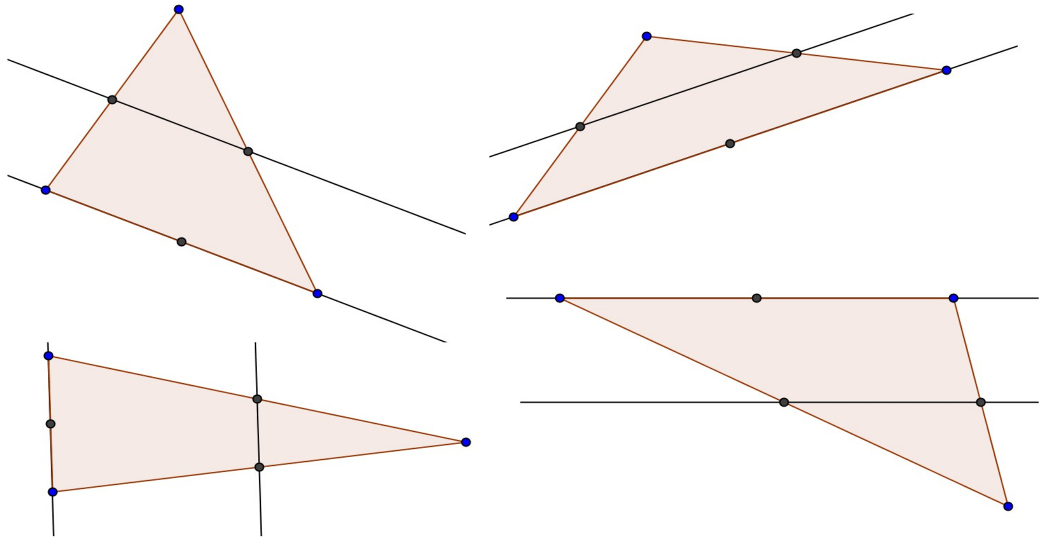
Classe de 4ème

Chapitre 6 : Triangles et Parallélisme

1) Théorème des milieux

a) Introduction expérimentale

Utilisons un logiciel de géométrie dynamique tel que GeoGebra pour construire un triangle et les milieux de ses côtés. Traçons la droite qui joint deux de ces milieux. Que constatons-nous ?



La *propriété* que nous observons (la droite qui joint les milieux est parallèle au côté correspondant) est une *conjecture*, c'est-à-dire une propriété que l'on pense vraie mais qui n'a pas encore été prouvée. Nous pouvons utiliser cette propriété supposée vraie – on l'appelle alors *hypothèse* – pour déduire d'autres propriétés de la figure, comme par exemple celle qui affirme que les trois milieux forment, avec un des sommets du triangle, un parallélogramme. Mais cette *déduction* ne sera vraie que si l'hypothèse de départ est vraie. Nous allons donc apporter la *preuve* de cette propriété, en utilisant des propriétés qui ont elles-mêmes déjà été prouvées : celles du parallélogramme étudiées en classe de 5ème.

b) Les parallélogrammes

Voici tout d'abord des *propriétés* vérifiées par tout parallélogramme
(si une figure est un parallélogramme alors elle vérifie ces six propriétés) :

P_0 : Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles, deux à deux.
P_1 : Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux, deux à deux.
P_2 : Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu.
P_3 : Un parallélogramme a un centre de symétrie.
P_4 : Les angles opposés d'un parallélogramme ont même mesure.
P_5 : Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires (leur somme fait 180°).

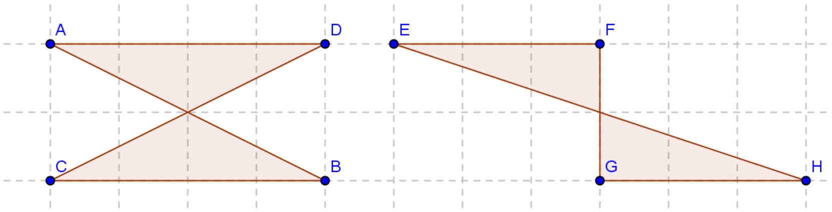
Remarque :
On peut citer d'autres propriétés dans un parallélogramme, concernant notamment les hauteurs (segments joignant un sommet à un côté opposé, perpendiculairement à ce côté) ou les médianes (segments joignant les milieux opposés), mais ces propriétés ne seront pas utiles ici.

Voici maintenant des *critères de reconnaissances* d'un parallélogramme
(il suffit de prouver une de ces propriétés pour affirmer que le quadrilatère étudié est un parallélogramme) :

P'_1 : Si un quadrilatère a <u>ses côtés opposés parallèles</u> deux-à-deux alors c'est un parallélogramme.
P'_2 : Si un quadrilatère a <u>ses diagonales qui ont le même milieu</u> alors c'est un parallélogramme.
P'_3 : Si un quadrilatère **non croisé** a <u>ses côtés opposés de même longueur</u> alors c'est un parallélogramme.
P'_4 : Si un quadrilatère **non croisé** a <u>un centre de symétrie</u> alors c'est un parallélogramme.
P'_5 : Si un quadrilatère **non croisé** a <u>deux côtés opposés parallèles et de même longueur</u> alors c'est un parallélogramme.

Remarque
La condition « le quadrilatère est non croisé » se rajoute dans certains cas, car le quadrilatère peut se trouver dans une des configurations illustrées ci-dessous, où ABCD et EFGH sont des quadrilatères croisés.

Le quadrilatère ABCD a, en effet, ses côtés opposés de même longueur, et ce n'est pourtant pas un parallélogramme. Le quadrilatère EFGH a, quant à lui, ses angles opposés de même mesure, il a aussi un centre de symétrie, et ce n'est pourtant pas un parallélogramme.

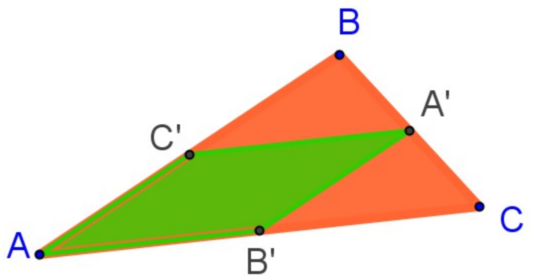


c) <u>Propriété des milieux</u>

<u>Propriété 1</u> : Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors elle est parallèle au 3ème côté de ce triangle.

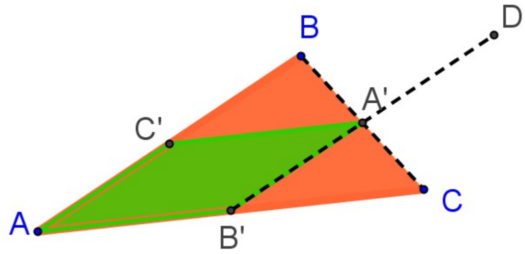
Preuve

Considérons un triangle ABC et A', B' et C' les milieux de ses côtés comme sur la figure suivante. Prouvons que le quadrilatère AB'A'C' est un parallélogramme (voir la figure du haut où il a été colorié en vert), car alors, d'après la propriété P0, les support des côtés opposés, les droites (AB') et (A'C') seront parallèles.

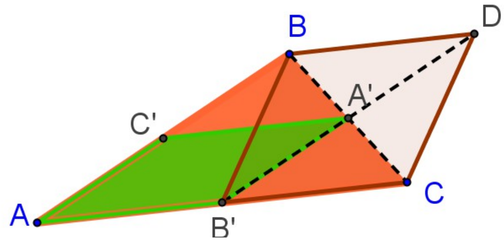


Pour cela nous allons construire le symétrique de B' par rapport à A', appelons D ce point (voir la figure du milieu).

D'après notre construction, BDCB' est un parallélogramme (voir la figure du bas où il a été colorié en brun) car c'est un quadrilatère qui a ses diagonales se coupant en leur milieu [propriété P'2]. En effet, A' est le milieu de [BC] par définition et de même, A' est le milieu de [B'D] (ceci en raison de la symétrie de centre A').
BDCB' étant un parallélogramme, les côtés opposés [B'C] et [BD] sont parallèles et de même longueur. Par ailleurs, B' étant le milieu de [AC], les segments [AB'] et [B'C] sont parallèles (ils sont situés sur une même droite) et de même longueur aussi. Le quadrilatère AB'DB a donc deux côtés opposés parallèles et de même longueur : les côtés [AB'] et [BD]. De plus, ce quadrilatère est non-croisé car par construction, D est situé à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAC}$, et donc le segment [B'D] aussi. Ce segment rejoint un point d'un côté avec un point intérieur, il ne peut donc pas couper l'autre côté [AB] de l'angle. Le quadrilatère AB'DB est donc un parallélogramme [propriété P'5].



AB'DB étant un parallélogramme, [B'D] et [AB], deux de ses côtés opposés, sont parallèles et de même longueur. Notre quadrilatère AB'A'C' a ses côtés [B'A'] et [AC'] construits sur ceux de AB'DB' ils sont donc parallèles. Comme AC' est la moitié de AB et que B'A' est la moitié de B'D, ces côtés ont même longueur. Le quadrilatère AB'A'C' a donc deux côtés opposés parallèles et de même longueur, et il n'est *évidemment*[1] pas croisé, c'est donc un parallélogramme [propriété P'5].



En effectuant cette démonstration, nous avons prouvé une deuxième propriété qu'il nous faut énoncer :

<u>Propriété 2</u> : Si un segment joint les milieux de deux côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du 3ème côté de ce triangle.

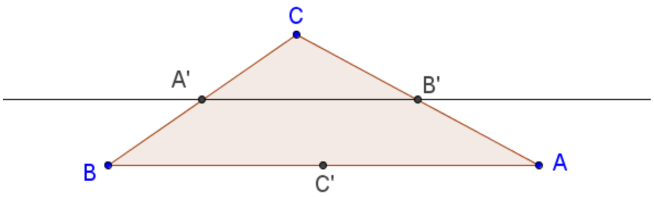
Remarque

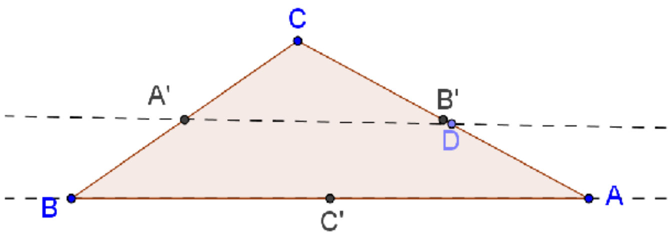
Cela vient du fait que les trois milieux forment, avec un des sommets du triangle, un parallélogramme et dans ce cas on applique la propriété P_1. Nous l'avons montré pour A'B'AC', mais cela est vrai aussi pour B'C'BA' et pour C'A'CB', les trois sommets A, B et C pouvant être interchangés.

