$4^{ème}$

Chapitre 7 : Calcul littéral

1) Propriétés algébriques (rappels)

a) Règles et simplifications d'écritures

On l'a vu au chapitre 4 (*Équations*), partie 1 (*Expressions littérales*) sous-partie c (*Conventions d'écriture*) :

- On n'écrit pas $a\times 1$ ou $1\times a$ ou $a+0$ ou $0+a$ mais simplement a.
- On n'écrit pas $a\times 0$ ou $0\times a$ ou $0\div a$ mais simplement 0.
- On n'écrit pas $a\times(-1)$ ou $(-1)\times a$ ou $a\div(-1)$ mais simplement $-a$.
- On n'écrit jamais $a\div 0$ car ce nombre n'existe pas (c'est l'infini si $a\neq 0$).
- Les parenthèses autour d'un nombre relatif sont inutiles :
$$(+3)-(-1) = 3+1 \text{ et, de même, } (-2)\times(3+\pi) = -2\times(3+\pi)$$
- L'addition et la multiplication étant *associatives*, on peut enlever certaines parenthèses :
$$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c=a\times b\times c=abc \text{ et, de même, } a+(b+c)+(d-b)= a+b+c+d-b$$
- Si il y a un nombre écrit avec des chiffres dans un produit, les chiffres sont placés devant :
$$2a\times 3b=2\times 3\times a\times b=6ab \text{ et, de même, } 4r^2\times 2\pi\, r=4\times 2\times\pi\times r^2\times r=8\pi r^3$$
- Un signe − devant une somme algébrique change tous les signes de cette somme :
$$-(5a-2b+3c) = -5a+2b-3c \text{ et, de même, } 5x^2-1-(2x^2-3)=5x^2-1-2x^2+3= 3x^2+2$$
- Le trait de fraction clarifie et simplifie les écritures comportant des divisions et des parenthèses :
$$(2x-3y)\div(1-4\times(x-y))= \frac{2x-3y}{1-4(x-y)} \text{ et, de même, } -1+2a\div(2b-4c\div 3d)= -1+\frac{2a}{2b-\frac{4c}{3d}}$$
- Le symbole multiplicatif × n'est pas écrit lorsqu'il est devant une parenthèse ouvrante ou lorsqu'il est devant un nombre écrit au moyen d'une lettre :
$$3\times(x+1)=3(x+1) \text{ et, de même, } 5\times x\times y=5xy$$
- Les règles de priorité opératoire rendent inutiles certaines parenthèses :
$$a+(b\times c)=a+b\times c=a+bc \text{ et, de même, } (a\div b)-(c\times d)= a\div b-c\times d=ab-cd$$

Remarques :
Les règles de simplification des écritures ne sont pas une obligation absolue.
On *peut* écrire $(x+1)\times(x+1)$ à la place de $(x+1)^2$ pour expliciter le carré, de même que πR^2 peut s'écrire $\pi\times R^2$ ou même $\pi\times R\times R$. Mais attention, on ne doit pas écrire $(x+1)2$ car cela pourrait être confondu avec $(x+1)^2$ et donc, logiquement, on ne doit pas écrire $(x+1)x$ ou $(a+b)c$ mais préférer dans ces cas une écriture avec un symbole multiplicatif comme $(x+1)\times x$ ou $(a+b)\times c$. On peut aussi inverser l'ordre des facteurs en écrivant $x(x+1)$ ou $c(a+b)$ qui ne sont plus ambigus.

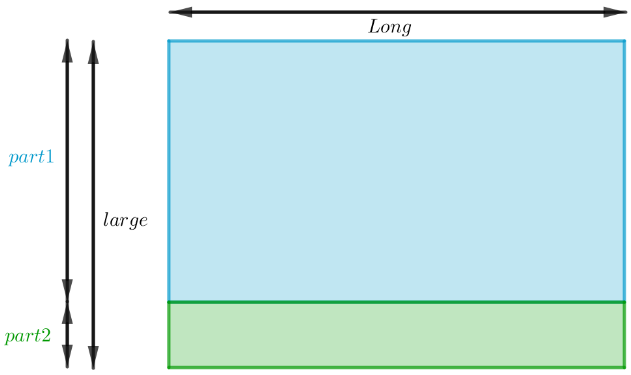
b) La distributivité

On l'a vu au chapitre 4, partie 1, sous-partie *d* (*Utilisations de la distributivité*) :

