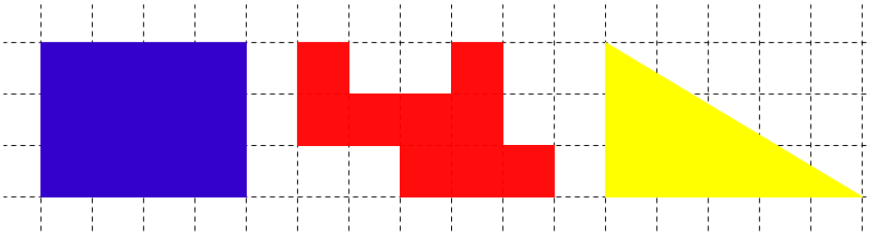
4ème Chapitre 7 : Mesures d'Aires et de Volumes

Note préliminaire : De nombreuses notions ont déjà été étudiées en 6ème et en 5ème. Cependant je reprends ici tous ces contenus pour rappel. Il ne s'ajoute à ces rappels des classes antérieures que la description et le calcul du volume des **pyramides** et des **cônes**.

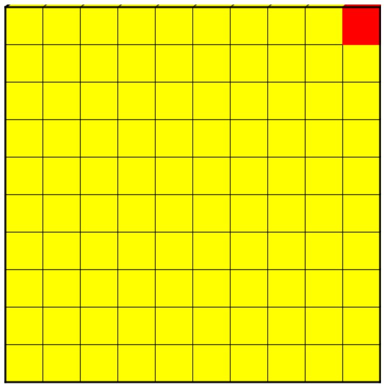
1. Aires (*rappels*)

a) Mesure d'une surface



La grandeur mesurée ici concerne les surfaces. Il est facile, dans certains cas, d'évaluer l'aire d'une surface en comptant les unités d'aire : Le rectangle bleu est formé de 12 u.a. (u.a.=unité d'aire, ici les carreaux du quadrillage) – Le polygone rouge a une aire égale à 9 u.a. – Pour le triangle jaune, le comptage direct est moins aisé, mais on peut imaginer un rectangle 3×5 qui, partagé en deux selon une diagonale, donne ce triangle. L'aire du triangle sera donc la moitié de celle du rectangle, c'est-à-dire 15÷2 ou 7,5 u.a.

b) Unités de mesure (rappel)



Les unités d'aire les plus usitées sont celles dérivées du système métrique. Le carré de 1 m de côté a une aire égale à 1 m² (ce qui signifie 1m×1m), le carré de 1 dm de côté a une aire de 1 dm², etc. On peut compter le nombre de dm² qu'il y a dans 1 m² en utilisant la figure ci-contre où le petit carré rouge a une aire de 1 dm² et le grand carré jaune une aire de 1 m². Il y a ainsi 100 dm² dans 1 m². De même, il y a 100 cm² dans 1 dm², ou encore 100 m² dans 1 dam²…

Ceci nous conduit au tableau de conversion des unités d'aire du système métrique suivant dans lequel on met **2 chiffres par colonnes** :

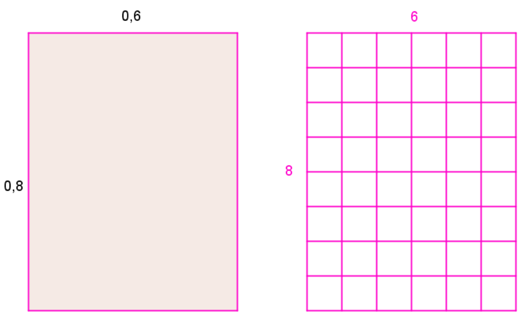
Conversion des aires						
km²	hm²	dam²	m²	dm²	cm²	mm²
		1	00	00	00	00
0	01	25	00			

On voit par exemple que 100 000 000 mm²=100 m²=1 dam² ou encore, que 125 dam²=12500 m²=0,0125 km².

Des unités spécifiques pour les aires:

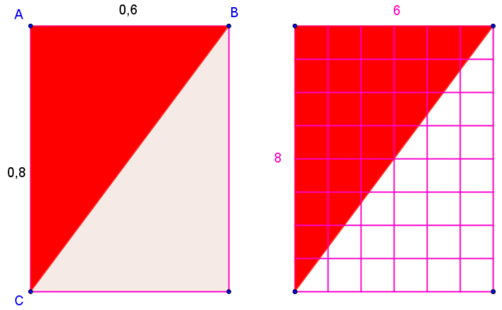
- Une unité encore très utilisée dans le monde agricole ou pour mesurer les terrains et habitations: l'**are** (a) et ses dérivés l'hectare (1 ha = 100 a) et le centiare (1 ca = 1/100 a). L'are correspond au dam² (un carré de 10 m × 10 m), c'était à l'origine la surface que pouvait cultiver un homme en un jour (*are* signifiant « cultiver » en latin). L'hectare correspond à l'hm² puisque 1 ha = 100 a = 100 dam² = 1 hm².
- Les unités anglo-saxonnes de mesure d'aire sont le *square foot* ou pied carré (1 sq ft ≈ 0,1 m²), le *square mile* ou mille carré (1 mi² ≈ 2,6 km²), l'*acre* qui vaut 66 × 660 = 43 560 pieds carrés soit environ 4050 m²…Parmi les très nombreuses autres unités étrangères, citons le tatami japonais ou *jō* (畳) qui mesure 91 cm x 182 cm soit environ 1,6 m² ou le *feddan* égyptien qui mesure environ 4200 m².
- D'autres unités spécifiques existent comme le barn qui est utilisé en physique des particules (1 b = 0,0000000000000000000000000001 m²). Mais bien sûr on peut toujours utiliser des sous-multiples du m² en utilisant les préfixes standards : milli, micro, nano, pico, femto, atto, zepto (z), yocto (y)… ainsi 1 b = 0,0001 ym², c'est plus simple non ? En quoi mesurer la surface de notre galaxie qui est assimilée à un disque de 100000 a.l. de diamètre, c'est-à-dire, environ 10^{17} km ? Il faut sans doute utiliser les préfixes standard pour les multiples du m² : kilo, méga, giga, téra, peta, exa, zetta (Z), yotta (Y)…

c) Aire d'un rectangle ou d'un triangle rectangle



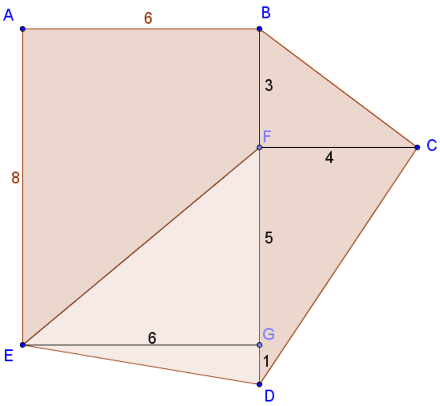
Pour l'aire d'un rectangle, ses côtés ayant pour longueur des nombres entiers ou décimaux, on se ramène toujours à une figure formée de petits carrés comme la figure ci-contre. Pour représenter un rectangle dont les côtés mesurent 0,6 m et 0,8 m on peut utiliser le dm comme unité de mesure et compter les dm². Ici on voit qu'il y a 6×8 = 48 dm² soit 0,48 m². On aurait pu trouver le même résultat en multipliant directement les longueurs en m : 0,6 × 0,8 = 0,48. D'une manière générale, si L est la longueur et ℓ est la largeur, alors l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle est donnée par la formule $\mathcal{A} = L \times \ell$.

Attention à toujours utiliser des longueurs dans la même unité ! Ainsi, un rectangle de 3,5 m sur 4 cm a une aire égale à 350 × 4 = 1400 cm², soit 14 dm² ou encore 0,14 m² (on aurait pu calculer directement en m² : 3,5 × 0,04 = 0,14).



Pour un triangle rectangle, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, ils peuvent toujours être vus comme la moitié d'un rectangle. Les côtés du rectangle étant égaux aux côtés de l'angle droit du triangle.

Ainsi le triangle ABC rouge ci-contre peut être vu comme la moitié du rectangle d'aire 0,14 m². L'aire de ce triangle sera donc égale à 0,07 m² ou 7 dm². D'une manière générale, si L et ℓ sont les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, alors l'aire $\mathcal{A}$ du triangle est donnée par la formule $\mathcal{A} = L \times \ell \div 2$.