Examinons maintenant la situation inverse (on utilise aussi le terme de propriété *réciproque*) :

1 Le terme *évidemment* évacue le problème de la démonstration qui n'est pas toujours facile (on l'a vu plus haut pour le quadrilatère AB'DB') du non-croisement des côtés d'un quadrilatère. Mais ici il s'agit d'un argument de convexité : le triangle ABC est convexe et donc, le segment [A'B'] ne peut pas couper un des côtés du triangle, ici le côté [AB] et donc [A'B'] ne peut pas couper [AC'].

Les données : un triangle et une droite parallèle à un côté qui passe par le milieu d'un autre côté.
Par exemple un triangle ABC et une droite parallèle à (AB) qui passe par le milieu A' de [BC].
Cette droite *semble* passer par le milieu B' de [AC], mais cette *observation* n'est pas une *propriété* tant qu'on en a pas apporté la *preuve*. Pour ce faire, nous allons *raisonner sur une figure volontairement fausse*, la figure de droite, où D est le point d'intersection de la parallèle à (AB) qui passe par A' et de [AC].
B' et D sont distincts sur cette figure ; et nous devons montrer que cela ne se peut pas.



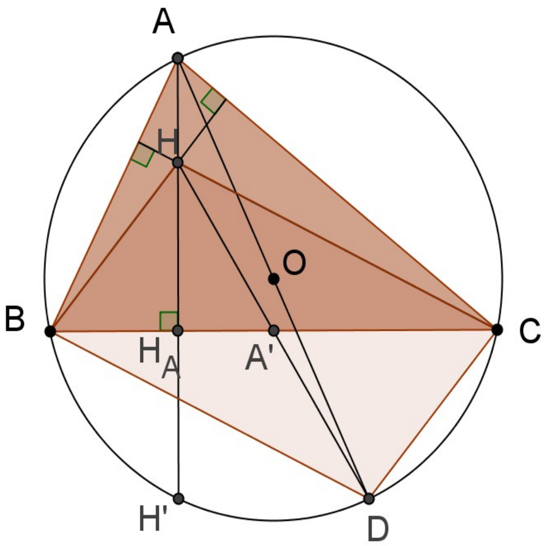


D'après notre hypothèse, la droite (A'D) est parallèle à (AB). Les points A' et B' étant les milieux de deux côtés d'un triangle, la droite (A'B') est donc aussi parallèle à (AB) [d'après la Propriété des milieux qui vient d'être démontrée]. Or, par un point ne peut passer qu'une seule droite parallèle à une droite donnée – c'est le 5$^{\text{ème}}$ *axiome*[2] d'Euclide – on en déduit que les droites (A'D) et (A'B') sont confondues ainsi que les points B' et D. Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

Propriété : Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un autre côté de ce triangle, alors elle coupe le 3$^{\text{ème}}$ côté en son milieu.

b) Exemples d'applications

Exemple n°1 :
Montrons que *les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés de ce triangle sont situés sur le cercle circonscrit au triangle*.
Nous avons tracé un triangle ABC et son cercle circonscrit qui a pour centre O (l'intersection des médiatrices). D est le symétrique de A par rapport à O et H' est le symétrique de H par rapport à (BC). Nous devons montrer que H' est sur le cercle. En permutant les sommets, ce résultat se généralisera aux deux autres symétriques de H.



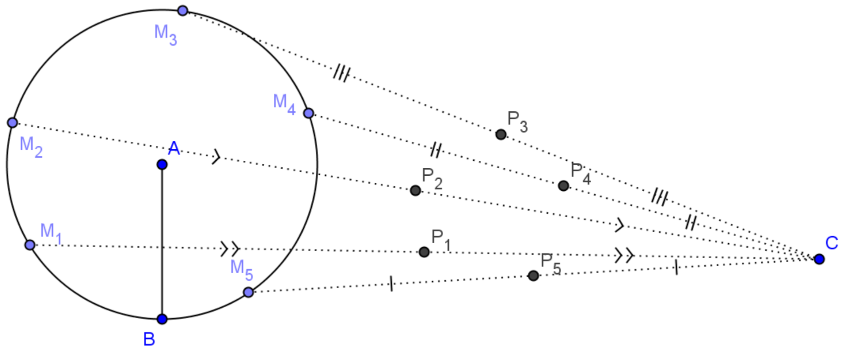
Montrons que BDCH est un parallélogramme :
(BH) et (DC) sont deux droites perpendiculaires à (AC). Elles sont donc parallèles. En effet, (BH) est la hauteur du triangle ABC passant par B, et C est un point du cercle de diamètre [AD]. De même, (CH) et (BD) sont parallèles, car elles sont toutes deux perpendiculaires à (AB).
Le quadrilatère BDCH, qui a ses côtés opposés parallèles, est donc un parallélogramme [Propriété P'1].

Le centre du parallélogramme BDCH est le milieu de ses diagonales [Propriété P2]. C'est donc A', le milieu de [BC]. On en déduit que A' est aussi le milieu de [HD]. Par construction, H_A est le milieu de [HH']. La droite (BC), passant par les milieux A' et H_A de 2 côtés du triangle HH'D, est donc, **d'après le théorème des milieux (1)**, parallèle au 3$^{\text{ème}}$ côté [H'D]. Finalement, comme le triangle AH'D est rectangle en H', son centre est le milieu de son hypoténuse. C'est donc O.
H' est donc sur le cercle de centre O passant par A.

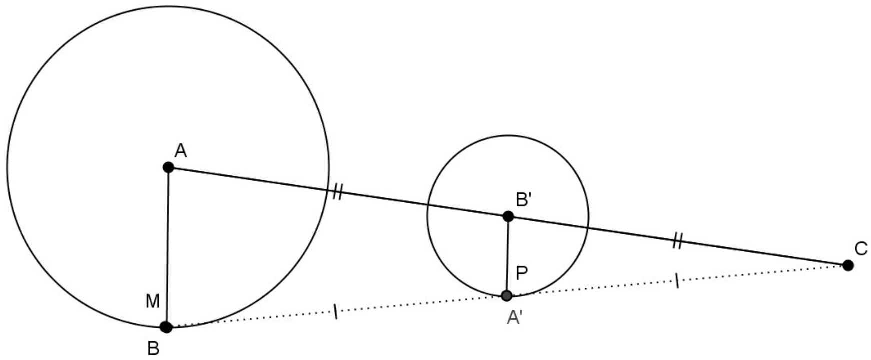
Exemple n°2 (lieu d'un point) :
ABC est un triangle, M un point du cercle de centre A passant par B et P est le le milieu de [MC].
Où se situe le point P lorsque M décrit le cercle ?

2 En logique, un *axiome* est une propriété indémontrable qu'il faut accepter car elle est naturelle. *Euclide* (−325, −265) est le premier mathématicien de l'histoire à énoncer ainsi la géométrie : d'abord une série d'axiomes (ou postulats) et ensuite des propriétés qui se déduisent de ces axiomes ainsi que des propriétés déjà démontrées. Le 5$^{\text{ème}}$ axiome dont nous parlons ici a permis de développer la géométrie euclidienne qui a longtemps été la seule géométrie existante. Aujourd'hui, des géométries non-euclidiennes existent aussi (géométries sphérique et hyperbolique).

Notons que ce que l'on cherche est un ensemble de points (ce qu'on appelle *un lieu*) et faisons une figure où le point M est placé à différents endroits du cercle (d'où les noms M_1, M_2, etc. P_1, P_2, etc. des points placés).



À partir de cette figure, peut-on se faire une idée du lieu cherché ? Oui, il semblerait que ce soit sur un cercle dont le rayon est la moitié de celui du premier cercle, et le centre est B' le milieu de [AC]. Traçons ce 2ème cercle et remarquons que M peut être confondu avec B et donc P avec A', le milieu de [BC].



Lorsque M décrit le cercle, B' et P étant les milieux de deux côtés du triangle AMC, le segment [B'P] mesure la moitié du 3ème côté [AM]. On a donc B'P = ½AM = ½AB. Comme B'P est constant, le point P est sur un cercle de centre B' qui a pour rayon ½AB.

Nous venons de montrer que si M est sur le grand cercle, alors P est sur le petit cercle. Mais tous les points du petit cercle correspondent-ils à un point du grand cercle ?

Si P est un point quelconque du petit cercle, peut-on trouver un candidat sur le grand cercle ?

Oui, il suffit de prendre le symétrique N de C par rapport à P.

D'après la 1ère propriété, B' et P étant les milieux de deux côtés du triangle ANC, le segment [B'P] mesure la moitié du 3ème côté [AN]. Donc AN est constant et vaut AN=2B'P=2B'A'=AB, le point ainsi défini est bien un point du grand cercle (en fait, M et N sont confondus).

Remarque :

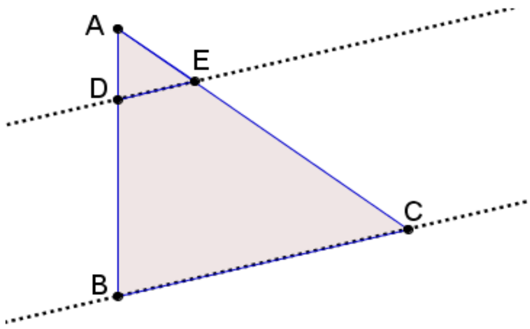
Le premier exemple est une application de la première propriété des milieux (connaissant qu'une droite passe par deux milieux, on en déduit qu'elle est parallèle au 3ème côté). Le deuxième exemple est une application de la deuxième propriété des milieux (connaissant qu'un segment passe par deux milieux, on en déduit qu'il mesure la moitié du 3ème côté). Voyons, dans la partie suivante, des applications de l'autre sens de la propriété des milieux (connaissant qu'une droite passant par un milieu est parallèle à un côté, on en déduit qu'elle passe par l'autre milieu).