La *distributivité* est une propriété qui transforme un produit en somme (et réciproquement)

Cette propriété est utilisée depuis l'école primaire pour effectuer les multiplications.
Par exemple, $7\times 18 = 7\times(10+8) = 7\times 10+7\times 8 = 70+56$.
Le produit 7×18 a été transformé en la somme $70+56$.

On peut illustrer et justifier cette propriété par le calcul de l'aire d'un rectangle :
$$\mathcal{A}=\text{Long}\times large$$
Or, la largeur peut être décomposée en deux parties, ce qui conduit à deux rectangles :
$$\text{comme } large= part1+ part2,$$
$$\text{on a } \mathcal{A}=\text{Long}\times(part1+ part2).$$
Et il est bien évident que la somme des aires des deux rectangles égale l'aire du rectangle initial, d'où
$$\mathcal{A}=(\text{Long}\times part1)+(\text{Long}\times part2).$$



De ces deux égalités, on retient que : $\text{Long}\times(part1+part2)=(\text{Long}\times part1)+(\text{Long}\times part2)$

Généralisation :

> Si a, b et c sont trois nombres quelconques alors $a\times(b+c) = a\times b+a\times c$ soit $a(b+c) = ab+ac$
> De même, $(a+b)\times c = a\times c+b\times c = ac+bc$

Vocabulaire :
Lorsque l'expression est écrite comme un *produit*, on dit qu'elle est *factorisée*
Lorsque l'expression est écrite comme une *somme* on dit qu'elle est *développée*

Exemples :
$a(b+c)$, $(a+b)\times c$, $(x+1)^2$, $(x+1)\times x$, $3(x+1)$ ou $(x+3y-2)(x+y^2-1)$ sont des expressions factorisées.
$ab+ac$, $7\times 10+7\times 8$, $a+3b^2c$, $ab+c$, $3(x-2y)+2$ ou $2x+3y-2xy$ sont des expressions développées.

Passer de l'écriture développée à l'écriture factorisée s'appelle *factoriser*.
On parle aussi, dans ce cas, de *mise en facteur* :
Quand on transforme $3x+3$ en $3(x+1)$, on dit qu'on a mis 3 en facteur et qu'on a effectué une factorisation.
Autres exemples de factorisations :

- $x+x^2 = x(1+x)$ on a mis x en facteur
- $-5-5x = -5(1+x)$ on a mis -5 en facteur
- $2x+1-5x(2x+1) = (2x+1)(1-5x)$ on a mis $2x+1$ en facteur

Passer de l'écriture factorisée à l'écriture développée s'appelle *développer*.
Exemples de développements :

- $3(x+1) = 3x+3$
- $x(1+x) = x+x^2$
- $(1+x)\times(-5) = 1\times(-5)+x\times(-5) = -5-5x$
- $(2x+1)(1-5x) = 2x+1-5x(2x+1)$

Vous noterez que ces derniers exemples sont juste l'envers des premiers, car factoriser et développer sont des transformations inverses l'une de l'autre. Dans un sens on factorise, dans l'autre on développe.
Schématisons cela :

Développer

SOMME $\qquad ab+ac \quad = \quad a(b+c) \qquad$ PRODUIT

Factoriser

Remarque :
Il est souvent plus facile de développer, car il n'y a qu'à exécuter les opérations indiquées.
Pour factoriser, il faut **trouver** un *facteur commun*, et comme, généralement, on cherche à mettre en facteur le maximum, il faut **trouver le meilleur** *facteur commun*, ce qui n'est pas forcément évident.