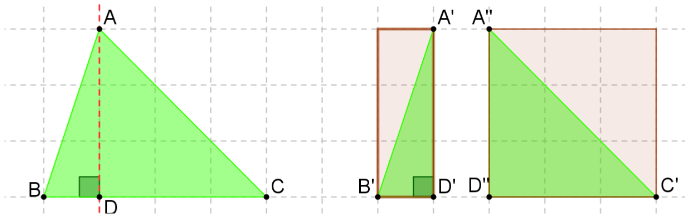


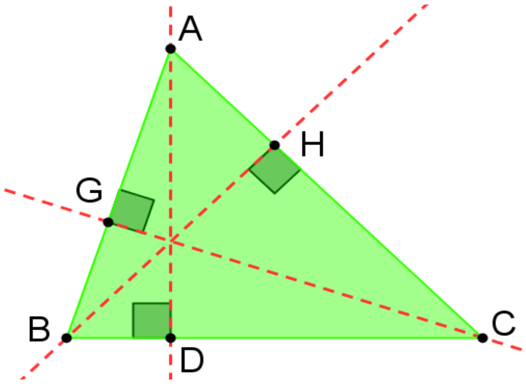
On peut utiliser cette formule pour calculer l'aire d'autres polygones, par découpages en triangles rectangles ou rectangles comme dans les exemples suivants :

- Le pentagone ABCDE peut être découpé en un rectangle d'aire 48 et de trois triangles rectangles d'aires 6 (BCF), 12 (CFD) et 3 (EGD). Son aire sera donc égale à 48 + 6 + 12 + 3 = 69.
- L'hexagone ABCDFE est le pentagone ABCDE auquel on a enlevé deux triangles rectangles d'aires 15 (EGF) et 3 (EGD). Son aire sera donc égale à 69–15–3= 51.

d) <u>Aire d'un triangle quelconque</u>

Un triangle peut toujours être décomposé en deux triangles rectangles. Il suffit pour cela de le couper selon une de ses hauteurs comme nous le voyons ci-contre où l'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des deux triangles rectangles ABD et ADC.





Sur notre exemple l'aire de ABC vaut (AD×BD÷2)+(AD×DC÷2), ce qui est égale à : AD×(BD+DC)÷ 2, soit AD×BC÷2. On peut donc toujours considérer un triangle quelconque comme la moitié d'un rectangle dont la longueur est une base du triangle (un de ses côtés) et la largeur est la hauteur correspondante du triangle.

Formule pour un triangle de base b et de hauteur h :

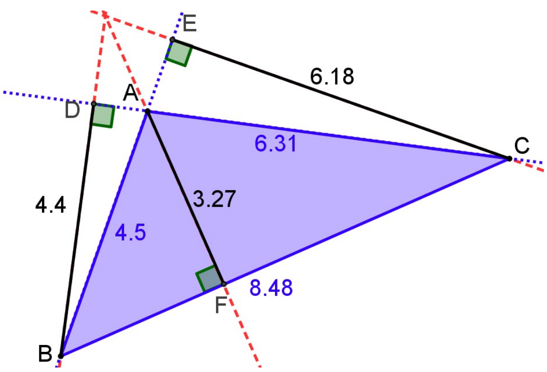
$$\boxed{\mathcal{A} = b \times h \div 2}$$

Notons bien qu'il y a trois manières différentes de calculer l'aire d'un triangle (puisqu'il y a trois bases différentes possibles : les trois côtés). Sur la figure ci-contre, on obtiendra la même valeur en effectuant le calcul de l'aire du triangle ABC par l'une de ces trois formules où la base est en bleu et la hauteur correspondante en rouge :

BC × AD ÷ 2 ; CA × BH ÷ 2 ; AB × CG ÷ 2

Pour un triangle *obtusangle* (un de ses angles est obtus) on fait exactement pareil, mais il faut prolonger les côtés pour trouver les pieds des hauteurs comme on le voit sur cette figure. L'aire du triangle ABC de droite peut être estimée par les 3 calculs suivants (les longueurs sont arrondies, ce qui explique les petites différences obtenues).

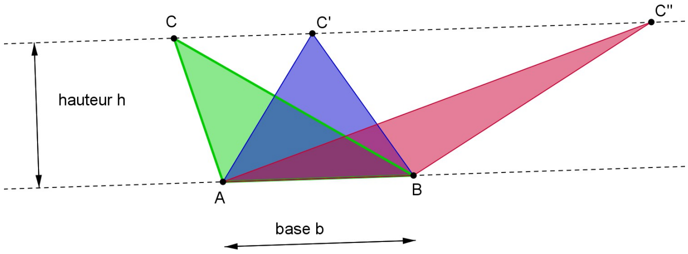
BC × AF ÷ 2 ≈ 8,48 × 3,27 ÷ 2 = 13,8648
CA × BD ÷ 2 ≈ 6,31 × 4,4 ÷ 2 = 13,882

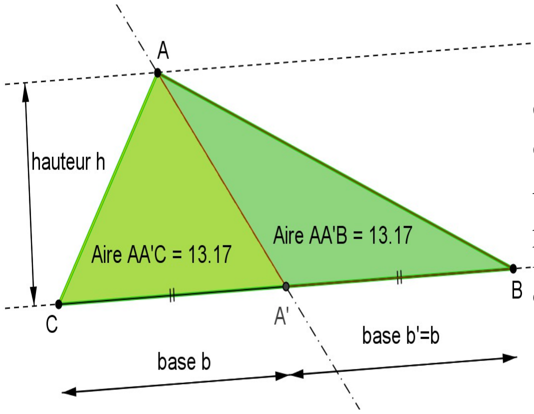


AB × CE ÷ 2 ≈ 4,5 × 6,18 ÷ 2 = 13,905

Propriété : les aires de deux triangles de même base et de même hauteur sont égales. En particulier, si deux triangles ABC et ABC' sont tels que C et C' sont sur une droite (CC') parallèle à leur base commune (AB), alors leurs aires sont égales.

Sur notre figure, les trois triangles ABC, ABC' et ABC'' ont même aire car ils ont une base et la hauteur correspondante en commun.



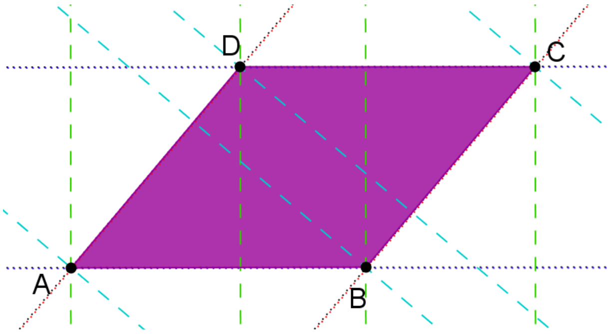


Cette propriété peut être utile pour apporter des preuves. Par exemple, pour prouver qu'une médiane (AA') partage le triangle ABC en deux triangles de même aire. Les deux triangles ACA' et ABA' ont des bases égales car A' est le milieu de [BC] et ils ont des hauteurs issues de A égales, car le pied de la hauteur est le même dans les deux cas.

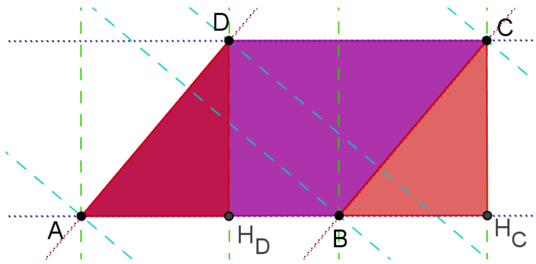
Si A' est le milieu de [BC] alors on a $\mathcal{A}_{ABA'} = \mathcal{A}_{ACA'}$

e) Aire d'un parallélogramme

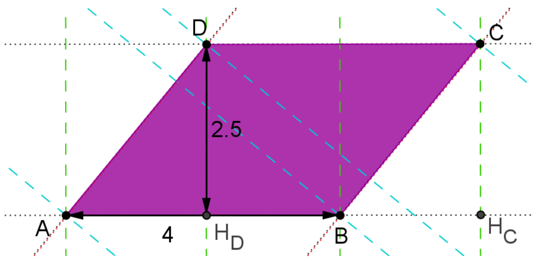
Un parallélogramme est un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux. On peut définir la hauteur d'un parallélogramme relativement à un côté et à un sommet comme la droite passant par le sommet considéré et perpendiculaire au côté. On peut ainsi tracer deux hauteurs à partir de chaque sommet d'un parallélogramme. La figure ci-contre montre les quatre hauteurs parallèles qu'on peut ainsi tracer à partir des quatre sommets relativement à une des deux directions des côtés du parallélogramme.



