Classe de $4^{ème}$	Chapitre 5 : Proportionnalité

Le programme extrait du Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008

Capacités : **Proportionnalité. Utilisation de la proportionnalité.** Quatrième proportionnelle. *Représentations graphiques.* **Grandeurs quotients courantes.** *Vitesse moyenne.*

Connaissances : Déterminer une quatrième proportionnelle. *Déterminer le pourcentage relatif à un caractère d'un groupe constitué de la réunion de deux groupes dont les effectifs et les pourcentages relatifs à ce caractère sont connus. Utiliser dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité par l'alignement de points avec l'origine. Calculer des distances parcourues, des vitesses moyennes et des durées de parcours en utilisant l'égalité d=vt. Changer d'unités de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure).*

Commentaires : Aux diverses procédures déjà étudiées s'ajoute le « produit en croix » qui doit être justifié. *Des situations issues de la vie courante ou des autres disciplines permettent de mettre en œuvre un coefficient de proportionnalité exprimé sous forme de pourcentage.* Dans le cadre du socle commun, utiliser l'échelle d'une carte pour calculer une distance, calculer un pourcentage deviennent exigibles. Calculs faisant intervenir des *pourcentages. Cette propriété caractéristique de la proportionnalité prépare l'association, en classe de troisième, de la proportionnalité à la fonction linéaire.* La notion de vitesse moyenne est définie. Le vocabulaire « kilomètre par heure » et la notation km/h, issus de la vie courante, *sont à mettre en relation avec la notation $km.h^{-1}$.* Les compétences exigibles ne concernent que les vitesses mais d'autres situations de changement d'unités méritent d'être envisagées : problème de change monétaire, débit, consommation de carburant en litres pour 100 kilomètres ou en kilomètres parcourus par litre.

1) Proportionnalité

a) Rappels

Définition : Une situation est dite de proportionnalité lorsque deux grandeurs (2 séries de nombres) sont reliées par un même coefficient multiplicateur (appelé coefficient de proportionnalité).

Exemple : les longueurs en cm et les longueurs en *inches* (pouces) sont reliées par un même coefficient multiplicateur. Comme 1 *inch* = 2,54 cm, on en déduit que pour passer d'une longueur en pouces à une longueur en cm, il faut multiplier par 2,54. Dans l'autre sens, il faut diviser par 2,54. Illustrons cette situation par le tableau de proportionnalité suivant,

Longueur en pouces	1	2	10	1÷2,54≈0,3937	≈3,937
Longueur en cm	2,54	5,08	25,4	1	10

Dans une situation de proportionnalité, le coefficient peut être obtenu par un quotient. Pour passer de a à b, il faut multiplier par le coefficient $\frac{b}{a}$. En effet, en supposant que $a \neq 0$ si $a \times x = b$ alors on doit avoir $x = \frac{b}{a}$ car $a \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{a} = b$ comme on l'a vu dans la partie précédente.

Cela nous donne un moyen de contrôler qu'une situation est bien une situation de proportionnalité : il suffit de vérifier que les coefficients obtenus sont égaux.

Exemple : Un automobiliste a noté les distances parcourues (en km) et le volume d'essence qu'il a utilisé pour les parcourir (en L). Si on calcule les coefficients multiplicatifs qui permettent de passer de V (les Volumes d'essence) à D (les Distances parcourues), on s'aperçoit qu'**ils ne sont pas égaux** et donc, que **la situation n'est pas une situation de proportionnalité**.

D=Distances (km)	570	620	350
V=Volumes d'essence (L)	40	44	24
Coefficient D/V	14,25	14,0909...	14,5833...

Généralement, on utilise la situation de proportionnalité comme un *modèle* mathématique, qui permet de prévoir des résultats. Par exemple, dans la situation précédente (l'automobiliste et sa consommation d'essence), *on peut penser qu'il y a proportionnalité* entre D et V. Cela permet d'estimer des consommations (V) connaissant les distances (D) ou le contraire (estimer D connaissant V). On peut compléter le tableau de proportionnalité avec le coefficient calculé sur une valeur.

D=Distances (km)	570	620	24×14,25=342
V=Volumes d'essence (L)	40	620÷14,25=43,50877...≈43,5	24
Coefficient D/V	14,25	Coefficient estimé : 14,25	Coefficient estimé :14,25

Règle de trois : cette règle, étudiée au primaire, permet de calculer une $4^{ème}$ proportionnelle (le $4^{ème}$ nombre d'une situation de proportionnalité où on en connaît déjà 3) par un passage à l'unité.