On peut factoriser l'expression $18x^2+6x$ en remarquant que chacun des termes contient le facteur 2 :
$$18x^2=2\times 9x^2 \text{ et } 6x=2\times 3x \text{ et donc } 18x^2+6x=2(9x^2+3x)$$
C'est bien factorisé — on a mis 2 en facteur — mais on aurait pu aussi mettre 3 en facteur :
$$18x^2+6x = 3(6x^2+2x)$$
ou encore, on aurait pu mettre x en facteur :
$$18x^2+6x = x(18x+6)$$
Laquelle de ces expressions factorisées est la meilleure ? Aucune des 3.
Le mieux sera ici de mettre $6x$ en facteur, car le maximum qu'on puisse «extraire» de la somme par factorisation est le produit des trois facteurs communs 2, 3 et x, soit $2\times 3\times x=6x$:
$$18x^2+6x = 6x(3x+1).$$
De cette manière, on obtient le produit d'un facteur irréductible (non factorisable) $3x+1$ par le facteur $6x$ qui peut être vu lui-même comme un produit de trois facteurs «irréductibles» : $6x=2\times 3\times x$.

2) Applications de la distributivité

a) Développements doubles

Supposons que les deux facteurs d'un produit soient des sommes.

Il va falloir développer plusieurs fois, comme dans l'exemple du produit $(2+x)(3+x)$:

$(2+x)(3+x)=(2+x)\times 3+(2+x)\times x$, on a développé le produit du facteur $2+x$ par la somme $3+x$

On peut ensuite continuer, en développant le produit de 3 par la somme $2+x$ et puis, simultanément, le produit de x par la somme $2+x$. Les crochets que j'ajoute ne sont pas nécessaires, je les mets juste pour que l'on voit bien ce qui est développé :

$$(2+x)\times 3+(2+x)\times x=[2\times 3+x\times 3]+[2\times x+x\times x]=6+3x+2x+x^2$$

Après avoir développé, on obtient $(2+x)(3+x)=6+3x+2x+x^2$.

Cette somme se réduit finalement, par l'intermédiaire d'une factorisation partielle (on met x en facteur) :

$$(2+x)(3+x)=6+3x+2x+x^2=6+[3x+2x]+x^2=6+x[3+2]+x^2=6+5x+x^2$$

Généralisation :

$$\boxed{(a+b)(\mathbf{c}+\mathbf{d})=a\mathbf{c}+b\mathbf{c}+a\mathbf{d}+b\mathbf{d}}$$

En réalité, chacun des termes de la 1ère somme est multiplié par chacun des termes de la 2de somme.

On peut, de la même manière, développer des expressions contenant des sommes de plus de deux nombres. La distributivité s'adapte à ces situations :

$$(a+b+c)(d+e)=ad+bd+cd+ae+be+ce$$
$$(a+b+c)(d+e+f)=ad+bd+cd+ae+be+ce+af+bf+cf$$

Exemple :

$(1+x+3x^2)(2x+5)=[1\times 2x+x\times 2x+3x^2\times 2x]+[1\times 5+x\times 5+3x^2\times 5]$ *(les crochets ne sont pas indispensables)*

$=2x+2x^2+6x^3+5+5x+15x^2$

$=5+[2x+5x]+[2x^2+15x^2]+6x^3$ *(ici non plus, les crochets ne sont pas indispensables)*

$=5+7x+17x^2+6x^3$

J'ai d'abord développé en écrivant les symboles $\times$ puis j'ai effectué les quelques calculs possibles et j'ai utilisé les propriétés et notations des puissances qui ont rappelées dans la partie 1a) pour comprimer un peu l'écriture, puis j'ai réduit et ordonné les termes en effectuant des factorisations partielles.

b) Réduction d'une expression développée

> *Définition* : La réduction est une transformation algébrique qui utilise des factorisations partielles pour simplifier une expression développée.

Si notre expression contient, comme l'expression du dessus, les termes $2x$ et $5x$, il est possible de regrouper ces deux termes en un seul en mettant x en facteur, car $2x+5x=(2+5)\times x=7x$.