2) Droites sécantes recoupant deux droites parallèles

a) *Enoncé du théorème de Thalès (sens direct)*

Approche expérimentale :

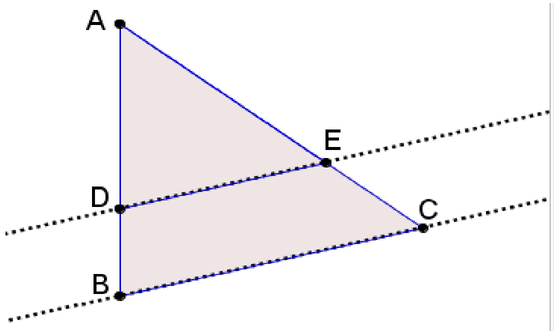
ABC est un triangle, D et E sont deux points situés respectivement sur les côtés [AB] et [AC] de ce triangle et tels que, la droite (DE) soit parallèle à la droite (BC), le support du 3ème côté [BC] du triangle.



	A	B	C
1	AB	AC	BC
2	4	5	4.12311
3	AD	AE	DE
4	1.06289	1.32861	1.0956
5	AD/AB	AE/AC	DE/BC
6	0.26572	0.26572	0.26572

En effectuant plusieurs séries de mesure, ou en utilisant un logiciel de géométrie dynamique qui permet de faire varier la position des points D et E, on s'aperçoit que les rapports de longueurs des côtés correspondants de ABC et ADE sont égaux, et par conséquent, les triangles ABC et ADE ont des côtés proportionnels. Cet unique rapport de longueur k est le coefficient multiplicateur de la situation de proportionnalité. On a donc les égalités suivantes : $k=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.

Ci-contre, la situation est la même, mais les points D et E sont plus éloignés de A : les rapports de longueurs des côtés correspondants de ABC et ADE sont toujours égaux.



	A	B	C
1	AB	AC	BC
2	4	5	4.12311
3	AD	AE	DE
4	2.72	3.4	2.80371
5	AD/AB	AE/AC	DE/BC
6	0.68	0.68	0.68

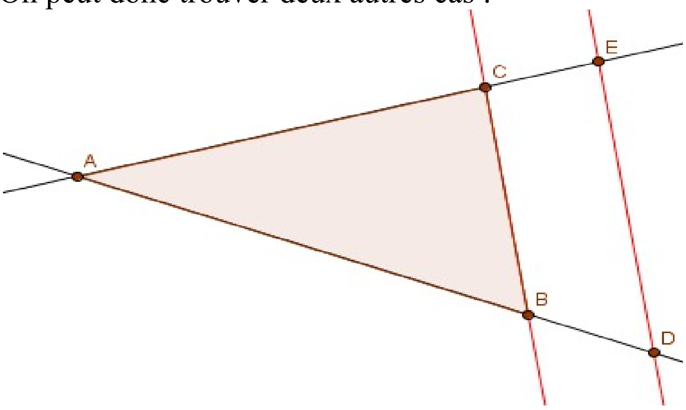
Cette propriété que nous conjecturons ici peut être énoncée ainsi :

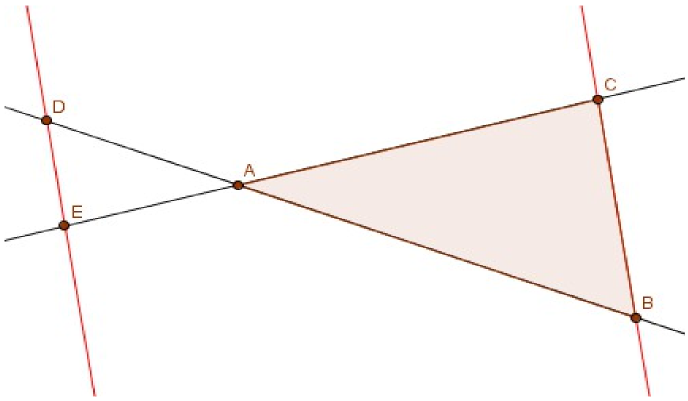
<u>Propriété de Thalès</u> : si (AB) et (AC) sont deux droites sécantes en A et si, D étant un point de [AB], la parallèle à (BC) passant par D coupe le côté [AC] en un point E alors on a : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

Approche plus rigoureuse :
Si la droite (DE) coupe les côtés [AB] et [AC] du triangle ABC parallèlement au côté [BC], alors les triangles ABC et ADE ont des côtés proportionnels. Le triangle ADE est une réduction du triangle ABC (ou bien c'est l'inverse), le coefficient de réduction étant l'un des trois rapports égaux :

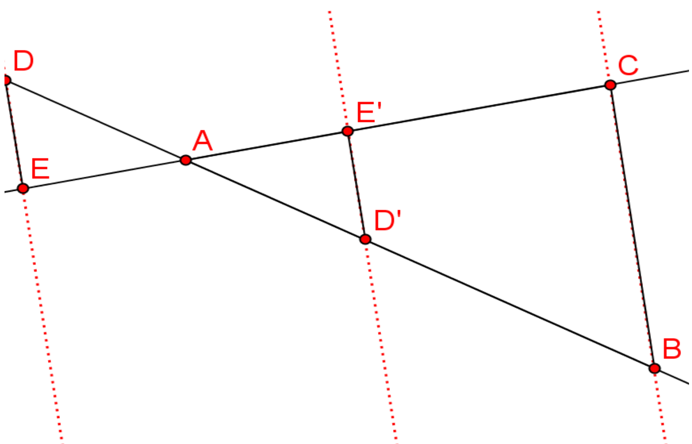
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

Cette configuration, où le triangle ADE est emboîté dans le triangle ABC, n'est pas la seule possible.
On retrouve les mêmes rapports égaux si la droite (DE) qui est parallèle à (BC) coupe, non pas les côtés du triangle ABC, mais les droites qui prolongent ses côtés, c'est-à-dire (AB) et (AC).
On peut donc trouver deux autres cas :





La configuration de gauche est semblable à la configuration initiale (triangles emboîtés), il suffit d'intervertir C avec E et B avec D. La configuration de droite (configuration *papillon*) se ramène à la configuration des triangles emboîtés lorsqu'on fait subir aux points D et E une symétrie par rapport à A : en appelant D' et E' les symétriques de D et E par rapport à A, la droite (D'E') est bien parallèle à (BC) car la symétrie centrale transforme une droite en une droite parallèle. De plus, les points A, D' et B sont bien alignés (car D, A et D' d'une part et D, A et B d'autre part le sont), de même que les points A, E' et C.



Le théorème de Thalès *direct* se généralise donc à l'ensemble de ces trois situations de la façon suivante :

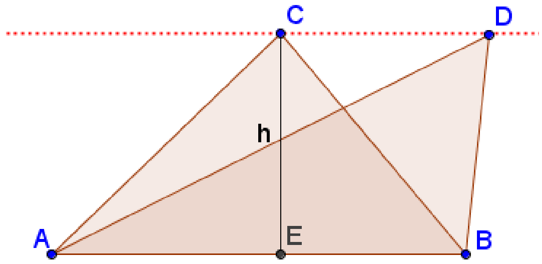
<u>Énoncé général</u> : Si deux droites sécantes d_1 et d_2 sont coupées par deux droites parallèles d_3 et d_4, alors ces droites déterminent deux triangles aux côtés proportionnels.

<u>Énoncé pratique</u> : Si (BD) et (CE) sont sécantes en A et si (BC) et (DE) sont parallèles, alors on a :

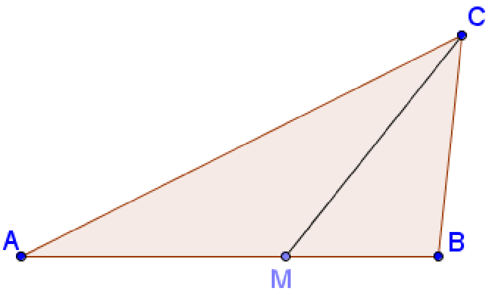
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

Remarque : on peut aussi dire « *Si D est un point de (AB) et E est un point de (AC)* » à la place de « *Si (BD) et (CE) sont sécantes en A* », cela revient au même...

b) *Démonstration du théorème* (selon Euclide)



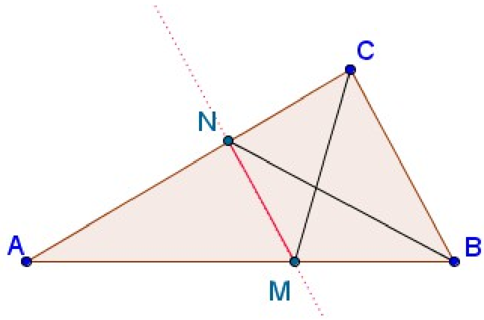
Cette démonstration est basée sur les aires de triangles. Rappelons que l'aire d'un triangle ABC est :
$Aire(ABC)=\frac{AB\times h}{2}=\frac{AB\times CE}{2}$ où h est la hauteur du triangle correspondant à la base [AB]. Deux triangles de même hauteur et de même base ont donc même aire.
C'est le cas de ABC et de ABD si (CD)//(AB).



1ère étape : établissons que si M est sur [AB] alors :
$\frac{Aire(ACM)}{Aire(BCM)}=\frac{AM}{BM}$.

En effet, $\frac{Aire(ACM)}{Aire(BCM)}=\frac{\frac{AM\times h}{2}}{\frac{BM\times h}{2}}=\frac{AM\times h}{2}\times\frac{2}{BM\times h}=\frac{AM}{BM}$.

On peut résumer cette propriété en disant que le rapport des aires de deux triangles de même hauteur est égal au rapport des bases de ces triangles. Dans la même configuration on a donc, entre autres :
$\boxed{\frac{Aire(BCA)}{Aire(BCM)}=\frac{BA}{BM}}$ car les triangles BCA et BCM ont en commun leur hauteur issue de C dont la longueur avait été notée *h*.



2ème étape : appliquons tout cela à la situation des « triangles emboîtés » ci-contre. Comme (MN)//(BC), les triangles MNB et MNC ont même aire. En ajoutant à ces deux aires l'aire du triangle AMN, on comprend que les triangles ABN et ACM ont même aire, soit $Aire(ABN)=Aire(ACM)$.
En divisant par l'aire du triangle ABC, on en déduit l'égalité des rapports $\frac{Aire(ABN)}{Aire(ABC)}=\frac{Aire(ACM)}{Aire(ABC)}$.