Supposons que nous connaissions 3 nombres a, b et c et que nous voulions calculer d, le 4ème nombre d'une situation de proportionnalité entre les séries (a, c) et (b, d). Remarquons que le passage à l'unité revient à calculer un coefficient de proportionnalité.

Grandeur 1	a	1	$c=1\times c$
Grandeur 2	b	$b\div a$	$\boldsymbol{d=(b\div a)\times c}$

<u>Exemple</u> : 10 poules ont pondu 15 œufs en 3 jours, combien vont-elles en pondre en 5 jours ? La méthode employée utilise naturellement le passage à l'unité (elles pondent 5 œufs en 1 jour). Pour 5 jours, elles pondront donc 5×5=25 œufs (en supposant qu'il y a proportionnalité).
Attention à la question : 10 poules ont pondu 15 œufs en 3 jours, combien vont pondre d'œufs 20 poules en 6 jours ? En doublant à la fois le nombre de poules et le nombre de jours, la ponte sera multipliée par 4 : 10 poules en 6 jours pondent 30 œufs et donc 20 poules en pondront 60.

Propriétés supplémentaires dans un tableau de proportionnalité :

Grandeur 1	a	$2a$	$3a$	$k\times a$	c	$a+c$	$k\times a+k'\times c$
Grandeur 2	b	$2b$	$3b$	$k\times b$	d	$b+d$	$k\times b+k'\times d$

Pour reprendre notre exemple sur des poules pondant 15 œufs en 3 jours, elles pondent 30 œufs en 6 jours (k=2), 45 œufs en 9 jours (k=3), etc. et comme elles pondent 5 œufs en 1 jours (k=1/3) elles pondent aussi 50 œufs (45+5 ou 5×10) en 10 jours (9+1 ou 1×10).
Les dernières propriétés dont on parle ici sont liées à la *distributivité* de la multiplication sur l'addition : en effet si on note C le coefficient de proportionnalité tel que b=C×a et c=C×d, alors $a+c$= C×a+ C×d= C×($a+d$).

<u>Application 1</u> : Pourcentages.
Calculer un pourcentage s'est chercher une 4ème proportionnelle.
Par exemple, dans une population de 125 000 personnes, il y a 43 000 personnes qui parlent la langue A. Cela représente quel pourcentage ?

Population totale	125000	100
Parlant la langue A	43000	?

Le nombre cherché (le taux du pourcentage) est égal à 100×43 000÷125 000=34,4. Il y a donc 34,4% de la population qui parle la langue A. On pourrait donner d'autres fractions pour indiquer cette proportion, par exemple on pourrait dire qu'il y a 344 personnes sur 1000 qui parlent la langue A.

<u>Application 2</u> : Échelles des cartes.
Sur une carte géographique ou un plan on représente la réalité en appliquant un coefficient de proportionnalité (l'échelle e) inférieur à 1. On dit, dans ce cas, que la carte est une *réduction* de la réalité de coefficient e. L'échelle est souvent donnée sous la forme d'une fraction dont le numérateur est 1.
Par exemple, une carte au 1/25000ème est une réduction de coefficient $\frac{1}{25000}=0{,}00004$. Cela signifie que 1 cm sur la carte représente 25 000 cm dans la réalité, soit 250 m ou 0,25 km.

Longueur réelle	25000	?	?	1	1250
Longueur sur la carte	1	1,2	25	?	?

Pour une longueur réelle de 1 km, la longueur sur la carte sera de 0,00004 km (le coefficient donné par l'échelle), soit 0,04 m ou encore 4 cm.
Ce qui a été dit dans le cas général est applicable ici. Les nombres cherchés dans le tableau sont des 4ème proportionnelles. Par exemple, 1,2 cm sur la carte représente 1,2×25000=30000 cm = 300 m dans la réalité. 1250 m dans la réalité sont représentés par 1250×1÷25000=0,05 m = 5 cm sur la carte.