De même, je regroupe $2x^2$ et $15x^2$ en factorisant la somme $2x^2+15x^2$ sous la forme plus compacte $17x^2$. Finalement, j'obtiens une expression développée qui n'est pas trop longue et qui ne peut plus être réduite :

$(1+x+3x^2)(2x+5)=2x+2x^2+6x^3+5+5x+15x^2=6x^3+(2+15)x^2+(2+5)x+5=6x^3+17x^2+7x+5$

Remarque :

J'ai ordonné les différentes puissances du nombre inconnu x selon les exposants décroissants. C'est une forme standard qui, du fait de son unicité, permet d'identifier plus facilement des expressions identiques. J'aurai pu ordonner les termes de cette expression développée et réduite selon les puissances croissantes de x, ce qui est tout aussi correct, en l'écrivant $5+7x+17x^2+6x^3$.

Le rangement est souvent exigé par la consigne de l'exercice :

«*Développer, réduire et ordonner l'expression suivante selon les puissances croissantes de x* : ...»

NB : Cette pratique ne se limite pas aux expressions littérales.

Lorsque nous effectuons la décomposition $1234=1\times 1000+2\times 100+3\times 10+4\times 1$ pour effectuer le produit 5×1234 à la main, nous ordonnons naturellement cette décomposition selon les puissances décroissantes de 10 (notre base de numération) :

$$5\times 1234=5\times(1\times 1000+2\times 100+3\times 10+4\times 1)=5\times 1000+10\times 100+15\times 10+4=5000+1000+150+4=6154$$

Pratique numérique :
Certains logiciels sont capables, entre autres, de développer, réduire et ordonner.

- Le logiciel xcas, par exemple, est un outil libre et gratuit (comme GeoGebra). Ue fois téléchargé, je peux avec cet outil écrire l'instruction developper((2*x-2*1)*(x^2-3*x+2)+(x^2-2*x+3)*(2*x-3*1)) qui me renvoi l'expression développée, réduite et ordonnée : 4*x^3-15*x^2+22*x-13.
  Nous écririons cela $(2x-2)(x^2-3x+2)+(x^2-2x+3)(2x-3)=4x^3-15x^2+22x-13$.
- De même, le logiciel Geogebra, habituellement utilisé pour faire des figures de géométrie, sait faire ce genre de calcul (on appelle cela du calcul formel). Il suffit de sélectionner «calcul formel» dans le menu «affichage» et d'entrer l'instruction précédente.

c) Expressions avec des signes –

Vous avez sans doute remarqué l'absence presque totale du symbole soustractif, le signe –, dans nos exemples et nos règles. Pourtant il faut les réintroduire car ils font partie du paysage algébrique familier.

Rappel :
Une forme développée simplifiée comme $-3x-10$, malgré les symboles – est une **somme** algébrique :
le nombre $-3x$ (qui est positif ou négatif, on ne sait pas) est ajouté au nombre -10 (qui lui est bien négatif).
On peut écrire cela $(-3x)+(-10)$ pour bien faire la différence entre le + de l'addition et le – du signe.
En prenant $x=1$, cette expression vaut $-3-10$ et il faut bien effectuer une addition des deux nombres négatifs -3 et -10 (on trouve alors -13). Mais en prenant $x=-1$, cette expression vaut $3-10$ et il faut alors effectuer une soustraction car les deux nombres qu'on ajoute n'ont pas le même signe (3 est positif tandis que -10 est négatif). On trouve dans ce cas $3-10=-(10-3)=-7$.
Pour résumé, l'expression «somme algébrique» implique indifféremment des symboles + ou –.
Du fait des priorités opératoires, une expression comme $3x(2x-5)+2(x+1)(x-1)-3x^2$ est également une somme algébrique : les produits $3x(2x-5)$, $2(x+1)(x-1)$ et $-3x^2$ sont les termes de cette somme.

Développements doubles impliquant de un à deux symbole(s) – :

$$(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd$$
$$(a-b)(c+d)=ac-bc+ad-bd$$
$$(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$$

x	+1	-1
+1	+1	-1
-1	-1	+1

Vous porterez toute votre attention sur le dernier terme qui est précédé d'un + (et non d'un –), car il y a deux signes – qui se neutralisent mutuellement, selon la fameuse règle des signes («*les ennemis de mes ennemis sont mes amis*» est discutable dans la vie réelle mais pas pour les nombres).