Il suffit alors d'appliquer deux fois le résultat précédent $\frac{Aire(ABN)}{Aire(ABC)}=\frac{AN}{AC}$ et $\frac{Aire(ACM)}{Aire(ABC)}=\frac{AM}{AB}$ pour établir que $\boxed{\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}}$. C'est la première égalité du théorème qui concerne les côtés correspondants des triangles, issus du point d'intersection.

On peut remarquer à ce stade que l'on a aussi l'égalité $\boxed{\frac{AN}{CN}=\frac{AM}{BM}}$.

Celle-ci est parfois utile (voir son utilisation dans la 3ème étape).
Cette égalité vient du fait que, comme (MN)//(BC), les triangles BCN et BCM ont même aire et en divisant l'égalité $Aire(ABN)=Aire(ACM)$ par cette aire commune, il vient $\frac{Aire(ABN)}{Aire(BCN)}=\frac{Aire(ACM)}{Aire(BCM)}$ et comme, par application de la propriété, $\frac{Aire(ABN)}{Aire(BCN)}=\frac{AN}{CN}$ et $\frac{Aire(ACM)}{Aire(BCM)}=\frac{AM}{BM}$, on en déduit le dernier résultat encadré.

3ème étape : Si on appelle h' la distance entre les droites parallèles (MN) et (BC), on a :
$\frac{Aire(MNB)}{Aire(BCM)}=\frac{MN\times h'}{BC\times h'}=\frac{MN}{BC}$.

Reprenons cette égalité en introduisant le point A sous la forme de l'aire du triangle ANB, et aussi en remarquant que BCM et BCN ont même aire :

$$\frac{MN}{BC}=\frac{Aire(MNB)\times Aire(ANB)}{Aire(BCM)\times Aire(ANB)}=\frac{Aire(MNB)}{Aire(ANB)}\times\frac{Aire(ANB)}{Aire(BCM)}=\frac{BM}{AB}\times\frac{Aire(ANB)}{Aire(BCN)}=\frac{BM}{AB}\times\frac{AM}{BM}=\frac{AM}{AB}$$

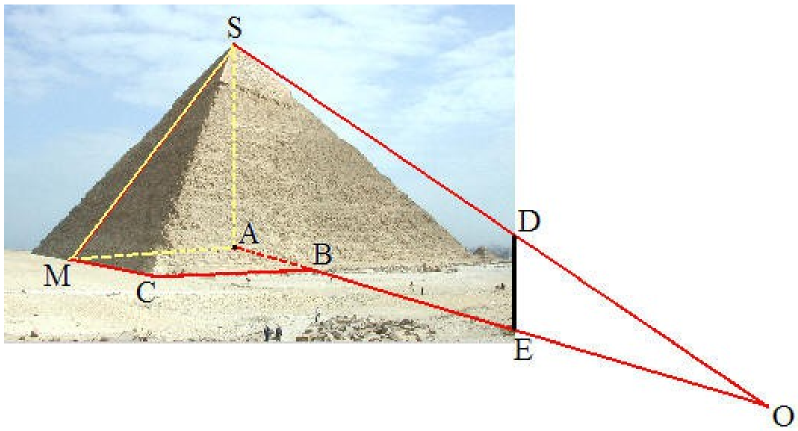
Nous avons ici utilisé deux fois le résultat de la 1$^{\text{ère}}$ étape. Une 1$^{\text{ère}}$ fois en écrivant que $\frac{Aire(MNB)}{Aire(ANB)}=\frac{BM}{AB}$ où les deux triangles ont en commun leur hauteur issue de N, et une 2$^{\text{ème}}$ fois en écrivant que $\frac{Aire(ANB)}{Aire(BCN)}=\frac{AN}{CN}=\frac{AM}{BM}$ où les deux triangles ANB et BCN ont en commun leur hauteur issue de B.

c) Applications du théorème de Thalès (sens direct)

Exemple 1 :

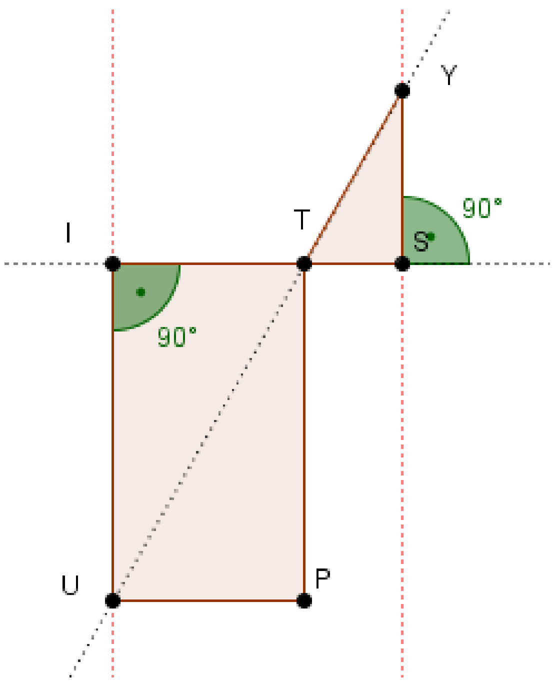
Mesure de la pyramide de Kheops en Égypte, mesure effectuée par un certain Thalès il y a près de 2600 ans. Thalès pensa que le rapport qu'il entretenait avec son ombre était le même que celui que la pyramide entretenait avec la sienne. La pyramide est de base carrée, MC = AB est le demi côté. O étant l'œil de l'observateur. Lorsque O, D et S sont alignés, on peut mesurer la hauteur SA de la pyramide en connaissant les mesures :

- d'un bâton vertical DE
- des distances OE et OA = OB+MC



Il suffit alors d'utiliser l'égalité $\frac{OE}{OA}=\frac{DE}{SA}$.

On obtient $SA=\frac{DE\times OA}{OE}$.



Exemple 2 :

Cette technique peut être utilisée pour calculer les dimensions d'objets inaccessibles (hauteurs d'un arbre, largeur d'une rivière, profondeur d'un puits, etc.) à partir d'objets mesurables. Voyons comment calculer la profondeur du puits PUIT ci-dessous à partir de trois mesures :

SY = 1,6m – ST = 0,9m – TI = 1,75m.

Tout d'abord disons pourquoi on peut appliquer le théorème de Thalès : (UY) et (SI) se coupent en T, et de plus, (SY) et (UI) sont parallèles car toutes deux sont perpendiculaires au sol (ST).

Dans ces conditions le théorème permet d'affirmer que :

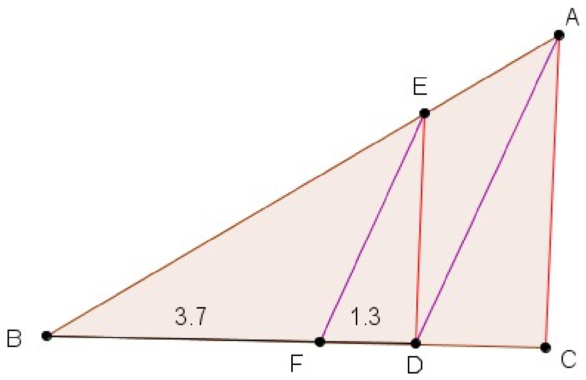
$\frac{TS}{TI}=\frac{TY}{TU}=\frac{SY}{IU}$ et en remplaçant par les valeurs numériques, on obtient $\frac{0,9}{1,75}=\frac{TY}{TU}=\frac{1,6}{IU}$ et donc :

IU = 1,6×1,75÷0,9 ≈ 3,1m.

Exemple 3 :

Parfois, les choses ne sont pas aussi immédiates. On peut être amené à utiliser deux fois le théorème comme dans l'exemple ci-dessous où (AC)//(ED) d'une part et (EF)//(AD) d'autre part. On donne deux mesures : BF = 3,7m et FD = 1,3m et on demande de calculer une longueur : DC. Pour revenir au problème de la pyramide, supposons que AD est le bord de la pyramide et qu'on ne peut mesurer directement DC. Avec ce dispositif on peut obtenir séparément deux séries de rapports égaux :

$$\frac{BF}{BD}=\frac{BE}{BA}=\frac{FE}{DA}\quad\text{et}\quad\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{BA}=\frac{DE}{CA}$$



On peut alors remarquer la présence du même rapport BE/BA dans les deux séries. On ne connaît pas ce rapport mais il permet d'établir que les cinq rapports sont égaux :

$$\frac{BE}{BA}=\frac{BF}{BD}=\frac{FE}{DA}=\frac{BD}{BC}=\frac{DE}{CA}$$

En remplaçant avec nos valeurs :

$$\frac{BE}{BA}=\frac{3{,}2}{3{,}7+1{,}3}=\frac{FE}{DA}=\frac{3{,}7+1{,}3}{BC}=\frac{DE}{CA}$$

De cela on tire $\frac{3{,}2}{5}=\frac{5}{BC}$ donc :

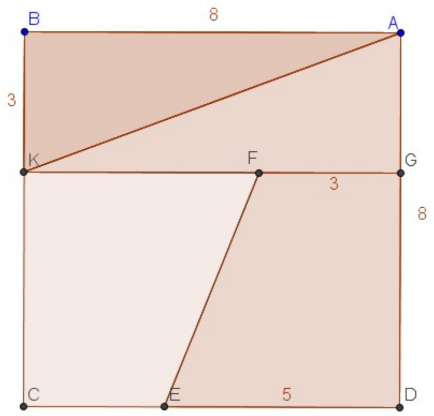
BC = 25÷3,2 = 7,8125 d'où DC = BC −BD=7,8125 −5=2,8125 m.

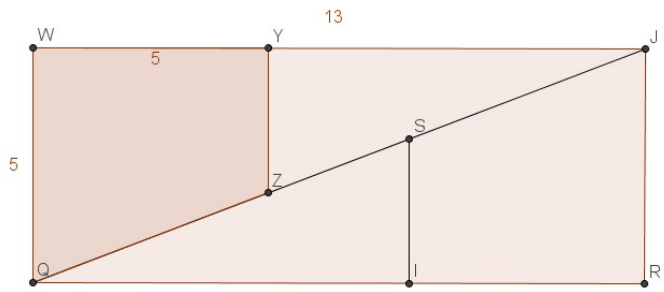
Exemple 4 :

Un autre exemple pour montrer que les **conditions d'applications** du théorème doivent être vérifiées scrupuleusement si l'on veut éviter les erreurs. Le carré ABCD ci-dessous a une aire de 64 (8×8=64). Pourtant les quatre pièces qui le composent semblent s'ajuster en un rectangle d'aire 65 (5×13=65)… Comment s'explique la disparition mystérieuse de cette unité d'aire ?