Remarque : Certaines représentation sont des *agrandissements* de la réalité. Par exemple, une photo prise au microscope ou encore le plan d'un composant électronique. Dans ce cas, on parlera aussi d'échelle, mais cette fois l'échelle sera supérieure à 1, et donc on ne l'exprimera pas sous la forme d'une fraction de dénominateur 1, mais sous la forme d'un entier. On dira que la photo d'un organisme est à l'échelle 200 (on peut dire aussi 200:1) si 1 mm dans la réalité est représenté par 200 mm (20 cm) sur la photo de l'organisme.

b) Produit en croix

Le produit en croix est une propriété qui va nous permettre de calculer une 4$^{\text{ème}}$ proportionnelle « sans réfléchir ». Elle vient de la condition d'égalité entre 2 fractions suivante :

Deux fractions sont égales $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=0$, c'est-à-dire si $\frac{a\times d}{b\times d}-\frac{c\times b}{d\times b}=\frac{a\times d-c\times b}{b\times d}=0$ et donc si $a\times d-c\times b=0$, c'est-à-dire si $a\times d=c\times b=b\times c$. Pour savoir si 2 fractions sont égales, on compare donc les produits croisés des numérateurs par les dénominateurs $a\times d$ et $b\times c$.

Exemples : A t-on $\frac{22}{7}=\frac{314}{100}$? On compare 22×100 et 7×314 c'est à dire 2200 et 2191.

2200≠ 2191 et donc $\frac{22}{7}\neq\frac{314}{100}$.

A t-on $\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$? Oui, car 3×100=300 et 4×75=300. 3×100=4×75 et donc $\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$.

De cette dernière égalité (les produits en croix), en divisant par un des 4 nombres, on en tire 4 autres qui vont permettre de calculer un nombre connaissant les 3 autres. Par exemple si on divise l'égalité des produits en croix par $a\neq 0$, on obtient : $\frac{a\times d}{a}=\frac{b\times c}{a}$ qui se simplifie en $d=\frac{b\times c}{a}$. Cette dernière égalité permet de calculer d connaissant a, b et c. D'une façon générale, les nombres a, b, c et d étant non nuls,

Propriété : Si les nombres a, b, c et d sont non nuls, les 6 égalités suivantes sont équivalentes (sont vraies simultanément) : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $a\times d=b\times c$; $a=\frac{b\times c}{d}$; $b=\frac{a\times d}{c}$; $c=\frac{a\times d}{b}$; $d=\frac{b\times c}{a}$

Application : dans la situation de proportionnalité, on va pouvoir effectuer les calculs nécessaires sans se préoccuper de « passage à l'unité » ou de coefficient de proportionnalité.

Grandeur 1	123	$?=\frac{123\times 789}{456}$	789
Grandeur 2	456	789	$?=\frac{456\times 789}{123}$

Remarquons tout de même qu'il ne s'agit ici que d'obtenir plus facilement (sans réfléchir) un résultat que l'on sait obtenir par d'autres méthodes. Toutes les méthodes vues n'enlèvent pas la cohérence des résultats mais, au contraire, la renforcent.

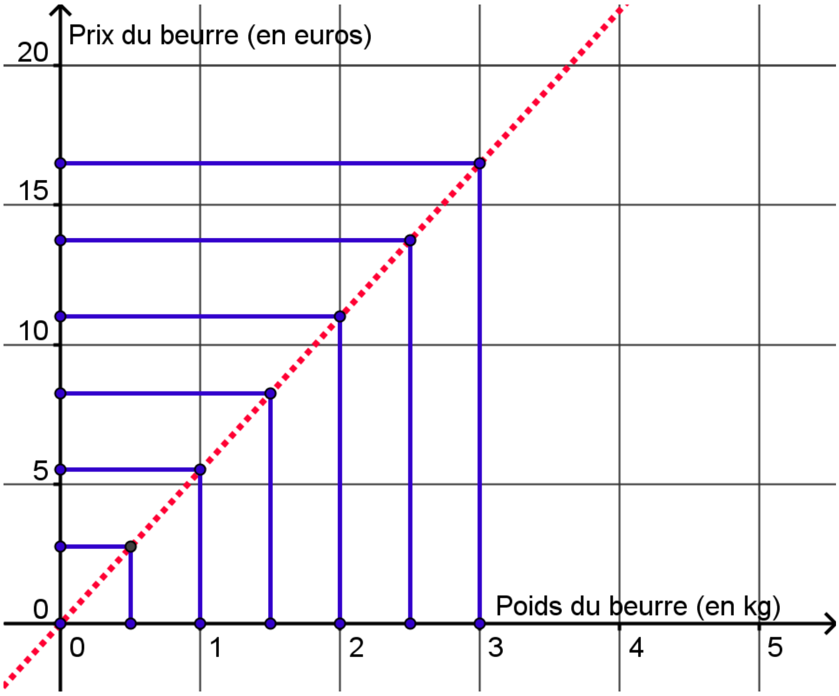
c) Représentation graphique d'une situation de proportionnalité