Exemples :
$(2+x)(3-x)=2\times3+x\times3-2\times x-x\times x=6+3x-2x-x^2=6+(3-2)x-x^2=6+x-x^2$
$(2-3x)(4+5x)=2\times4-3x\times4+2\times5x-3x\times5x=8-12x+10x-15x^2=8+(-12+10)x-15x^2=8-2x-15x^2$
$(2x-3)(4-5x)=2x\times4-3\times4-2x\times5x+3\times5x=8x-12+10x^2-15x=-12+(8-15)x+10x^2=-12-7x-10x^2$

Bien sûr, cela ne serait pas logique de se limiter aux formes comme celles que nous venons d'écrire.
On peut développer de la même façon $(-2x-3)(4-5x)$ ou $(-1-x)(-1-2x)$ et bien d'autres formes encore.
Ne pas oublier cette règle, rappelée en introduction :

Un signe – devant une parenthèse change tous les signes à l'intérieur de la parenthèse. On a ainsi pour tous nombres a et b : $-(a+b)=-a-b$; $-(a-b)=-a+b$; $-(-a-b)=a+b$; $-(-a+b)=a-b$

Ces règles fonctionnent dans les deux sens.
Ainsi on a, pour la première égalité : $-a-b=-(a+b)$, et cela peut être utilisé pour développer :

$$(-a-b)(c-d)=-(a+b)(c-d)=-(ac+bc-ad-bd)=-ac-bc+ad+bd$$

On peut reconnaître dans cette <u>importante</u> règle, un avatar de la distributivité.
En effet, une expression comme $-(a+b)$ ou d'une manière plus générale le nombre $-a$ (l'opposé de a) n'est rien d'autre que $(-1)\times a$ et donc $-(a+b)=(-1)\times(a+b)=(-1)\times a+(-1)\times b=-a-b$.
Ce n'est que pour simplifier que nous notons l'expression $-a-b$ sous cette forme développée.
Mais lorsque c'est nécessaire, on doit pouvoir utiliser l'autre forme, la forme factorisée $-(a+b)$.

Exemple : Lorsqu'on doit développer $(-2x-3)(4-5x)$ on peut d'abord écrire $(-2x-3)(4-5x)=-(2x+3)(4-5x)$ et ensuite, seulement, on va développer mais en gardant le signe – devant une grande parenthèse (ne pas oublier cette parenthèse!) : $-(2x+3)(4-5x)=-[8x+12-10x^2-15x]=-[-10x^2-7x+12]=10x^2+7x-12$.

Conseils : Il faut s'entraîner à effectuer des développements sans rien oublier, ni les signes, ni les coefficients, ni les parenthèses, ni les exposants... Cela demande une grande attention. Il faut procéder méthodiquement, dans un certain ordre (tout le monde n'emploie pas forcément le même ordre). On peut sauter quelques étapes qui paraissent indispensables au début, lorsqu'on est suffisamment sûr de ne rien oublier. Il faut que cela reste compréhensible pour un lecteur (le professeur ou vous-même quand il vous faut vérifier les calculs...)

Certaines étapes peuvent être omises assez rapidement, car écrire des étapes supplémentaires augmente le risque de se tromper (en recopiant mal, en se trompant de ligne, etc.) et fait perdre du temps :

- Lorsque des signes se neutralisent, n'écrire que le signe final. Écrire $2+7x$ plutôt que $2-7(-x)$.
- Lorsqu'on a un produit de nombres écrits en chiffres, n'écrire que le résultat final. Écrire par exemple $8x$ plutôt que $2x\times4$, surtout si les nombres sont petits ou si on peut utiliser la calculatrice.
- Écrire tout de suite les nombres qui ont un exposant facile de calculer. Écrire $6x^3$ plutôt que $3x^2\times2x$.

Ne pas sauter trop d'étapes, il faut que cela reste lisible et compréhensible !
On n'écrit pas seulement des calculs pour trouver un résultat.
On communique la démarche de réalisation d'une tâche complexe avec précision, soin et rigueur.