Les points J, S, Q et Z semblent alignés mais c'est faux. Si il y a avait alignement de J, Z et Q on pourrait appliquer le théorème de Thalès car (ZY) et (QW) sont parallèles par construction.

On obtiendrait une égalité des rapports $\frac{JZ}{JQ}=\frac{JY}{JW}=\frac{ZY}{QW}$ et donc $\frac{JZ}{JQ}=\frac{8}{8+5}=\frac{3}{5}$ or, manifestement ceci est faux, 8×5≠13×3. La conclusion étant fausse, on doit en conclure que l'hypothèse était fausse : les points J, Z et Q ne sont pas alignés. JSQZ est en fait un parallélogramme très aplati d'aire 1.

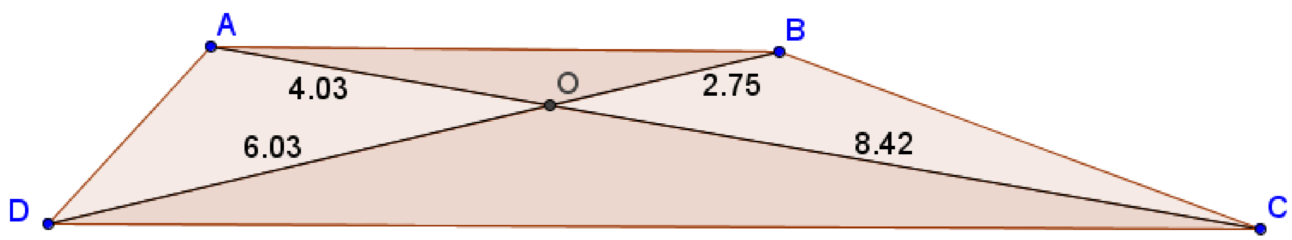




Exemple 5 :

Un dernier exemple qui est parfois confondu avec la réciproque du théorème.

Supposons que nous ayons des points ABCD comme sur la figure ci-dessous.



La question est de savoir si ABCD est un trapèze, c'est-à-dire si (AB) est parallèle à (CD). Comme ici par construction, les points A, O, C d'une part et B, O, D d'autre part son alignés, si ces droites étaient parallèles, on aurait les égalités entre rapports suivantes : $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$.

Or, en remplaçant par les valeurs numériques on trouve que cela conduit à $4{,}03\times6{,}03 = 2{,}75\times8{,}42$, ce qui est manifestement faux car $24{,}3009 \neq 23{,}155$. La conclusion étant fausse, l'hypothèse de départ, à savoir les droites (AB) et (DC) sont parallèles, est fausse. Les droites ne sont donc pas parallèles, le quadrilatère ABCD n'est donc pas un trapèze.

Remarque :
Tous les exemples ci-dessus sont des exemples d'application du sens direct du théorème. Les deux derniers exploitent une forme dite « contraposée » de ce sens direct. D'une manière générale une propriété qui peut s'énoncer ainsi « Si A est vrai alors B est vrai » a pour contraposée la propriété qui peut s'énoncer : « Si B n'est pas vrai, alors A n'est pas vrai ». Une propriété et sa contraposée sont logiquement équivalentes, c'est-à-dire que si la propriété est vraie alors la contraposée aussi, et si la propriété est fausse alors la contraposée est fausse également.

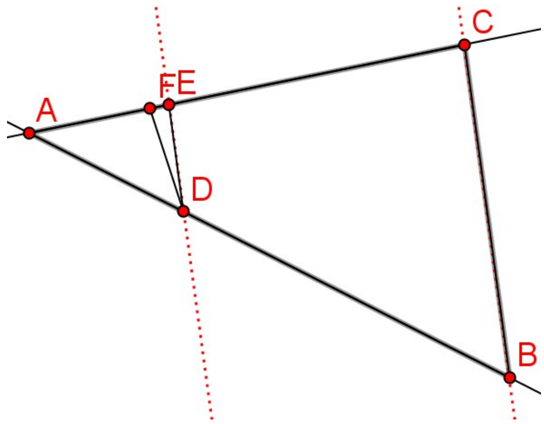
3) Sens réciproque

a) Introduction

La forme réciproque inverse les hypothèses et la conclusion d'une propriété.
La réciproque de « Si A est vrai alors B est vrai » *serait* « Si B est vrai alors A est vrai ».
Nous allons voir que dans le cas du théorème de Thalès il va falloir modifier un peu l'énoncé de la réciproque pour obtenir une propriété vraie, donc exploitable.

Première modification

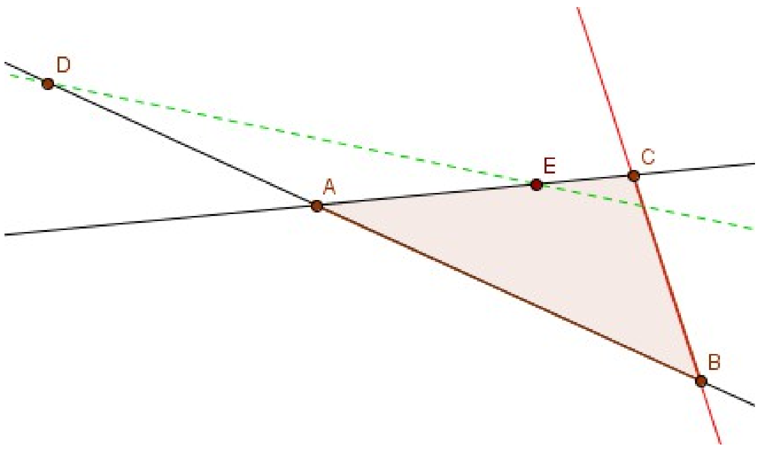
Au lieu des trois rapports égaux, on va se contenter d'en exiger deux. Par exemple, dans les conditions de la figure ci-contre (qui est fausse, comme on va le voir plus loin), si on a $\frac{AF}{AC}=\frac{AD}{AB}$ alors on peut en déduire que (FD) est parallèle à (CB). Notons en effet E le point de [AC] tel que (ED)//(CB). D'après le théorème direct de Thalès on en déduit que $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$. Par conséquent, les distances AE et AF vérifient l'égalité $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{Ac}$ qui se réduit en AE = AF. Les points E et F sont confondus, (FD) et (ED) aussi, et donc (FD)//(CB).



Cette déduction est possible grâce à l'*axiome d'Euclide* qui affirme qu'il n'existe qu'une seule droite parallèle à une direction donnée et passant par un point donné.

Deuxième modification

Pour le sens direct on exigeait que les points soient alignés trois par trois, sans plus. On disait par exemple « (EC) coupe (DB) en A ».
Pour la réciproque, on va exiger une condition supplémentaire : que ces points soient **alignés dans le *bon* ordre**. C'est-à-dire l'ordre qui conduit à une des trois configurations de Thalès. Supposons que nous ayons « (EC) coupe (DB) en A » et que $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$, mais que les points soient disposés comme sur la figure ci-dessous, où E est sur [AC] tandis que D est sur (AB) sans être sur [AB].



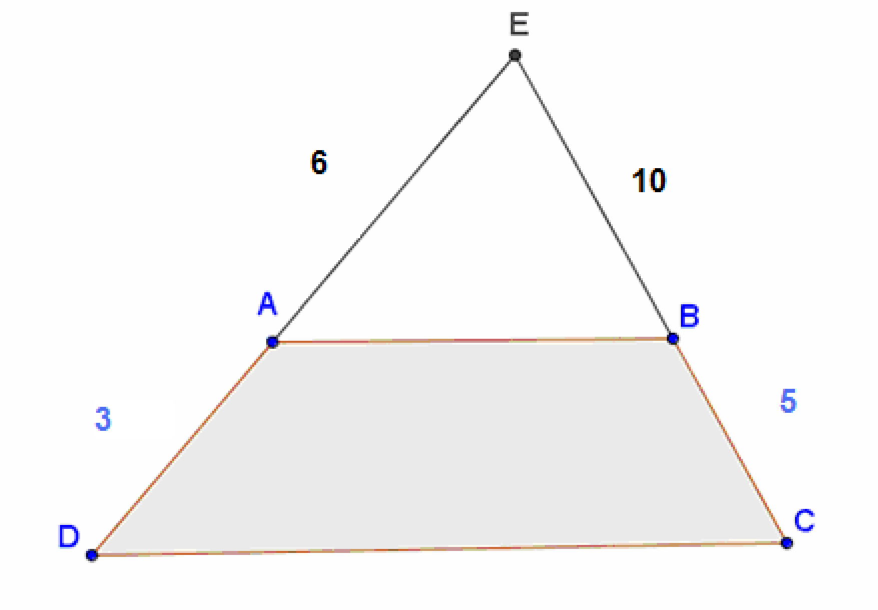
Les conditions ne sont pas suffisantes, on voit bien qu'alors les droites (ED) et (CB) ne sont pas parallèles. Il faudra donc ajouter la condition supplémentaire : « les points A, E et C d'une part et A, D et B d'autre part, sont **alignés dans cet ordre** ».
Comme on peut avoir deux autres ordres acceptables (EAC et DAB – ACE et ABD) on pourra utiliser une expression du genre « les points A, E et C d'une part et A, D et B d'autre part, sont **alignés dans le même ordre** ».

b) Énoncé et utilisation de la réciproque

Théorème réciproque : Si les points A, E et C d'une part et A, D et B d'autre part, sont **alignés dans cet ordre** et si $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=k$, alors les droites (ED) et (BC) sont parallèles, et de plus $\frac{ED}{CB}=k$.

Remarque

La conclusion de la réciproque est le parallélisme des droites. Ce parallélisme étant acquis, on peut appliquer le théorème direct qui nous donne l'égalité du 3ème rapport avec les deux autres.