Pour visualiser une situation de proportionnalité, il est intéressant de placer dans un graphique, les points correspondant au tableau de données : on choisit de représenter le couple de nombres (grandeur 1 ; grandeur 2) par le point de coordonnées (x ;y). L'abscisse x du point correspond à la grandeur 1, l'ordonnée y à la grandeur 2 (remarque : on aurait pu choisir de faire l'inverse).

Exemple : Au marché, le prix du beurre est proportionnel à sa masse (et réciproquement), le coefficient de proportionnalité étant le *prix du kilo* de beurre. Notons x le prix du beurre et y la masse de beurre achetée (le poids dirait-on), le couple de nombres (x ;y) correspondant à une colonne du tableau de proportionnalité sera représenté par un point dans le graphique. Prenons l'exemple d'un beurre coutant 5,5€/kg.

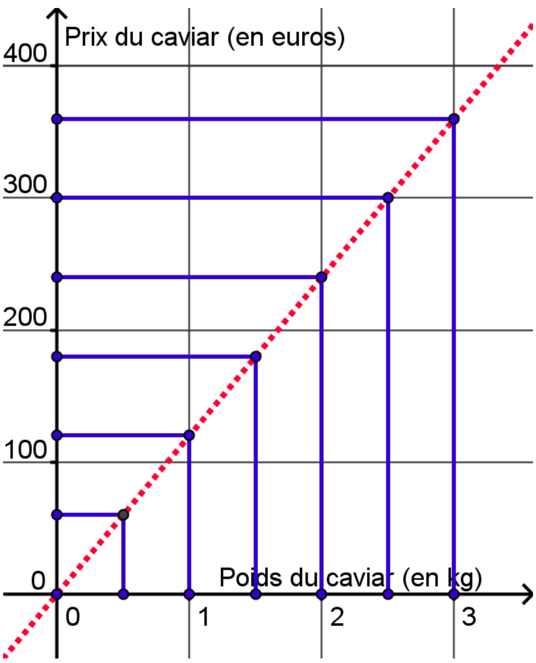
Prix du beurre (en euros)	5,5	11	2,75	8,25	13,75	1
Poids du beurre (en kg)	1	2	0,5	1,5	2,5	?

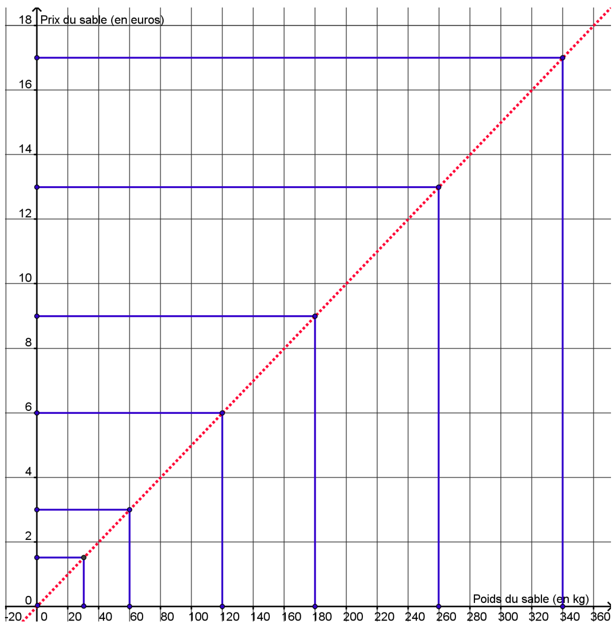
Lorsqu'on place les points du tableau dans le graphique, on s'aperçoit que **les points sont alignés** et que **la droite** (tracée en rouge) **passe par l'origine** (le point de coordonnées (0;0). Cette propriété ne dépend pas de la situation choisie, c'est une *propriété caractéristique des situations de proportionnalités*. Toutes les situations de proportionnalités possèdent cette propriété, et si une situation possède cette propriété alors c'est une situation de proportionnalité.