Exemple :
Développons, réduisons et ordonnons l'expression $E = (2+x)(3-x)-(2x+3)(4-5x)$:
$E = 6+3x-2x-x^2-[8x+12-10x^2-15x]$ *on développe chaque terme*
$= 6+x-x^2-[12-7x-10x^2]$ *on ordonne et on réduit chaque terme*
$= 6+x-x^2-12+7x+10x^2$ *on supprime les parenthèses*
$= -6+8x+9x^2$ *on réduit la forme développée finale*

c) Identités Remarquables

Les *identités remarquables* sont des développements très utilisés qu'il faut apprendre par cœur :

1ère identité (carré d'une somme) : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
2ème identité (carré d'une différence) : $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
3ème identité (différence de carrés) : $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Ces égalités sont faciles à obtenir :
$(a+b)^2 = a\times a + a\times b + b\times a + b\times b = a^2 + \underline{ab+ba} + b^2 = a^2+2ab+b^2$, car $ab=ba$.
$(a-b)^2 = a\times a - a\times b - b\times a + b\times b = a^2 \underline{-ab-ba} + b^2 = a^2-2ab+b^2$.
$(a+b)(a-b) = a\times a - a\times b + b\times a - b\times b = a^2 \underline{-ab+ba} - b^2 = a^2+0-b^2 = a^2-b^2$.

Attention!
L'erreur la plus fréquente concernant les identités remarquables consiste à oublier le double produit et d'écrire $(a+b)^2 = a^2+b^2$ ou bien $(a-b)^2 = a^2-b^2$. **Ces égalités sont fausses** !
Sauf pour quelques cas particuliers comme $(0+a)^2 = 0^2+a^2 = a^2$.
Vérifiez-le en cas de doute sur un exemple comme :
$(2+3)^2=5^2=25$ alors que $2^2+3^2=4+9=13$ et $13\neq25$.

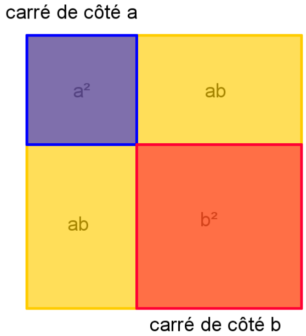


Illustration géométrique :
La 1ère identité se visualise dans cette figure où on calcule l'aire d'un carré de côté $a+b$ en le découpant en 4 de manière à avoir les carrés de côtés a et b.

Trois exemples de développements utilisant cette 1ère identité :

- $(x+3)^2 = x^2+2\times3\times x+3^2 = x^2+6x+9$
- $2020^2=(2000+20)^2=2000^2+2\times2000\times2020^2=4\ 000\ 000+80\ 000+400=4\ 080\ 400$
- $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\sqrt{2}^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+3=5+2\sqrt{6}$
  Pour ce dernier calcul, j'ai utilisé une propriété des racines carrées (étudiées ultérieurement) : le produit des racines est égal à la racine du produit, soit $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}$.

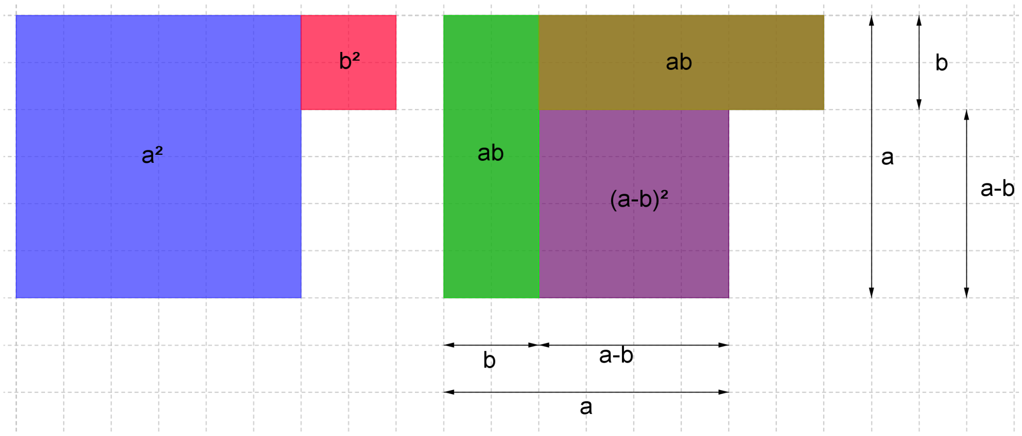
Un autre exemple :
Cette identité permet de montrer que le carré d'un nombre impair est impair.
En effet, un nombre impair peut s'écrire $2n+1$ (n étant un entier).
Son carré vaut $(2n+1)^2 = (2n)^2+2\times2n\times1+1^2 = 4n^2+4n+1$