Exemple 1

Pour savoir si les droites (AB) et (DC) de la figure ci-contre sont parallèles, calculons tout d'abord les deux rapports :

$$\frac{EA}{ED}=\frac{6}{6+3}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{EB}{EC}=\frac{10}{10+5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

Nous concluons que $\frac{EA}{ED}=\frac{EB}{EC}$

Comme, de plus, les points D, A et E d'une part et C, B et E d'autre part sont alignés dans cet ordre, d'après la réciproque de Thalès, les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

Exemple 2

Pour savoir si les droites (AB) et (DC) de la figure ci-dessous sont parallèles, calculons tout d'abord les deux rapports :

$\frac{EA}{ED}=\frac{7{,}14}{7{,}14+5{,}32}\approx 0{,}5730337079$ et $\frac{EB}{EC}=\frac{6{,}16}{6{,}16+4{,}46}\approx 0{,}5800376648$

Nous devons alors en conclure que $\frac{EA}{ED}\neq\frac{EB}{EC}$

D'après la contraposée du théorème direct de Thalès, les droites (AB) et (DC) ne sont donc pas parallèles.

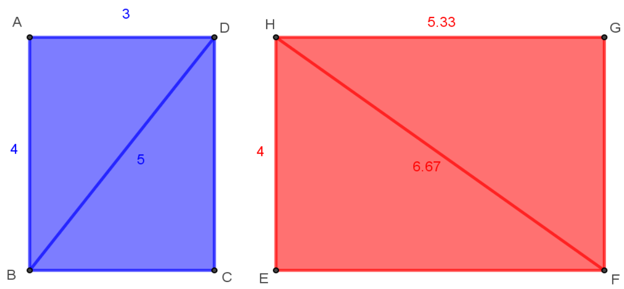
Remarque

Cet exemple n'applique pas la réciproque du théorème. Nous l'avons mis pour montrer les différences et les similitudes dans la rédaction. Notons tout de même que les rapports sont voisins, et que, par conséquent les droites sont « presque parallèles ». Les mathématiciens font une différence fondamentale entre « être » et « être presque » alors que dans la conception commune, c'est quasiment identique… Pour illustrer cet exemple nous avons utilisé une figure où les droites sont parallèles rigoureusement mais les mesures arrondies au centième conduisent à de petites erreurs qui conduisent à conclure au non parallélisme…

4) Agrandissement/réduction

a) Définition et propriété

Définition : Lorsque toutes les longueurs d'une figure A sont multipliées par un certain coefficient k, on obtient une une figure B qui est un agrandissement ou une réduction de la figure A.



Remarque :

lorsque toutes les longueurs d'une figure sont multipliées par le même nombre k, on se trouve dans une situation de *proportionnalité*. La figure obtenue a exactement *la même forme* que la figure initiale : les angles, notamment, sont respectés. On peut parler du coefficient k en terme d'*échelle* de la reproduction. Cette application de la proportionnalité a été mentionnée dans le chapitre précédent.

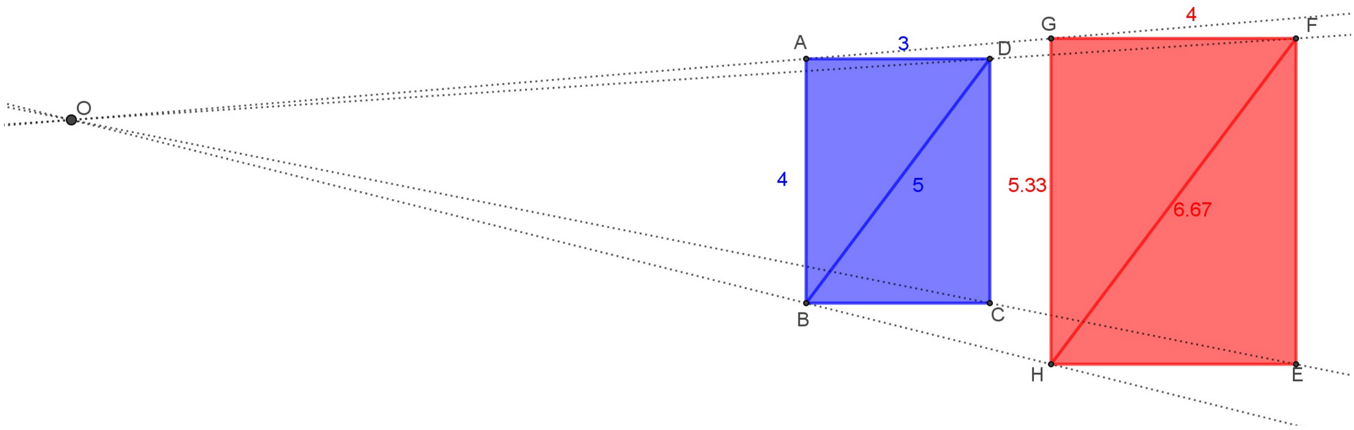
Exemple :
Sur la figure ci-dessus, le rectangle rouge *EFGH* est un agrandissement du rectangle bleu *ABCD*.
En effet, les longueurs du rectangle bleu ont toutes été multipliées par le même coefficient $k=\frac{4}{3}\approx 1{,}33$.

Rectangle bleu	$AB=CD=4$	$BC=DA=3$	$BD=AC=5$ (Pythagore)
Rectangle rouge	$EF=GH=\frac{16}{3}\approx 5{,}33$	$FG=HE=\frac{12}{3}=4$	$HF=GE=\frac{20}{3}\approx 6{,}67$

Dans cette situation, on peut dire que le rectangle bleu est une réduction du rectangle rouge, le coefficient de cette réduction étant $k'=\frac{1}{k}=\frac{3}{4}=0{,}75$.
La disposition des deux figures n'entre pas en ligne de compte pour savoir s'il y a ou s'il n'y a pas agrandissement/réduction entre les deux figures. Seules comptent les longueurs : les rapports de longueurs correspondantes doivent être égaux, ce qui garantit que les formes sont identiques.

Propriété : Dans une situation d'agrandissement/réduction, les figures ont la *même forme*.
Les angles sont conservés ; le parallélisme est conservé ; les intersections sont conservées ; un cercle agrandi reste un cercle ; une spirale agrandie reste une spirale ; etc.

Le théorème de Thalès ne s'applique pas dans la figure ci-dessus car la disposition des deux rectangles n'est pas la même. En disposant autrement ces deux rectangles, on se retrouve dans une configuration typique du théorème de Thalès.



Les droites passant par les points correspondants sont alors concourantes en un point, noté *O* sur la figure.
Dans cette disposition, on a $(AB)//(GH)$ et (AG) coupe (BH) en O, le théorème de Thalès s'applique et nous assure que $\frac{OA}{OG}=\frac{OB}{OH}=\frac{AB}{GH}=\frac{3}{4}$. On montrerait de même $\frac{OB}{OH}=\frac{OD}{OF}=\frac{BD}{FH}=\frac{3}{4}$ ou aussi $\frac{OD}{OF}=\frac{OA}{OG}=\frac{DA}{FG}=\frac{3}{4}$, etc.
On vérifierait ainsi la proportionnalité des longueurs correspondantes, ce qui était notre point de départ.

b) Deux cas particuliers

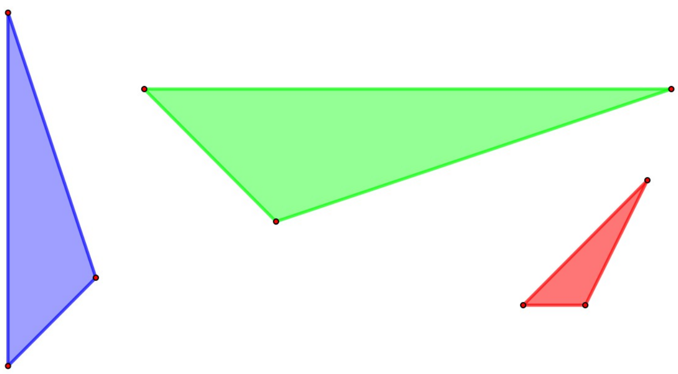
i) Triangles semblables

Définition : Deux triangles sont *semblables* s'ils ont la même forme.

Même forme signifie : longueurs proportionnelles ; angles égaux ; etc.
Un triangle est dit « semblable » à un autre s'il est un agrandissement/réduction de celui-ci.

Il y a plusieurs façons de montrer que deux triangles sont semblables.
Citons notamment :

- on montre que les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles.
- on montre que deux paires d'angles qui se correspondent ont des mesures égales (les angles de la 3$^{\text{ème}}$ paire seront alors nécessairement égaux).
- on montre que deux côtés adjacents de l'un sont proportionnels à deux côtés adjacents de l'autre et que l'angle entre ces cotés est le même.



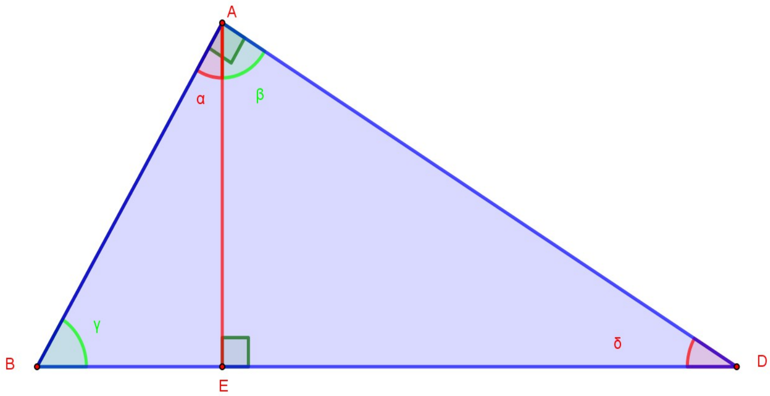
Exemple :

Dans la configuration ci-contre, *ABD* est un triangle rectangle en *A*. *E* est le pied de la hauteur issue de *A*.

On montre facilement que les triangles *ABD*, *EBA* et *EAD* sont semblables car ils ont les mêmes angles (utiliser le fait que dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires).

On en déduit des égalités portant sur les longueurs de ces triangles, par exemple :

$$\frac{BE}{BA}=\frac{BA}{BD}=\frac{AE}{AD}$$



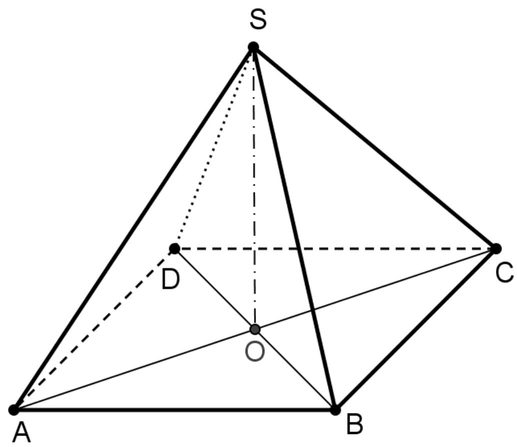
On peut en tirer certains résultats comme $BE\times BD=BA^2$.