<table><tr><td><u>Propriété caractéristique</u> : les points représentant une situation de proportionnalité sont alignés sur une droite qui passe par l'origine.</td></tr></table>

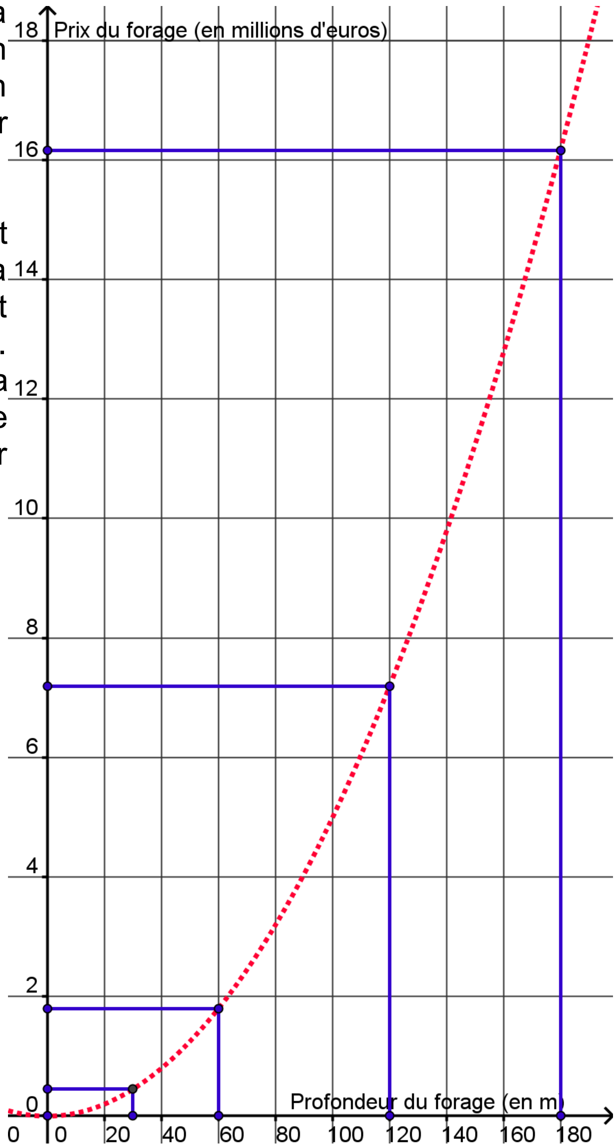
D'autres situations de proportionnalités seront représentées par d'autres droites qui passeront toutes par l'origine. Nous avons ainsi représenté des situations similaires : beurre, caviar, sable (des matières dont les prix au kg sont très différents). Elles sont toutes modélisées par une droite passant par l'origine du repère.



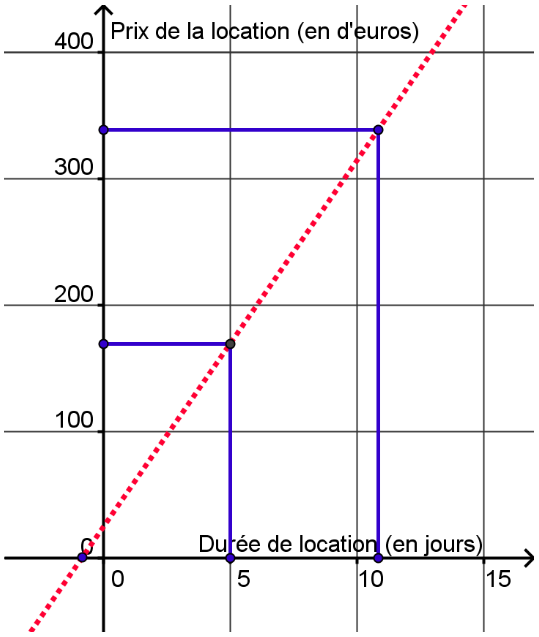


Des situations représentées par une droite ne passant pas par l'origine, ou par une courbe (passant ou ne passant pas par l'origine) qui n'est pas droite, ne seront pas des situations de proportionnalité.

Exemple 1 : le prix d'un forage (trou vertical dans la terre pour faire un puits) augmente d'une façon non proportionnelle à sa profondeur car les moyens mis en œuvre sont différents à grande profondeur (technologie différente).