Or $4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2+2n) + 1 = 2n' + 1$ où n' est l'entier $2n^2+2n$.
Conclusion : le carré de l'impair $2n+1$ est l'impair $2n'+1$ où $n'=2n(n+1)$.
Juste pour vérifier : le carré de $13=2\times 6+1$ est $2[2\times 6(6+1)]+1=2[12\times 7]+1=2\times 84+1=168+1=169$.

✍ De la même façon, montrer que :

- le carré d'un nombre impair de la forme $4n+3$ est un nombre impair de la forme $4n+1$;
- le carré d'un nombre impair de la forme $4n+1$ est un nombre impair de la forme $4n+1$;
- le produit d'un nombre impair de la forme $4n+3$ par un nombre impair de la forme $4n+1$ est un nombre impair de la forme $4n+3$.

Illustration géométrique :
La 2ème identité est un peu plus « tirée par les cheveux ».
La figure ci-dessous à droite montre un carré de côté $a–b$ (en violet) flanqué de deux rectangles de cotés a et b. Redécoupé autrement (à gauche), cette figure est formée des deux carrés de côtés a et b.
On doit en conclure que $a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$ et, en enlevant le double-produit $2ab$ de cette égalité, on obtient l'identité cherchée.



Quatre exemples de développements utilisant cette 2ème identité :

- $(x - 1)^2 = x^2 - 2\times 1\times x + 1^2 = x^2 - 2x + 1$
- $1999^2=(2000 - 1)^2 = 2000^2 - 2\times 2000\times 1 + 1^2 = 4\,000\,000 - 4\,000+1=3\,996\,001$
- $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2=\sqrt{5}^2-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=5-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}+3=8-2\sqrt{15}$
- $(2x - 1)^2 = (2x)^2 - 2\times 2x\times 1 +1^2 = 4x^2 - 4x +1$

On pourrait illustrer géométriquement la 3ème identité mais cela nous semble un peu inutilement compliqué.
Quelques exemples de factorisations où une différence de carrés est exprimée par un produit :

- $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$
- $9x^2 - (x+1)^2 = (3x)^2 - (x+1)^2 = (3x - (x + 1))(3x + (x + 1)) = (2x - 1)(4x + 1)$
- $x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$ *(lorsque le carré n'est pas évident, on utilise une racine carrée)*
- $2x^2 - (x - 3)^2 = (\sqrt{2}x)^2 - (x - 3)^2 = (\sqrt{2}x - (x - 3))(\sqrt{2}x+(x - 3)) = ((\sqrt{2} - 1)x+3)((\sqrt{2} +1)x- 3)$

Un autre exemple moins évident :
En classe de 2de on va factoriser une expression réputée infactorisable comme $x^2–4x+3$ en reconnaissant, dans $x^2–4x$, le *début du développement* de $(x - 2)^2$ qui donne $x^2 - 4x + \mathbf{4}$.
En effet, comme $x^2–4x=(x - 2)^2– 4$, on peut écrire $x^2 - 4x + 3 =[(x - 2)^2 - 4]+3=(x - 2)^2 -1$
Et cette dernière expression peut maintenant être factorisé à l'aide de la 3ème identité remarquable :
$(x - 2)^2 - 1 = (x - 2)^2 - 1^2 = (x - 3)(x - 1)$ et donc, finalement : $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$.