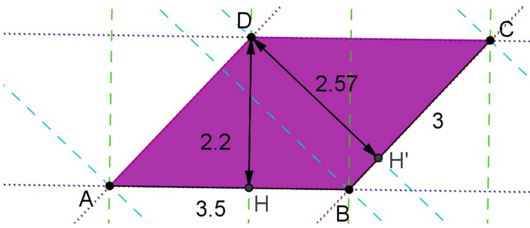
N'importe laquelle de ces hauteurs permet de découper le parallélogramme ABCD en deux morceaux qui sont les 2 pièces d'un puzzle se recomposant en un rectangle. Le rectangle DH_DH_CC est ainsi formé des 2 pièces formées à partir du parallélogramme ABCD : le triangle AH_DD et le trapèze DH_DBC. Ce rectangle a donc la même aire que celle du parallélogramme de départ.



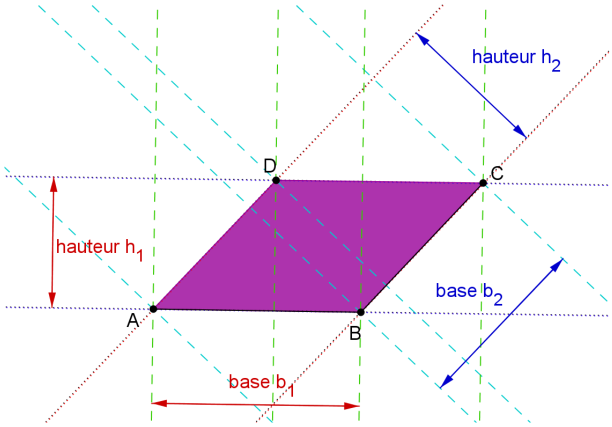
On voit que dans le calcul de l'aire du parallélogramme, on va considérer la longueur d'un côté (on l'appellera souvent la base du parallélogramme) et la distance entre le sommet et le pied de la hauteur relative au sommet et au côté considérés (on appèlera cette distance également hauteur). D'une façon générale, l'aire d'un parallélogramme de côté c et de hauteur h est égale à celle du rectangle ayant pour longueur c et pour hauteur h. Ainsi, sur notre figure, l'aire de ABCD est 4×2,5=10.



Pour calculer l'aire d'un parallélogramme, on a le choix entre deux bases différentes (les côtés parallèles ayant même longueur sont une seule et même base). Il y aura donc deux façons d'obtenir le même résultat : avec le côté c_1 et la hauteur correspondante h_1 ou bien avec le côté c_2 et la hauteur correspondante h_2. Ainsi, sur notre figure, l'aire de ABCD vaut AB×DH=3,5×2,2=7,7 mais aussi BC×DH'≈2,57×3=7,71.



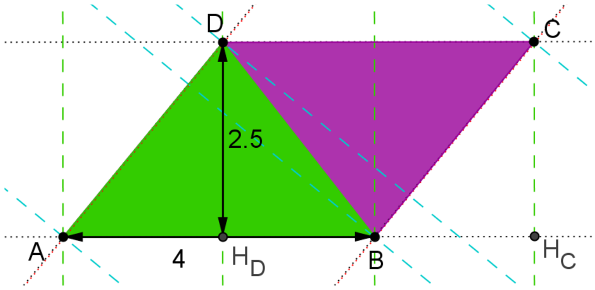
Si les mesures de AB, DH et BC sont exactes, on devrait avoir pour DH' la valeur suivante :
DH'=AB×DH÷BC=3,5×2,2÷3=7,7÷3=2,5666...



On a ainsi deux formules pour calculer l'aire du parallélogramme ABCD :

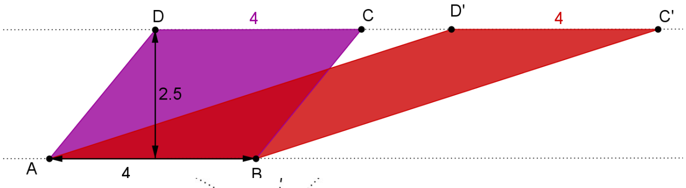
$$\boxed{\mathcal{A}_{ABCD} = h_1 \times b_1 = h_2 \times b_2}$$

Remarquons que nous aurions pu découper le parallélogramme selon une de ses diagonales pour obtenir un assemblage de deux triangles superposables (mêmes côtés, mêmes angles donc même base, même hauteur et même aire). L'aire d'un des triangles n'a alors qu'à être multipliée par 2 pour trouver celle du parallélogramme. Sur notre figure, l'aire du triangle ABD vaut 4×2,5÷2=5, et donc celle du parallélogramme vaut le double 5×2=10.

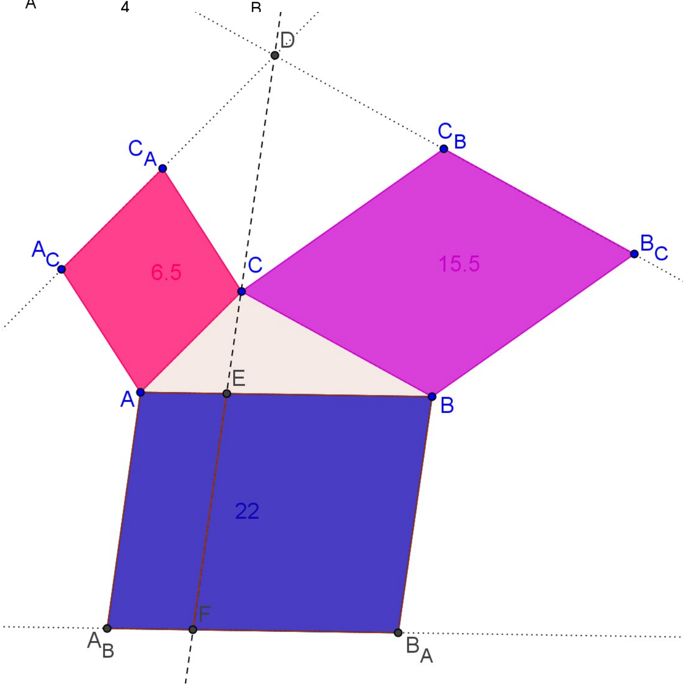


Propriété :

> les aires de deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont égales. En particulier, si deux parallélogrammes ABCD et ABC'D' sont tels que (CD) et (C'D') sont confondues, alors leurs aires sont égales.

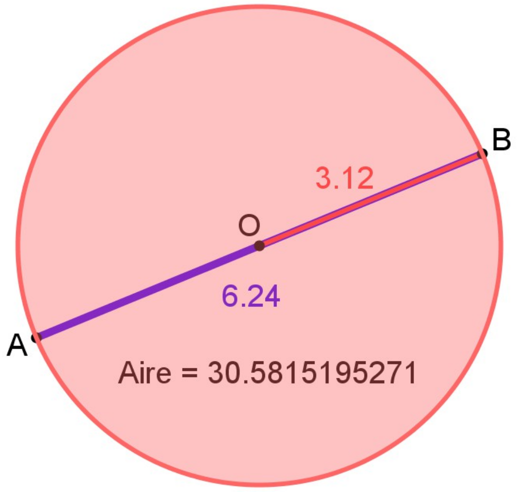


Cette propriété, comme la propriété analogue qu'on a pour les triangles, permet d'effectuer certaines démonstration.
Par exemple, sur la figure ci-contre, on a construit deux parallélogramme quelconques sur les côtés [AC] et [BC] d'un triangle ABC. En prolongeant les côtés [A_CC_A] et [B_CC_B], on trouve le point D. La droite (CD) ensuite permet de construire E sur [AB].
En construisant F sur (CD) tel que EF=CD, on peut construire les points A_B et B_A tels que le parallélogramme ABB_AA_B d'aire égale à la somme des aires des parallélogrammes de départ. Ce résultat, connu sous le nom de *théorème de Pappus*, se démontre facilement avec la propriété ci-dessus. En effet, les parallélogrammes ACC_AA_C et $ACDC_A$ ont même aire car (A_CC_A) et (C_AD) sont confondues. De même, $ACDC_A$ et $AEFA_B$ ont même aire car (DC) et (EF) sont confondues.