Nous en resterons là pour l'exploitation de cette figure qui recèle plus d'une pépite...

ii) Pyramides et cônes

> *Définition* : une pyramide est une figure de l'espace tridimensionnel constituée d'une base polygonale (souvent un triangle ou un quadrilatère) et d'un sommet, non situé dans le plan de la base, d'où partent des arêtes le reliant aux sommets de la base. Les faces triangulaires ainsi formées sont appelées faces latérales de la pyramide.

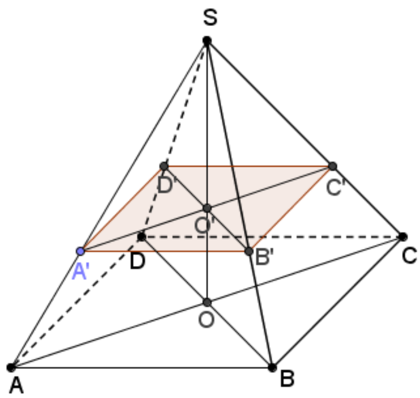
La figure ci-contre représente une pyramide *SABCD* de base carrée *ABCD*. Cette pyramide a 5 faces (la base et les 4 faces latérales *SAB*, *SBC*, *SCD* et *SDA*), 8 arêtes (les 4 côtés de la base et les 4 arêtes latérales [*SA*], [*SB*], [*SC*] et [*SD*].



> *Propriété* : une pyramide coupée selon un plan parallèle à sa base, lorsqu'on enlève la partie contenant la base, est une réduction de la pyramide de départ.

Si on coupe la pyramide *SABCD* par un plan (*A'B'C'*) parallèle au plan (*ABC*) de la base, on obtient une petite pyramide *SA'B'C'D'* qui est une réduction de la grande pyramide *SABCD*.

On démontre (en classe de 2^de^) que si le plan (*ABC*) est parallèle au plan (*A'B'C'*) alors les droites (*AB*) et (*A'B'*) sont parallèles. De cela on peut déduire, en utilisant le théorème de Thalès dans le plan (*SAB*) que $\frac{SA}{SA'}=\frac{SB}{SB'}=\frac{AB}{A'B'}=k$.



De même, dans le plan (*SBC*), on a $\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}=\frac{CB}{C'B'}=k$ et, dans le plan (*SAC*) qui contient les pieds *O* et *O'* des hauteurs des pyramides, on a $\frac{SO}{SO'}=\frac{AO}{AO}{'}=\frac{AC}{A'C'}=k$.

On voit donc que tous les rapports de longueurs sont égaux à *k*.

Il s'agit donc d'un agrandissement de rapport *k* : la grande pyramide *SABCD* est un agrandissement de la petite pyramide *SA'B'C'D'* . Réciproquement, la petite est une réduction de la grande, le coefficient de réduction étant $k'=\frac{1}{k}$ comme déjà dit plus haut.

Une conséquence importante du fait que les longueurs des arêtes sont multipliées par *k* :

- les aires des faces sont multipliées par k^2
- les volumes des pyramides sont multipliées par k^3.

Ceci s'explique avec les formules : pour calculer une aire, il faut multiplier deux longueurs entre elles et pour calculer un volume, il faut multiplier trois longueurs entre elles ; si chacune des longueurs entrant dans une formule est multiplié par k, alors le résultat sera multiplié par k^2 pour une aire et par k^3 pour un volume.

Exemple :
Supposons que le volume de $SABCD$ vaut 10 dm^3, que SA =12 cm et AA'= 1 cm.
Combien vaut le volume de $SA'B'C'D'$?
Calculons d'abord le rapport de réduction : [SA] est réduit en [SA'] donc le rapport de réduction est :

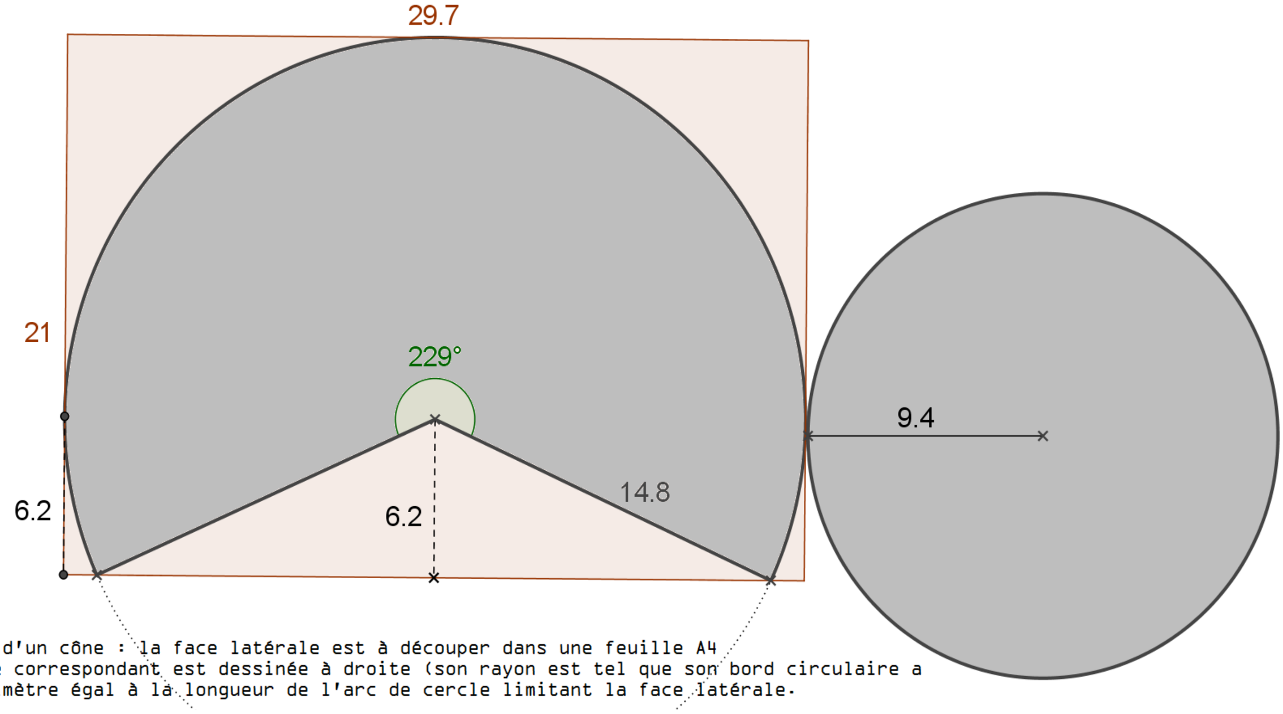
$$k=\frac{SA'}{SA}=\frac{SA-AA'}{SA}=\frac{12-1}{12}=\frac{11}{12}$$

Le volume de la petite pyramide est donc égal à celui de la grande multiplié par le coefficient $(11/12)^3$ soit :

$$10\times\left(\frac{11}{12}\right)^3=\frac{6655}{864}\approx 7{,}7 \text{ dm}^3$$

<u>Définition</u> : un cône est une figure de l'espace tridimensionnel constituée d'une base circulaire et d'un sommet, non situé dans le plan de la base. Une face latérale courbe relie le sommet au bord de la base. Dans un cône, il n'y a que deux faces (une plane et une courbe), un sommet et une arête.

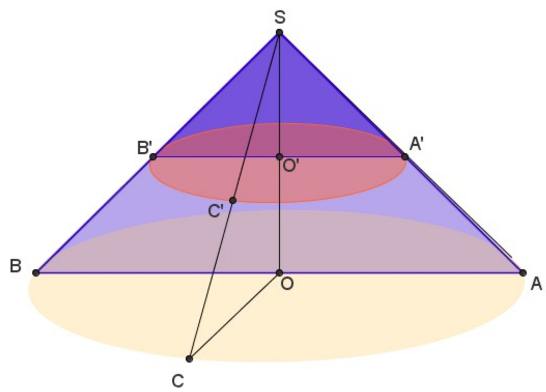
La figure ci-dessous montre comment réaliser un cône : le patron de la face latérale est un secteur circulaire (un disque dans lequel on a prélevé une portion passant par le centre). Pour ce patron, la face latérale occupe la plus grande partie d'une feuille A4 (21cm sur 29,7cm).



Patron d'un cône : la face latérale est à découper dans une feuille A4
La base correspondant est dessinée à droite (son rayon est tel que son bord circulaire a un périmètre égal à la longueur de l'arc de cercle limitant la face latérale.

<u>Propriété</u> : un cône coupé selon un plan parallèle à sa base est une réduction du cône de départ.