Dernier exemple de factorisation non évidente utilisant le même principe (reconnaître le début du développement d'une expression et compenser par une soustraction de ce qui manque) :
On veut factoriser $1+x^4$. Cette expression semble non factorisable, cependant, on sait que $(1+x^2)^2=1+2x^2+x^4$ et donc $1+x^4=(1+x^2)^2– 2x^2$ et là, on va reconnaître une différence de carrés et utiliser la 3ème identité pour factoriser. $2x^2=(\sqrt{2}x)^2$ et donc $1+x^4=(1+x^2)^2–2x^2=(1+x^2+\sqrt{2}x)(1+x^2-\sqrt{2}x)$.

La 3ème identité peut servir à développer : $(3x + 5)(3x - 5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$.
En calcul mental : $1003\times 997 = (1000+3)(1000–3) = 1000^2–3^2 = 1\,000\,000–9 = 999\,991$.

Ce développement peut simplifier une expression : $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})=\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2=5-2=3$.

Supposons que nous ayons à calculer le nombre $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

Nous pouvons utiliser ce qui vient d'être vu pour transformer cette écriture :

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{1\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$$

C'est mieux car il est plus facile de diviser par 3 que de calculer l'inverse d'un nombre réel :

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}\approx\frac{1{,}732+1{,}414}{3}=\frac{3{,}146}{3}\approx 1{,}049 \text{ alors que } \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\approx\frac{1}{1{,}732-1{,}414}=\frac{1}{0{,}318}=....$$

La même expression peut parfois être développée ou factorisée.

Exemple d'expression mixte : $4x^2-(3x+1)^2$

- développée cette expression devient $4x^2-(9x^2+6x+1) = -5x^2-6x-1$.
- factorisée, à l'aide de la 3ème identité, elle devient :
  $(2x)^2-(3x+1)^2 = (2x-(3x+1))(2x+(3x+1)) = (-x-1)(5x+1) = -(x+1)(5x+1)$

Propriété démontrée grâce à une factorisation ou à un développement :

La différence des carrés de deux entiers consécutifs semble être la somme de ces entiers :

$$2^2-1^2=3=2+1$$
$$3^2-2^2=9-4=5=3+2$$
$$4^2-3^2=16-9=7=4+3$$

Prouvons cela : $(n+1)^2-n^2=(n+1-n)(n+1+n)=1\times(n+1+n)=n+(n+1)$.

Notez qu'ici on aurait pu développer : $(n+1)^2-n^2=(n^2+2n+1)-n^2=2n+1=n+(n+1)$.

Ainsi, il n'est pas toujours évident de savoir s'il faut développer ou factoriser.

Parfois on doit faire les deux successivement comme dans un développement complexe où il y a souvent une étape de factorisation (la réduction). Dans un calcul où une somme doit être calculée en premier à cause des parenthèses, il vaut mieux parfois développer (donc calculer les produits avant la somme) comme dans $\sqrt{2}(\sqrt{18}-\sqrt{8})=\sqrt{2}\sqrt{18}-\sqrt{2}\sqrt{8}=\sqrt{2\times18}-\sqrt{2\times8}=\sqrt{36}-\sqrt{16}=6-4=2$. Ici on ne pouvait pas calculer la différence des radicaux aussi le développement était obligatoire, mais dans l'exemple suivant, les deux méthodes sont réalisables et il faut donc choisir :

$$\left(\frac{4}{5}-\frac{7}{5}\right)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2-2\times\frac{4}{5}\times\frac{7}{5}+\left(\frac{7}{5}\right)^2$$

Ce développement est faisable mais long alors que le calcul direct du produit est presque immédiat :

$$\left(\frac{4}{5}-\frac{7}{5}\right)^2=\left(\frac{-3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

Le même dilemme peut se produire avec les équations : faut-il développer ou factoriser ?

Nous avons étudié ici les trois plus simples identités remarquables.

En voici quelques autres qui, bien sûr, ne sont pas (encore) à apprendre par cœur.

En guise d'exercice, par contre, on peut chercher à les prouver :

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$
$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$
$$(a+b)^4-(a-b)^4=8ab(a^2+b^2)$$

...

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \ ; (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \ ; \ (a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$

...

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \ ; \ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^4+b^4=(a^2+ab\sqrt{2}+b^2)(a^2-ab\sqrt{2}+b^2)$$
$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

...

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

...