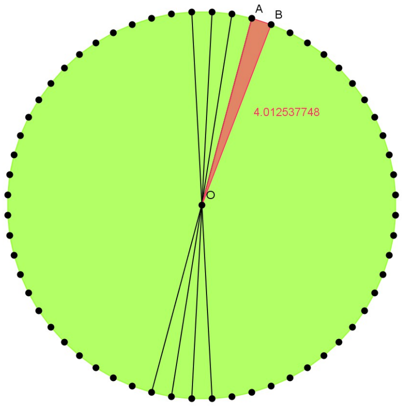
Par conséquent, le parallélogramme de départ ACC_AA_C et $AEFA_B$ ont même aire.
En faisant de même pour l'autre parallélogramme de départ, on trouve le résultat cherché.

f) <u>Aire d'un disque</u>
Un disque est la surface contenue à l'intérieur d'un cercle. Pour mesurer l'aire d'un disque, on ne peut utiliser ce qui a été dit sur les polygones car la courbe qui limite le disque n'est pas faite de segments*.
Les mathématiciens ont cependant établi la formule suivante, qui utilise le nombre "pi", noté π, que l'on a défini pour la mesure du périmètre du cercle (qui vaut π×diamètre). Ainsi, l'aire d'un disque de rayon *r* vaut $\pi \times r^2 = \pi r^2$, soit, comme le diamètre *d* est le double du rayon *r* (*d*=2*r*), $\pi \times d^2 \div 4$ ou encore $\pi \frac{d^2}{4}$.
(les notations r^2 ou d^2 signifient $r \times r$ ou $d \times d$).



Le disque ci-contre, de rayon 3,12 a ainsi une aire égale à $\pi\times(3{,}12)^2 \approx 3{,}141592654\times(3{,}12)^2 = 30{,}58151953$ d'où la valeur affichée (plus précise encore) de l'aire du disque par le logiciel GeoGebra.

*Ce que nous avons dit n'est pas tout-à-fait vrai puisqu'une des méthodes utilisées pour approcher l'aire d'un disque (sans utiliser la formule donnée plus haut) utilise des polygones réguliers comme celui dessiné ci-contre qui a 60 côtés égaux.

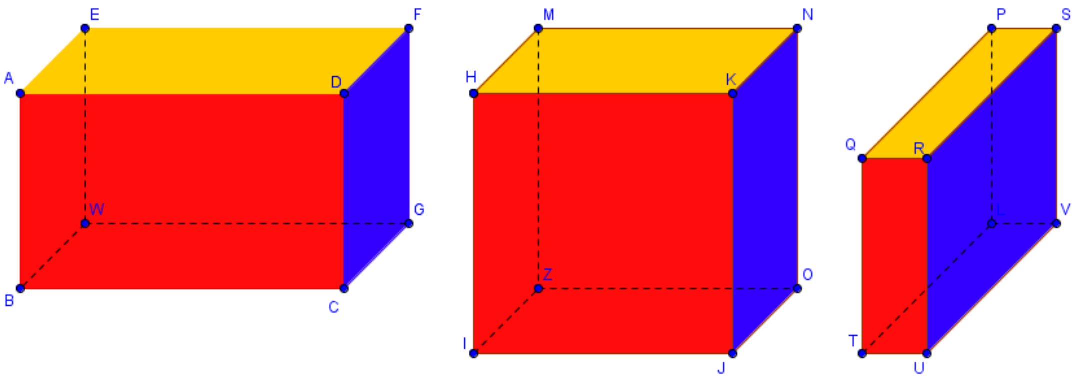


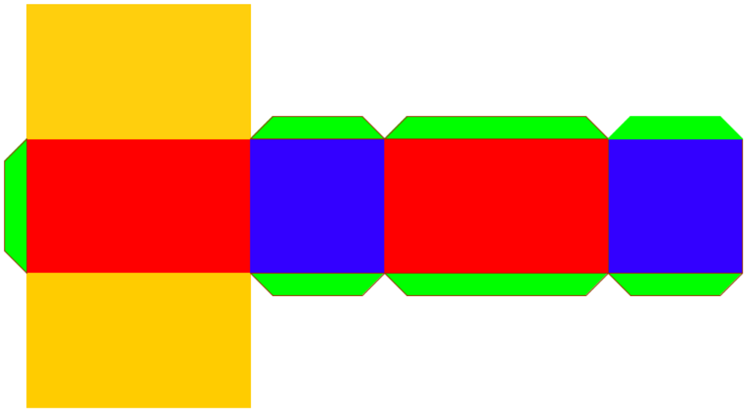
L'aire du polygone est légèrement inférieure à celle du disque, mais on peut la calculer en multipliant par 60 celle du triangle ABO qui a pour base AB (un peu moins du soixantième du périmètre du cercle) et pour hauteur, un peu moins du rayon.
Dans le cas de notre figure, le diamètre vaut environ 8, et l'aire du polygone environ $60\times(\pi\times8)\div60\times4\div2= \pi\times16= \pi\times4^2$. Cette façon de procéder donne curieusement le bon résultat en dépit du fait qu'on a utilisé des valeurs approximatives (une base et une hauteur légèrement plus grandes)...

2.<u>Volumes</u>

a) <u>Pavés droits ou parallélépipèdes rectangles</u> (*rappel*)

En sixième, nous avons étudié les formes les plus simples de l'espace à trois dimensions :
les parallélépipèdes rectangles ou pavés droits, dont les cubes font partie (*cube* : pavé ayant ses trois dimensions égales). Un parallélépipède rectangle est un objet de l'espace limité par six faces rectangulaires. Voici quelques exemples de tels objets dessinés en perspective cavalière. La face du devant et celle de derrière sont en « vraies grandeurs », les autres sont déformées par la perspective. Ainsi l'arête [HM] du cube a la même longueur que l'arête [HK] malgré les apparences, et ces arêtes sont perpendiculaires dans la réalité alors qu'elles semblent former un angle aigu dans notre représentation. La seule propriété qui est toujours respectée par la *perspective cavalière* : des segments parallèles dans la réalité, sont représentés parallèles.

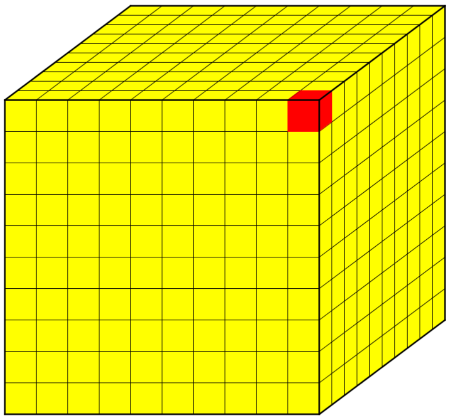




Le patron d'un parallélépipède rectangle est le dessin à plat de ses six faces qui permet, après découpage et pliage, d'assembler ses faces entre elles pour matérialiser l'objet étudié. Voici par exemple un patron pour réaliser le pavé ABCDEWGF. Nous constatons que les six faces se regroupent en trois paires de rectangles identiques. Les différentes arêtes (bords des faces) sont de trois longueurs seulement : la hauteur, la longueur et la largeur. Nous avons dessinés en vert des languettes pour assembler les faces entre elles.

b) Unités de mesure

Les unités de volume les plus usitées sont celles dérivées du système métrique. Le cube de 1 m de côté a un volume égal à 1 m³ (ce qui signifie 1m×1m×1m), le cube de 1 dm de côté a un volume de 1 dm³. Comme le montre la figure ci-contre, il y a 1000 dm³ dans 1 m³.
De même, il y a 1000 cm³ dans 1 dm³, ou encore 1000 m³ dans 1 dam³…



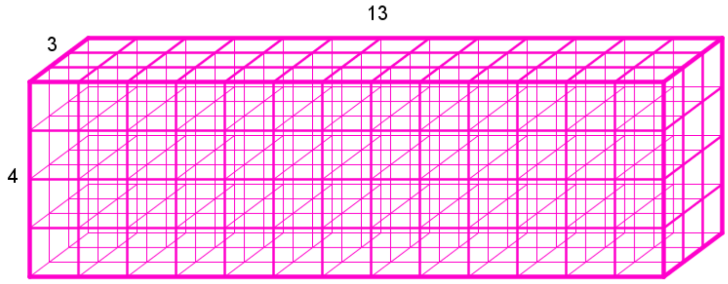
Ceci nous conduit au tableau de conversion des unités de volume du système métrique suivant dans lequel on met **trois chiffres par colonne** :

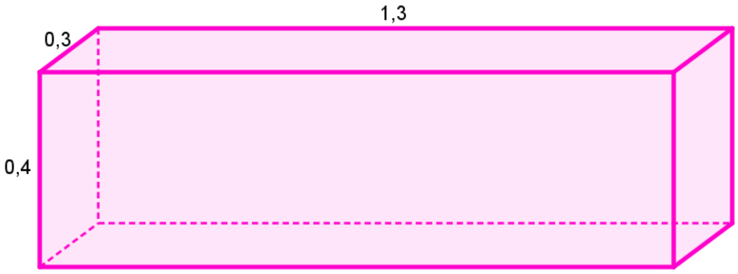
Conversion des volumes						
km³	hm³	dam³	m³	dm³	cm³	mm³
			0,	100	000	000
0,	000	012	500			

On voit par exemple, que 100000000 mm³ = 0,1 m³ = 100 dm³
ou encore, que 12500 m³ = 12,5 dam³ = 0,0000125 km³.