Exemple
Dans la figure ci-contre le cône de sommet S a pour base le disque de centre O et de rayon OA=5m, et pour hauteur SO=6m.
Si O' est le milieu de [SO], le rapport de réduction est ½. Le volume du petit cône (celui qui a pour sommet S et pour base le disque de centre O' et de rayon $O'A'$) sera donc égal à $(1/2)^3$ fois celui du grand. Calculons le volume du grand cône : la base est un disque de rayon 5m, son aire est donc égale à $\pi\times 5^2$ soit 25π m^2.
Le volume du grand cône est donc :



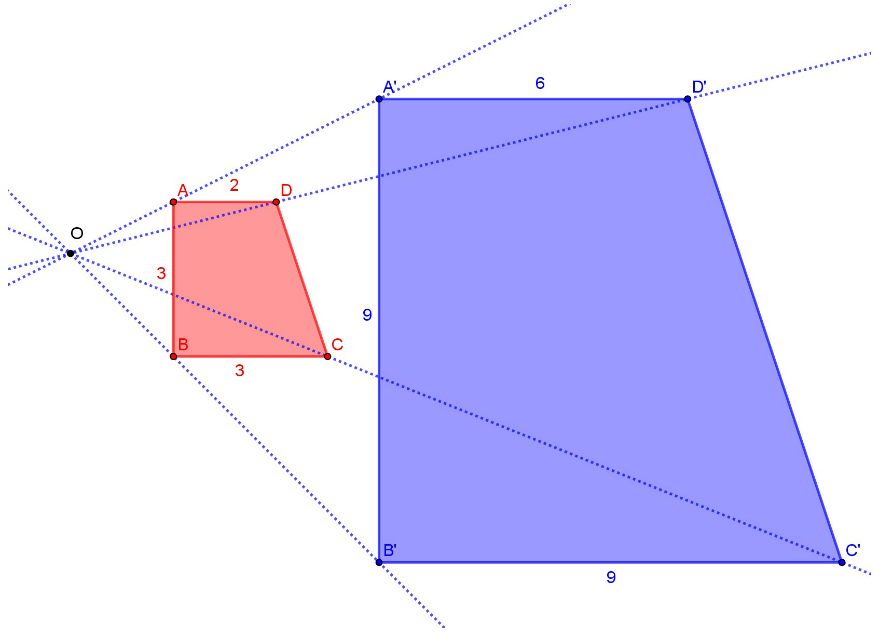
$$v=\frac{Base\times hauteur}{3}=\frac{25\pi\times 6}{3}=50\pi\approx 157 \text{ m}^3.$$

Par conséquent, le volume du petit cône est $0{,}125\times\pi\times 50 = 6{,}25\,\pi \approx 20$ m^3.

c) Homothétie

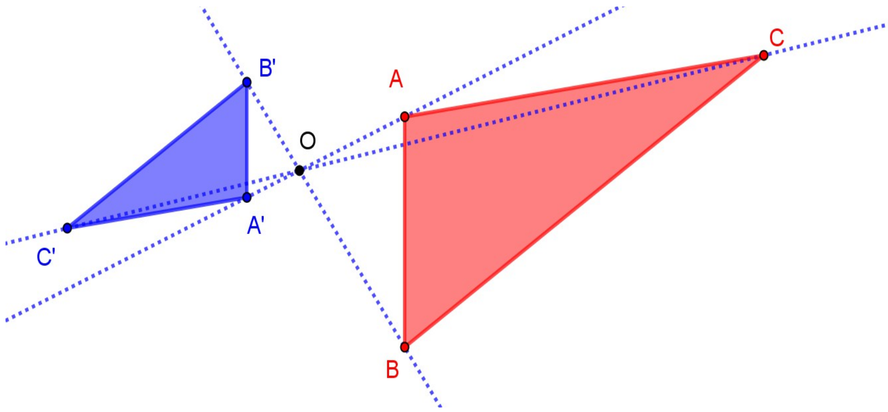
Définition : Une homothétie est une transformation géométrique (au même titre que la symétrie axiale, la symétrie centrale, la rotation ou la translation) qui est définie par un point, appelé le *centre de l'homothétie*, et un nombre, appelé le *rapport de l'homothétie*. Si un point A et transformé en un point A', on dit que A' est l'*image* de A. L'image A' d'un point A par la symétrie de centre O et de rapport $k>0$ est le point de $[OA)$ tel que $OA'=k\times OA$.
NB : Si $k<0$ alors A' est sur la droite (OA) mais pas sur la demi-droite $[OA)$, autrement di $O\in[AA']$.

L'homothétie a sa place dans ce chapitre car elle est la traduction, dans le langage des transformations, de la situation d'agrandissement/réduction, elle-même étant une application du théorème de Thalès.
Le rapport k est bien sûr, ce rapport d'agrandissement (si $k>1$) ou de réduction (si $k<1$).
Le centre de l'homothétie est le point d'intersection des sécantes dans la configuration de Thalès (ici noté O).



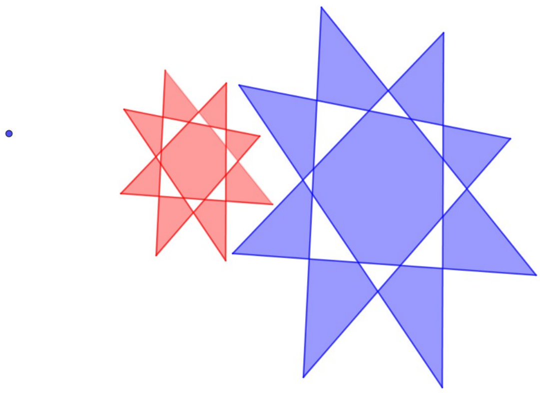
Deux figures pour illustrer la notion d'homothétie :

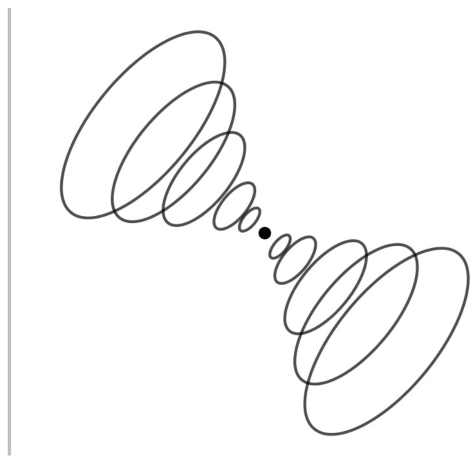
- en haut, le rapport de l'homothétie qui transforme le trapèze $ABCD$ en $A'B'C'D'$ est k=3. Le trapèze de départ est agrandi et son image située du même côté du centre de l'homothétie.
- En bas, le rapport de l'homothétie qui transforme le triangle ABC en $A'B'C'$ est $k=\frac{-1}{2}$. Le trapèze initial est réduit et son image est située de l'autre côté du centre de l'homothétie.



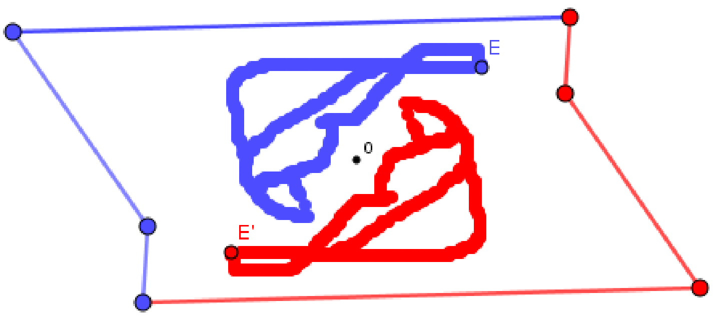
Remarque : une homothétie de rapport négatif ($k<0$) conduit à un retournement de la figure (le point B du triangle est en bas alors que le point B' du triangle image est en haut) alors qu'une homothétie de rapport positif ($k<0$) n'opère pas de retournement (le point B du trapèze est en bas à gauche de même que le point B' du trapèze image).

L'homothétie est un outil à connaître et à utiliser dans un logiciel tel que Geogebra : les figures ci-contre ont été réalisées en quelques secondes seulement à l'aide de cet outil.



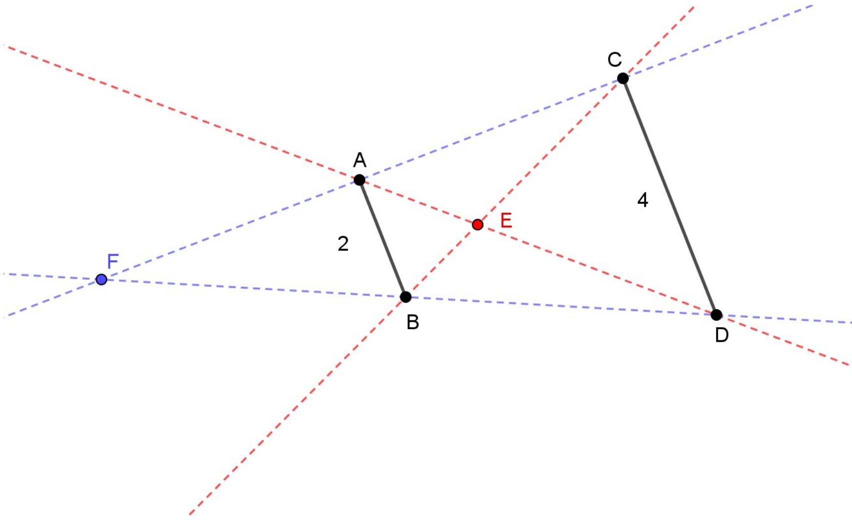


Cas particuliers
La <u>symétrie centrale</u> de centre O est une homothétie de centre O ; son rapport est $k = -1$.
Cette homothétie spéciale ne produit pas d'agrandissement puisque le rapport d'agrandissement/réduction des longueurs vaut 1, elle produit juste le retournement puisque k est négatif.



Remarque : une autre homothétie ne produit ni agrandissement/réduction ni retournement : c'est l'<u>identité</u>, l'homothétie de rapport $k = 1$.

Question
Soient deux segments parallèles $[AB]$ et $[CD]$, existe t-il une homothétie qui transforme un de ces segments en l'autre, et si oui, où est situé son centre et quel est son rapport ?
Réponse
Non seulement il en existe une, mais il en existe quatre. Sur l'image ci-contre, on a noté E l'intersection de $[AD]$ et $[BC]$ et F l'intersection de $[AC]$ et $[BD]$:



- L'homothétie H_1 de centre E et de rapport $k = -2$, transforme A en D et B en C.
- L'homothétie H_2 de centre E et de rapport $k = \frac{-1}{2}$, transforme D en A et C en B.
- L'homothétie H_3 de centre F et de rapport $k = 2$, transforme A en C et B en D.
- L'homothétie H_4 de centre F et de rapport $k = \frac{1}{2}$, transforme C en A et D en B.

Application
J'ai une figure complexe à réduire, par exemple le plan de ma chambre.
Supposons que je me fixe le rapport de la réduction (l'échelle de mon plan) à $|k| = \frac{1}{4}$.
Une homothétie va m'aider à réaliser ce plan : je commence par tracer un segment réduit (sur ma figure je trace $[A'B']$, parallèle à $[AB]$ et tel que $A'B' = \frac{AB}{4}$), j'en déduis l'emplacement du centre O de l'homothétie qu'il me faut utiliser. Je trace ensuite les autres éléments en utilisant toutes les propriétés de l'homothétie.

Comme j'ai fait cette figure avec GeoGebra, je peux utiliser l'outil « homothétie » de Geogebra. Il suffit d'indiquer successivement :

- l'objet à réduire.
- le centre. Ici le point O que j'ai construit au préalable.
- le rapport. Ici, j'ai utilisé le rapport $\frac{-1}{4}$ car j'ai placé le point O entre $[A'B']$et $[AB]$.