Exemple 2 : le prix de la location d'un véhicule n'est pas proportionnel à la durée de la location car il y a des frais d'enregistrements (forfait) qui sont fixes et facturés même si la location est de très courte durée. Ici les frais d'enregistrements sont de 25€ et la location coute 29 €/jour. La situation est représentée par une droite qui ne passe pas par l'origine (mais par le point de coordonnées (0 ; 25).



2) Conversions

a) Vitesse moyenne

Un cycliste parcourt 25 km en 1h30. Quelle a été sa vitesse ? La vitesse dont il est question ici est la vitesse moyenne, le rapport entre le nombre de kilomètres parcourus et la durée du parcours. Dans ma mesure où cette vitesse ne change pas pendant le temps du parcours, il s'agit d'une question de proportionnalité comme nous le voyons dans le tableau :

Distance parcourue (en km)	25	50	100	1	$50 \div 3 \approx 16{,}66...$
Durée du parcours (en h)	1,5	3	6	0,06	1

La vitesse v ne peut pas rester inchangée pendant le temps du parcours car elle doit bien augmenter au démarrage et diminuer au freinage final. La proportionnalité n'est donc qu'un modèle approximatif, une hypothèse de calcul qui permet d'estimer les grandeurs t : temps du parcours et d : distance parcourue, dont le rapport $\frac{d}{t}$ est supposé constant. La relation de proportionnalité s'exprime par les égalités $\frac{d_1}{t_1}=\frac{d_2}{t_2}=\ ...\ =v$ qui se résume par la formule $\frac{d}{t}=v$.
Cette formule conduit à 2 autres égalités que l'on obtient, par exemple, par la méthode du produit en croix.

Pendant un parcours à vitesse constante v, la distance parcourue d et la durée t du parcours sont proportionnels et donc liés par les relations $\frac{d}{t}=v$; $d=v\times t$; $t=\frac{d}{v}$

Exemple : En combien de temps, un avion volant à la vitesse[1] du son (300 m/s) traverse t-il la

1 En réalité le son parcourt dans l'air 343 m/s à 20°C et 331 m/s à 0°C, il va 3 fois plus vite dans l'eau et 10 fois plus vite dans

France du Nord au Sud (environ 1000 km)? On utilise la formule $t=\frac{d}{v}$ avec des unités qui soient compatibles $d=1000$ km = 1 000 000 m et v = 300 m/s. On a donc $t=\frac{1000000}{300}\approx 3333$ s, soit $t\approx 3333\div 60=55{,}55$ min. 55 min faisant 55×60 = 3300 s, il s'agit de 55 min et 33 s mais autant de précision n'est pas nécessaire ici puisque d et v ne sont connus qu'avec un seul chiffre.

Remarque : L'unité qui sert à exprimer la vitesse dépend des unités qui servent à exprimer les distances et les durées, mais il est toujours possible de modifier les unités, à condition de respecter l'homogénéité des unités pour les différentes grandeurs : les durées peuvent être en heures (h), en secondes (s), en années (a), en siècles (abréviation : ?) etc. et les distances peuvent être en mètres (m) en nanomètres[2] (nm) ou en années-lumières[3] (a.l.), etc. Pour illustrer ceci, convertissons la vitesse du son (300m/s) en km/h :

Distance parcourue	300 m	300×3600=1 080 000 m = 1080 km
Durée du parcours	1 s	3600 s = 1h

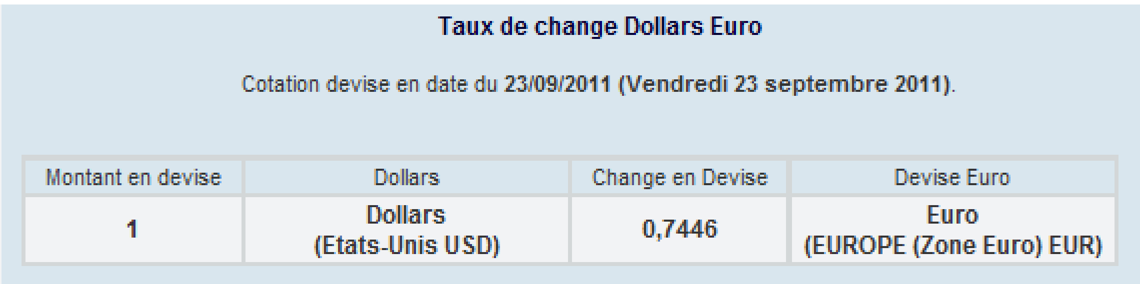
Ainsi 300 m/s équivaut à 1080 km/h. Convertissons cette vitesse en pieds[4] par secondes (ft/s):