Une unité spécifique pour les volumes : le litre est la principale unité de contenance. 1L est la contenance d'un cube de 1dm d'arête. Donc 1L = 1 dm³. Des unités dérivées du litres souvent utilisées : l'hectolitre, le décalitre, les déci-, centi- et millilitres. D'autres unités sont parfois utilisées : la stère équivalente au m³ (pour mesurer le bois), le boisseau (anciennement pour mesurer les grains), le baril de pétrole, la cuillère à thé (unité anglo-saxonne)…

c) Calcul du volume d'un parallélépipède





D'une manière générale, si L est la longueur, ℓ la largeur et h la hauteur, alors le volume V du parallélépipède rectangle est donnée par la formule $V = L \times \ell \times h$.

Attention à toujours utiliser des longueurs dans la même unité ! Ainsi, un pavé de 3,5 mm sur 4 cm et 1,2 dm a un volume égal à

$$3{,}5 \times 40 \times 120 = 16800 \text{ mm}^3,$$

soit 16,8 cm³ ou encore 0,0168 dm³

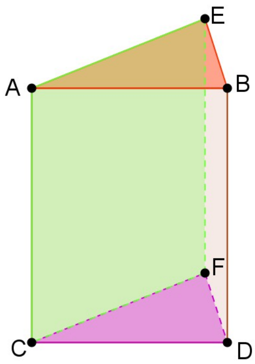
On aurait pu calculer directement en cm³ :

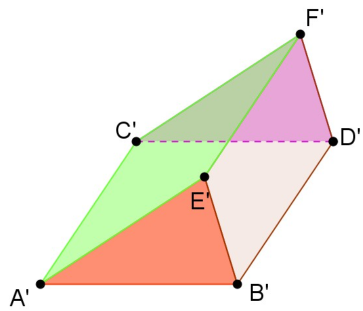
$$0{,}35 \times 4 \times 12 = 16{,}8$$

d) Les prismes droits et le cylindre de révolution

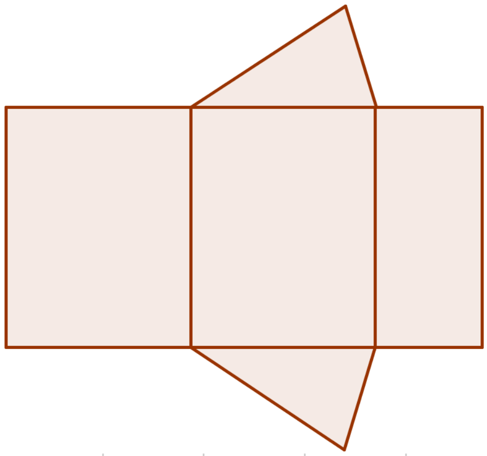
➢ Les prismes droits sont des objets de l'espace ayant deux faces parallèles et superposables (les bases) qui ont la forme d'un même polygone à *n* côtés, et *n* faces rectangulaires (les faces latérales) qui joignent les arêtes correspondantes des deux bases.

Voici par exemple, un prisme à base triangulaire ABCDEF, posé sur une de ses bases (la face CDF). Les deux faces triangulaires sont des triangles superposables (c'est-à-dire de même dimension). Les trois autres faces sont des rectangles, bien qu'une seule puisse être représentée comme telle en perspective. La vue de droite montre le même prisme posé sur une de ses faces latérales (la face ABDC). Le patron de ce prisme montre les trois faces latérales rectangulaires ainsi que les deux bases superposables. Il n'y a pas que des prismes à bases

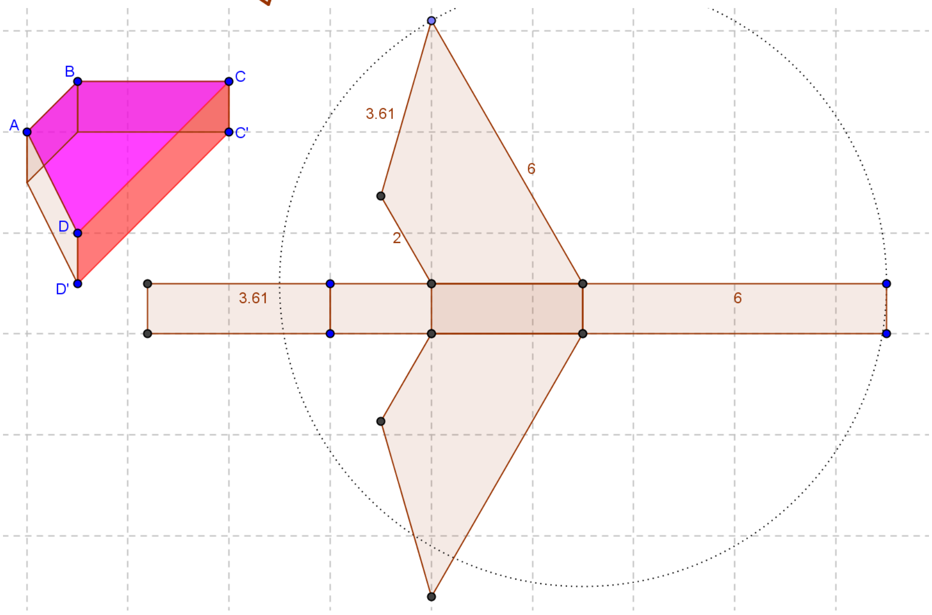




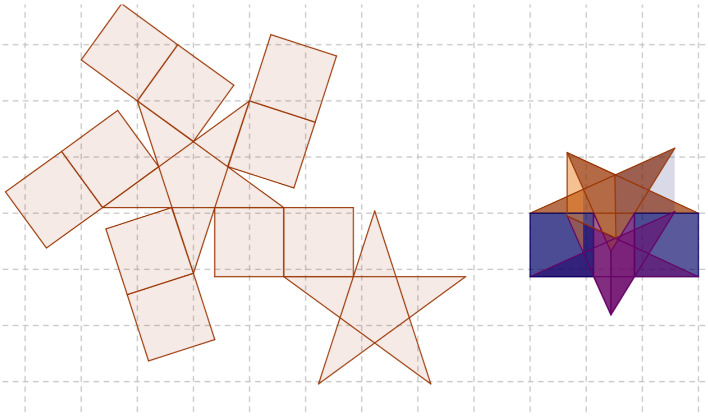
triangulaires. On peut prendre n'importe quel polygone comme base. Si la base est un rectangle, nous obtenons un parallélépipède rectangle. Ces formes sont en effet, un cas particulier de prisme. Dans le cas du parallélépipède rectangle, chacune des trois paires de faces parallèles peut être considérée comme les bases du prisme, les quatre autres faces étant alors les faces latérales.



Ci-contre, un prisme dont la base est un trapèze (quadrilatère dont deux côtés opposés sont parallèles). Il est posé sur une de ses bases et seule la face latérale arrière (notée BCC'B') est en vraie grandeur. Le patron permet de se rendre mieux compte de la forme réelle de la base.

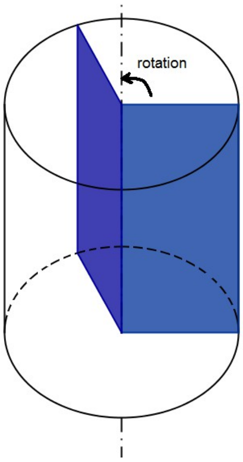


La figure suivante montre un prisme dont les bases sont des pentagones réguliers étoilés. Il y a donc dix faces latérales, d'où le patron qui est présenté de manière à rester d'une seule pièce.

