

c) Moyenne quadratique

Ce sera la dernière moyenne étudiée ici, mais il faut savoir qu'on peut en définir d'autres en prenant une fonction f croissante : la f-moyenne de a et b est un nombre m tel que $2f(m)=f(a)+f(b)$. La moyenne quadratique correspond au cas où la fonction f est la fonction carrée. Ainsi m est la moyenne quadratique de a et b si $2m^2=a^2+b^2$, c'est-à-dire si $m^2=\frac{a^2+b^2}{2}$, ou encore, a étant positif, $m=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

D'après cette définition, m est le côté d'un carré dont l'aire est la moyenne arithmétique des aires de 2 carrés de côtés a et b.



Cela permet de caractériser l'hypoténuse c d'un triangle rectangle de cathètes a et b. D'après le théorème de Pythagore $c^2=a^2+b^2$ et donc $c^2=2\times\frac{a^2+b^2}{2}=2\times m^2$, d'où finalement $c=\sqrt{2}\times m$. c est la diagonale d'un carré de côté m, moyenne quadratique de a et b. Sur la figure ci-contre, à partir d'un triangle ABC rectangle en B, nous avons tracé un tel carré (en violet) : sa diagonale est égale à AC. Il est donc inscrit dans un cercle de diamètre [AC], le point D est sur ce cercle et sur la médiatrice de [AC]. Nous avons construit le carré violet du côté de [DC] où il n'y a pas le milieu O de [AC] pour ne pas que nos carrés se chevauchent. L'aire du carré violet DC² est la moyenne des aires des 2 autres carrés (12,96+1,44=2×7,2).

Une propriété générale sur les 4 moyennes définies ici : elles sont toujours dans un même ordre. La moyenne quadratique q est toujours la plus grande, la moyenne harmonique h est toujours la plus petite. Entre la géométrique g et l'arithmétique a, c'est toujours l'arithmétique qui est la plus grande. Ainsi, nous avons pour tout couple de nombres $(x ; y)$ leurs moyennes qui sont rangées dans cet ordre :

$$h<g<a<q$$

Nous avons illustré cela par une figure qui contient les 4 moyennes de AB et BC et les 6 carrés construits sur ces 6 nombres. Les moyennes 'centrales' g et a sont représentées par des carrés qui suivent le quadrillage alors que les moyennes 'extrêmes' h et q sont représentées par des carrés obliques qui ne le suivent pas. Ces constructions se déduisent naturellement des deux décrites plus haut.