Distance parcourue	300 m	1 m	1 cm = 1÷100 m	1 ft = 30,48 cm	30000 ÷ 30,48 ft ≈ 984 ft
Durée du parcours	1 s	1÷300 s	1 ÷ 30000 s	30,48 ÷ 30000 s	1 s

Pour cette dernière conversion, en fait, il s'agit de convertir 300 m en pieds (ft). On aurait pu faire autrement : 1 ft = 30,48 cm = 0,3048 m et donc 300 m = $\frac{300}{0{,}3048}$ ft ≈ 984 ft

b) <u>Autres grandeurs</u>

<u>Change monétaire</u> : un dollar valant 0,7446 euros, combien de dollars font 100 euros ?



Taux de change Dollars Euro

Cotation devise en date du **23/09/2011 (Vendredi 23 septembre 2011)**.

Montant en devise	Dollars	Change en Devise	Devise Euro
1	**Dollars (Etats-Unis USD)**	**0,7446**	**Euro (EUROPE (Zone Euro) EUR)**

100 euros, c'est $\frac{100}{0{,}7446}$ dollars, soit environ 134,3 dollars. Pour obtenir ce résultat, on se pose la question du coefficient multiplicateur à appliquer à 0,7446 pour trouver 100. 0,7446×c=100 alors c=100÷0,7446.

Un euro vaut aujourd'hui (23/09/2011) 8,5803 yuans (monnaie de la Chine, les chinois disent kuai et cela s'abrège en CNY pour Renmimbi Yuan Chinois, allez savoir pourquoi). Combien vaut le billet de 100 yuans ci-dessus ? Il vaut 100÷8,5803 euros, soit environ 11,65 euros.

---

la glace. Cette vitesse dépend donc du milieu que le son traverse mais pas de l'intensité ni de la hauteur du son.

2 nano- est un préfixe pour indiquer le milliardième ($\times 10^{-9}$) comme micro- indique le millionième ($\times 10^{-6}$) ou milli- le millième ($\times 10^{-3}$). Liste des préfixes usuels dans l'ordre : pico, nano, micro, milli, centi, déci, déca, hecto, kilo, Méga, Giga, Tera.

3 L'année lumière est la distance parcourue par la lumière en 1 an. Sachant que la lumière parcourt 300 000 km en 1 s et qu'il y a 365,25×24×3600 s dans 1 an, cela nous donne l'équivalence 1a.l.≈ $9{,}5\times 10^{12}$ km (10 000 milliards de km).

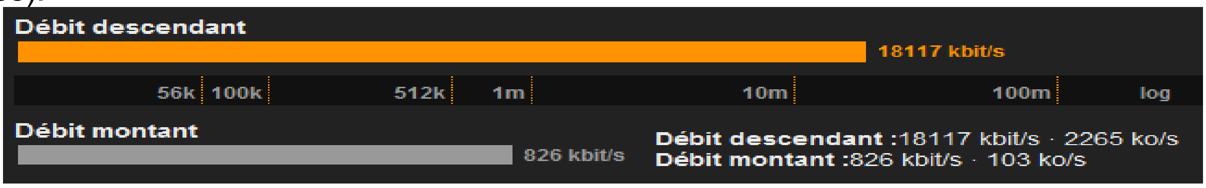
4 Le pied (*foot*) est une mesure anglaise de longueur qui vaut 30,48 cm. Autres mesures liées au pied : le pouce (*inch*) qui vaut 1/12 de pied et la verge (*yard*) qui vaut 3 pieds.

Combien va me couter cette écharpe en soie achetée à l'aéroport ? 3,10÷8,5803 ≈ 0,36 euros. Hmm! Pas cher...

Une petite annonce trouvée ce jour sur internet (mais qui date de 2009) : « Re*cherche un enseignant du français à Shenyang. La rémunération sera de 2000 yuan par mois (à titre d'exemple, le salaire moyen à Shenyang est d'un peu plus de 1000 yuan par mois)* ». Combien cela fait-il en euros/mois ? 2000÷8,5803 euros, environ 233 euros. Bof...