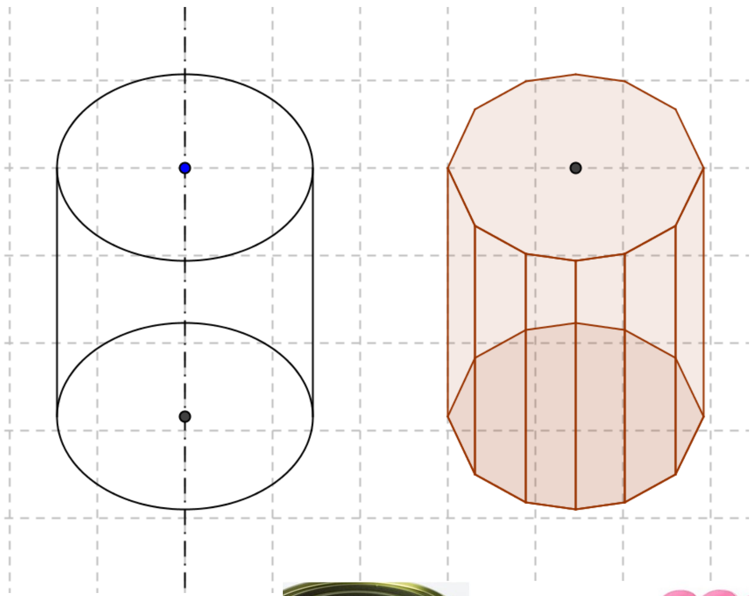


- Le <u>cylindre de révolution</u> est un objet de l'espace possédant deux bases circulaires de même taille, situées parallèlement, l'une au-dessus de l'autre. Une seule face latérale courbe rejoint les arêtes circulaires des bases.

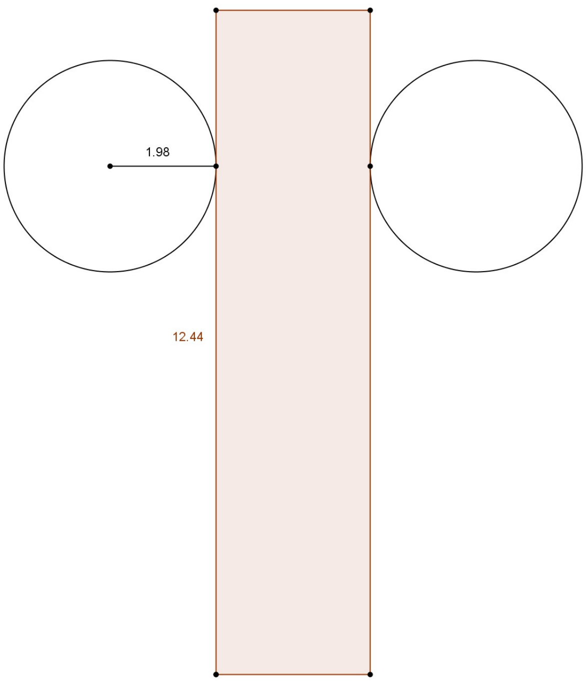
On peut considérer le cylindre de révolution comme une forme extrême de prisme droit : la base étant un polygone régulier ayant un nombre infini de côté... Comparons pour illustrer cette idée, un cylindre et le prisme qui lui ressemblerait ayant une base dodécagonale (douze faces). Si, au lieu de cette base à douze côtés on mettait cent côtés, on serait très proche d'un cylindre.



Le mot 'révolution' signifie *tourner*. Le cylindre qu'on étudie ici est appelé 'cylindre de révolution' car il peut être engendré (fabriqué) par un rectangle qui tournerait autour de l'axe de symétrie du cylindre (cette droite en pointillé qui passe par les centres des deux bases). Imaginez une plaque rectangulaire tournant autour d'un de ses côtés (par exemple une porte autour de ses gonds) : l'espace qu'elle occupe en effectuant un tour complet est un cylindre de révolution.



Des objets de la vie courante qui ont des formes cylindriques : un tube, un crayon, une corde, un câble, une poubelle, une casserole, une bouteille, une boîte de conserve, etc.



Le patron d'un cylindre de révolution consiste en deux disques de même rayon et une surface rectangulaire qui, en s'enroulant autour des bases constituera la face latérale courbe. La longueur de ce rectangle est égal au périmètre de la base soit, si r désigne le rayon de la base, $2\times\pi\times r$.

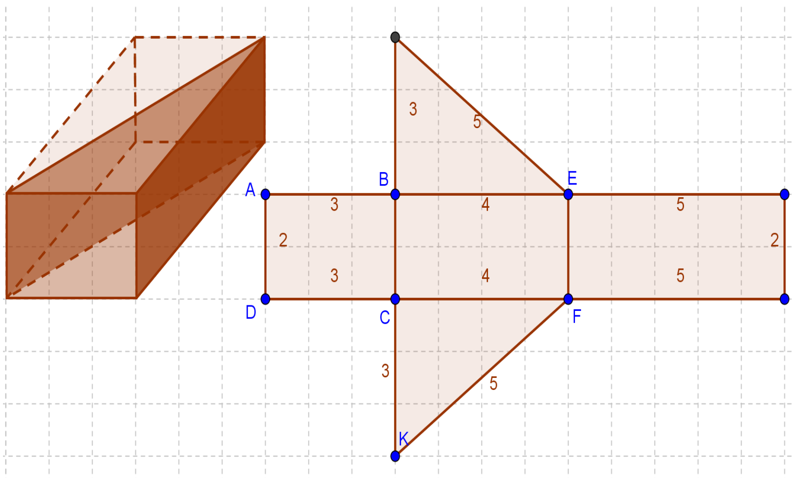
Ci-contre, la base est un disque de 1,98 de rayon donc la face latérale aura une longueur égale à $2\times\pi\times1{,}98 \approx 12{,}440707$.

- <u>Calcul du volume (prisme ou cylindre)</u>

Pour un prisme droit ou un cylindre de révolution, une seule formule s'applique pour le calcul du volume :

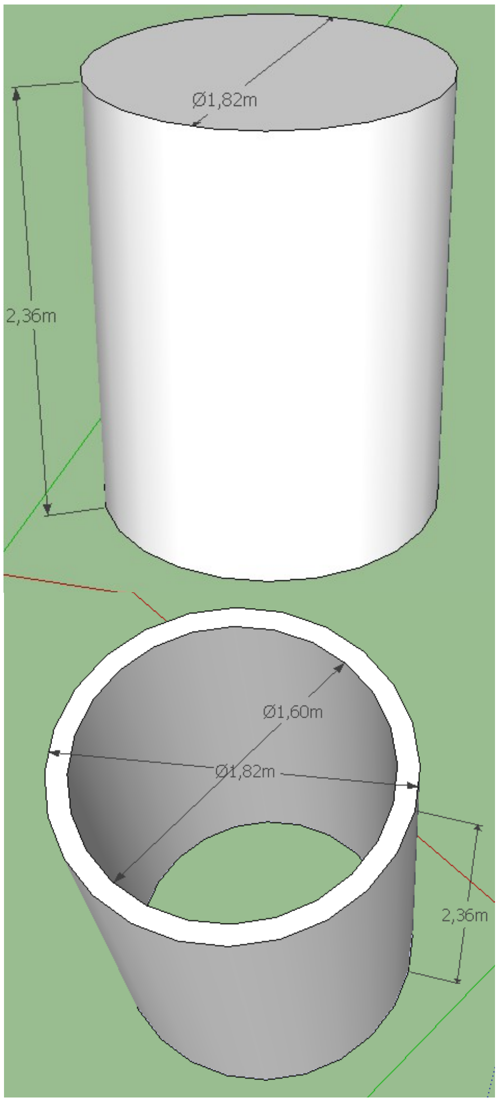
$$\boxed{\text{volume} = \text{base} \times \text{hauteur}}$$

Pour un prisme, *la hauteur* est la longueur commune des arêtes qui ne font pas partie des bases. C'est l'écart entre les bases, mesuré perpendiculairement aux bases. De même, pour un cylindre, ce sera l'écart entre les bases. Sur le patron du cylindre, la hauteur est la largeur du rectangle formant la face latérale.



Ce qu'on appelle ici la *base* est la mesure de l'aire de la base. Ce sera l'aire du polygone formant la base pour un prisme et pour un cylindre, ce sera l'aire du disque que forme la base.

Exemple :
le prisme ABEDCF a pour base le triangle ABE qui est rectangle en B. Les dimensions étant celles du patron ci-contre exprimées en cm.
Ce triangle a pour aire : AB×BE÷2 = 3×4÷2 = 6 cm².
La hauteur de ce prisme est AD=2 cm, le volume sera donc égal à $6\times2=12$ cm^3.
Une autre façon d'arriver à ce résultat:
le prisme est la moitié d'un parallélépipède rectangle dont les côtés mesurent 2 cm, 3 cm et 4 cm.
Son volume sera donc $2\times3\times4\div2=12$ cm^3.



Le cylindre ci-contre a une hauteur de 2,36 m et un diamètre de 1,82 m. L'aire de sa base est donnée par la formule $\pi\times r\times r = \pi\times r^2$ avec un rayon égal à la moitié du diamètre, soit 0,91 m.
Donc le volume du cylindre est égal à :
$\pi\times0{,}91^2\times2{,}36 = 6{,}139664788...$ soit environ 6,14 m^3.

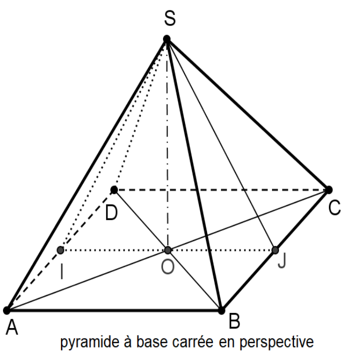
En fait, ce cylindre est évidé, comme le montre la deuxième figure. Si on veut calculer le volume des parois de ce tube cylindrique, on doit retirer au volume précédemment calculé, le volume du cylindre vide du centre, c'est-à-dire:
$\pi\times(1{,}60\div2)^2\times2{,}36 = 4{,}745061544...\approx 4{,}75$ m^3.
Les parois ont donc un volume égal approximativement à :
$6{,}14 - 4{,}75 = 1{,}39$ m^3.

e) <u>Les pyramides et les cônes</u>

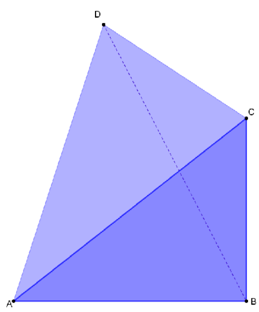
- <u>Les pyramides</u> sont des solides construits sur une base polygonale et un point en dehors de cette base, appelé le sommet de la pyramide. Ce point est joint à la base par des faces triangulaires – autant de faces triangulaires que de côtés à la base.

La hauteur d'une pyramide est le segment qui joint le sommet de celle-ci à sa base en lui étant perpendiculaire. Généralement, on n'étudie au collège que les pyramides *régulières* : la base est alors un polygone régulier et les faces latérales sont des triangles isocèles tels que la hauteur « tombe » au centre du polygone.

Le prototype de pyramide est la *pyramide régulière à base carrée* (tout le monde connait la grande pyramide de Khéops sur le plateau de Gizeh, en Egypte, qui est bâtie sur ce modèle).
Les pyramides à base triangulaire sont aussi appelées *tétraèdres* (tetra : quatre) dont le fameux *tétraèdre régulier* (ces faces sont quatre triangles équilatéraux superposables) qui est un des cinq solides de Platon[1].



pyramide à base carrée en perspective

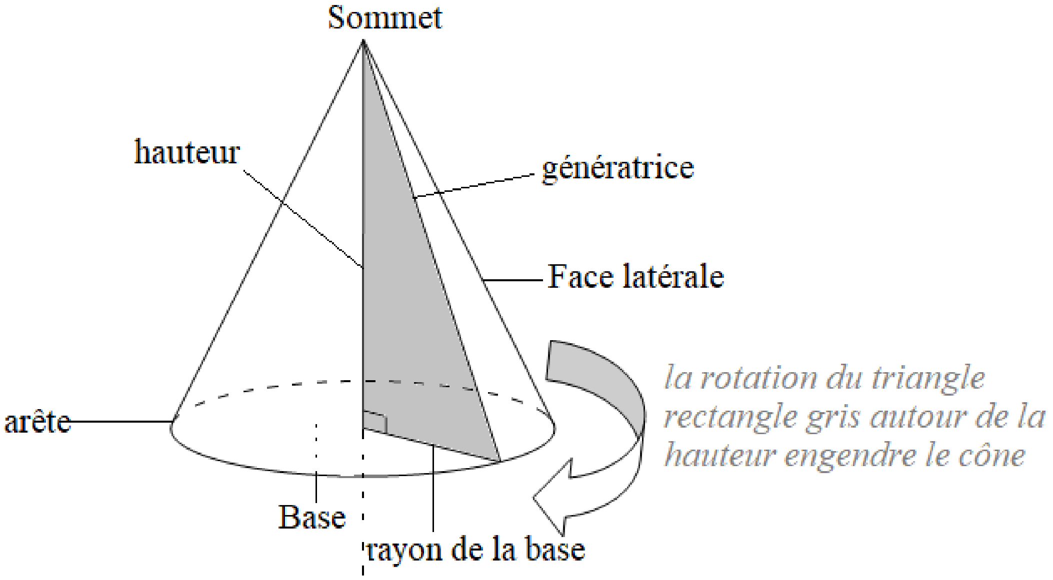


tétraèdre en perspective

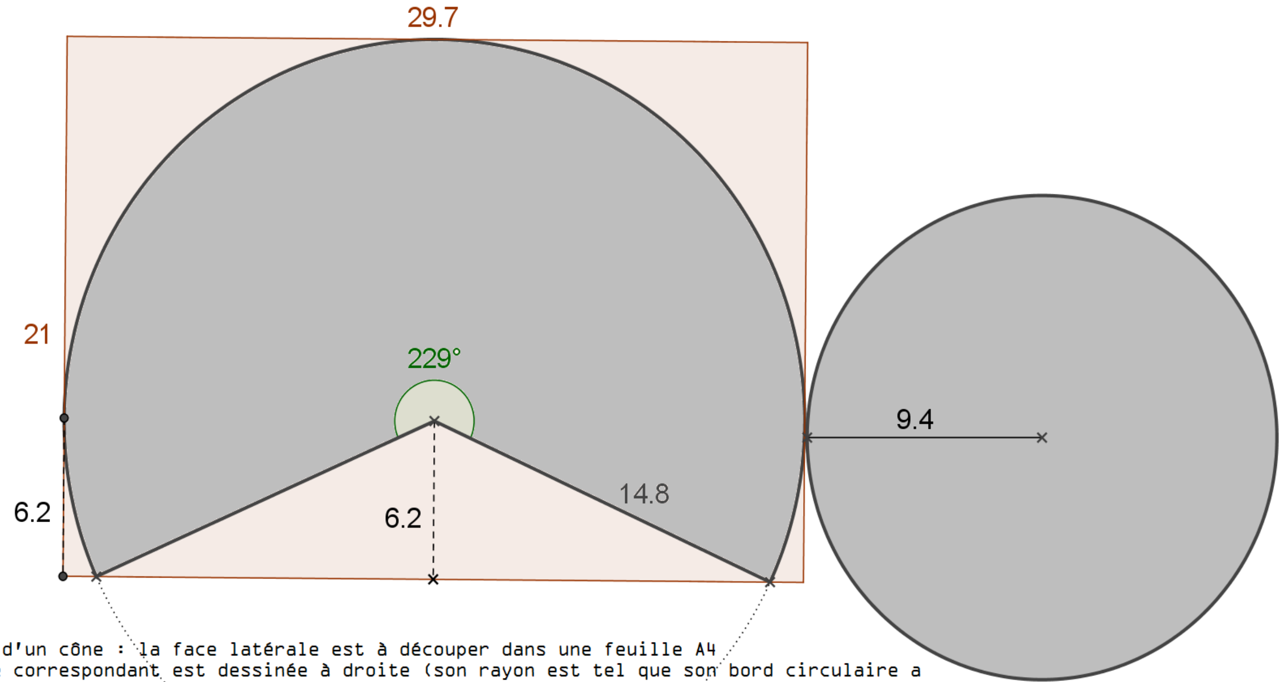
- <u>Les cônes</u> sont des solides constitués d'une base circulaire et d'un sommet, non situé dans le plan de la base. Une face latérale courbe relie le sommet au bord de la base. Dans un cône, il n'y a que deux faces (une plane et une courbe), un sommet et une arête.

1 Les solides de Platon sont les solides dont les faces sont des polygones réguliers superposables. Ils sont au nombre de cinq : le tétraèdre régulier (4 faces triangulaires), le cube (6 faces carrées), l'octaèdre régulier (8 faces triangulaires), le dodécagone régulier (12 faces pentagonales) et l'icosaèdre régulier (20 faces triangulaires).

Comme pour les pyramides, certains cônes sont réguliers, dans le sens que leur hauteur « tombe » au centre du cercle de base. Dans ce cas, on parlera plutôt de *cône de révolution* pour exprimer le fait que ce solide peut être engendré par la révolution (la rotation) d'un triangle rectangle autour d'une de ses cathètes (côtés de l'angle droit) : l'autre cathète engendre la base du cône tandis que l'hypoténuse engendre la face latérale.



La figure ci-dessous montre comment réaliser un cône de révolution : le patron de la face latérale est un secteur circulaire (un disque dans lequel on a prélevé une portion passant par le centre).
Pour ce patron, la face latérale occupe la plus grande partie d'une feuille A4 (21cm sur 29,7cm).



Patron d'un cône : la face latérale est à découper dans une feuille A4
La base correspondant est dessinée à droite (son rayon est tel que son bord circulaire a un périmètre égal à la longueur de l'arc de cercle limitant la face latérale.

Vérifions que les dimensions sont correctes : pour une génératrice de longueur 14,8 cm qui est le rayon du grand arc de cercle d'angle 229°, le rayon de la base (cercle de droite) est d'environ 9,4 cm car :

$2\pi\, 14{,}8 \times \frac{229}{360} \approx 18{,}83\,\pi$ (longueur du grand arc) approximativement égale à $2\pi\, 9{,}4 = 18{,}8\,\pi$ (périmètre de la base)

- <u>Calcul du volume (pyramide ou cône)</u>

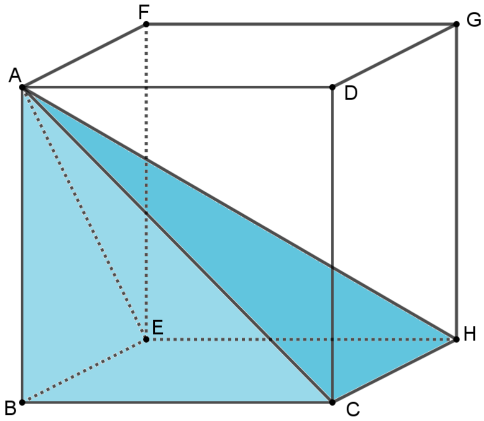
Pour une pyramide ou un cône de révolution, une seule formule s'applique pour le calcul du volume :

$$\boxed{volume = \frac{base \times hauteur}{3}}$$

Pour le cône, la base étant un disque, la formule devient $volume = \frac{\pi \times rayon^2 \times hauteur}{3}$;

de même, on peut remplacer la base d'une pyramide par la formule adaptée (c^2 s'il s'agit d'un carré de côté c, $\frac{base \times hauteur}{2}$ s'il s'agit d'un triangle en faisant attention au fait qu'on ne désigne pas la même chose par le mot base dans les deux formules, etc.).

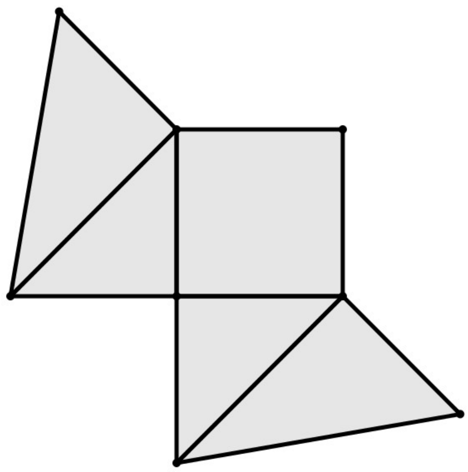
Exemple : Quel est le volume de la pyramide de Khéops sur le plateau de Gyzeh (Egypte) ?
Cette pyramide mesure 147 m de hauteur, sa base étant un carré de 230 m de côté.
Le volume de cette pyramide est donc $\frac{230^2 \times 147}{3} = 2\,592\,100$ m^3.
La pyramide de Khéphren, également sur le plateau de Gyzeh, est plus petite : 144 m de haut (à l'origine) et une base de 215 m de côté. Son volume est $\frac{215^2 \times 144}{3} = 2\,218\,800$ m^3.
La pyramide de Mykérinos, toujours au même endroit, est plus petite : 103 m de large sur 66 m de haut. Son volume est seulement de $\frac{103^2 \times 66}{3} = 233\,398$ m^3, 10 fois moins que les deux autres !

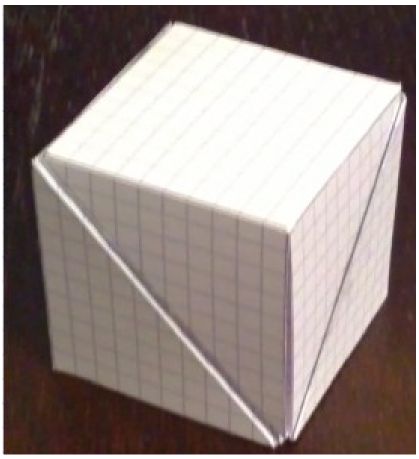


Pour un début d'explication de cette formule (pourquoi diviser par 3?), considérons un cube. On peut facilement découper ce cube en trois pyramides isométriques (de même forme et même longueur), donc trois pyramides de même volume.
J'en ai colorié deux faces de la pyramide BEHCA.
Vous visualisez cette pyramide ?
Sa base BEHC est carrée, du sommet A partent quatre faces triangulaires :

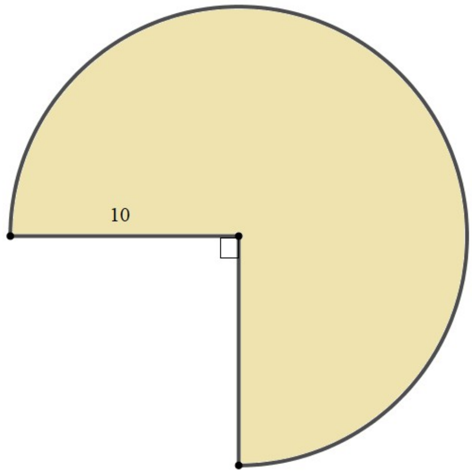
- deux sont des triangles isocèle-rectangles (des demi-carrés) ABC et ABH.
- Les deux autres sont des triangles rectangles ACH et AEH dont l'hypoténuse commune est la grande diagonale du cube AH.

Voici, ci-contre, le patron d'une telle pyramide :
Il faut en construire trois identiques pour reconstituer le cube.
Les trois sortes de longueur qu'on y trouve sont proportionnelles à ces trois nombres : 1 (côté du carré), $\sqrt{2} \approx 1,414$ (diagonale des faces carrées) et $\sqrt{3} \approx 1,732$ (grande diagonale du cube).



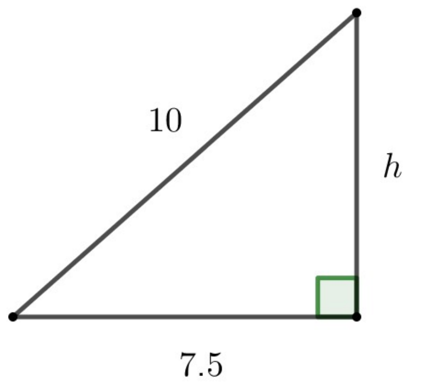


Le volume de cette pyramide est donc égale à celle du cube divisée par 3 (puisqu'il en faut 3 pour reconstituer le cube), ce qui explique la formule $\frac{base \times hauteur}{3}$ car la base est la base du cube (le carré du côté du cube, BEHC sur ma figure) et la hauteur est aussi le côté du cube (AB sur ma figure).



Exemple : on forme un cornet en enlevant un quart du disque de rayon 10 cm. Quel est le volume de ce cornet ?
Le grand arc de cercle mesure $2\pi 10 \times \frac{3}{4} = 15\pi$.
J'en déduis le rayon r de la base car $15\pi = 2\pi r \Leftrightarrow r = 7,5$.
Il va me manquer la hauteur h de ce cône de révolution, engendré par ce

triangle rectangle : son hypténuse mesure 10 cm (la génératrice du cône) et une des cathète mesure 7,5 cm (le rayon de la base). La mesure de l'autre cathète est donnée par le théorème de Pythagore : $h^2+7{,}5^2=10^2 \Leftrightarrow h=\sqrt{100-56{,}25}=\sqrt{100-56{,}25}=\sqrt{43{,}75}\approx 6{,}614$.



Le volume du cornet est donc $\dfrac{\pi\, 7{,}5^2 \times \sqrt{43{,}75}}{3} \approx 389{,}62$ cm².