<u>Débit</u>

On parle de débit lorsqu'il y a circulation d'une certaine matière et à un certain endroit. Le débit mesure ainsi la vitesse de circulation de cette matière à cet endroit. Il y a donc toutes sortes de débits : le débit de l'eau dans une rivière, dans une canalisation ou à un robinet (en L par secondes) ; le débit de l'information dans une connexion adsl (internet) ou une connexion USB (en KiloOctets par secondes) ; le débit d'une traduction instantanée (en nombre de mots par minutes).

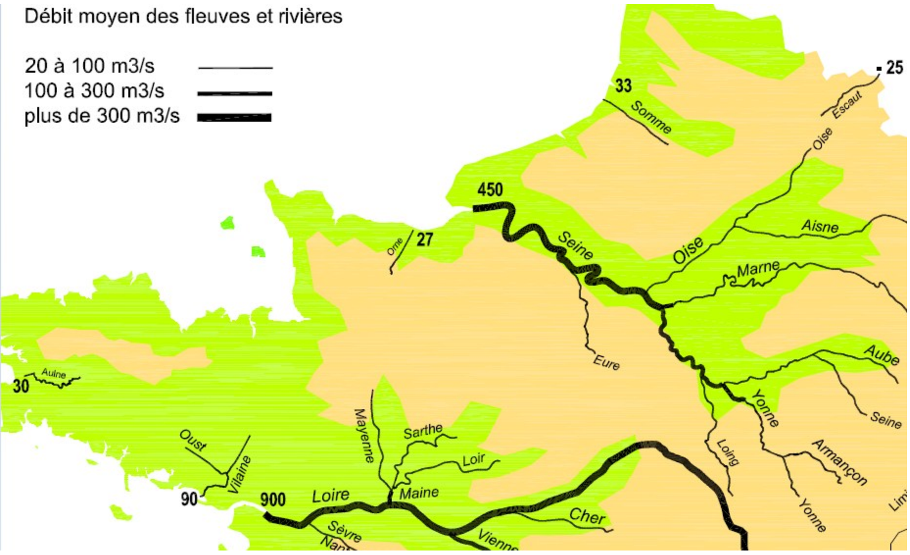


Je viens par exemple d'effectuer un test de ma connexion qui me dit que j'ai 2265 ko/s de débit descendant (lorsque je télécharge un fichier de mon ordinateur vers un serveur distant) et 103 ko/s de débit montant (dans l'autre sens, lorsque je reçois un fichier de l'extérieur). Quelle durée faut-il envisager pour envoyer ou recevoir un fichier de 50 Mo ?

2265 Ko c'est 2,265 Mo (1 Kilo=1000 et 1 Giga=1 000 000=1000 Kilo) et donc les 50 Mo seront envoyés en 50÷2,265≈22 secondes. Par contre, en réception c'est beaucoup plus long, les 50 Mo seront reçus en 50÷0,103≈485 secondes soit 8 minutes et 5 secondes.

La Circulaire du 20 janvier 1983 fixe les débits minimaux du renouvellement d'air hygiénique par occupant dans les locaux d'enseignement (Classes, salles d'études, laboratoires...) : 25 m^3/h. Cela signifie qu'il faudrait amener 25 m^3 d'air frais par occupant pour 1 h de cours, donc 25×35= 875 m^3 d'air frais pour une classe de 34 élèves et 1 enseignant. Cela permet de maintenir constante la teneur en oxygène de l'air des locaux, de limiter la concentration en CO_2 rejeté par la respiration et d'éliminer l'humidité et les odeurs...

Le débit moyen de la Marne est de 110 m^3/s qui s'ajoutent au 218 m^3/s de la Seine à Alfortville (en amont de Paris) et ce, pour un bassin versant de 43 500 km². <u>Il y a donc 328</u> m^3/s d'eau qui passe sous les ponts de Paris. Cela représente combien de litres par heures ? 1 L vaut 1 dm^3, 1000 L valent 1 m^3. 328 m^3 font donc 328 000 L et pendant 1 h il passe donc à Paris 328 000×3600=1 180 800 000 L (un peu plus d'un milliard de litres).



<u>Consommation de carburant</u>

En France, la consommation moyenne du parc automobile est passée de 8,25 L/100 km en 1990 à 7,02 L/100 km en 2006. Si j'ai fait un plein de 25 L après avoir parcouru 300 Km depuis le dernier plein, quelle a été ma consommation ? 25 litres / 300 km x 100 ≈ 8,33 litres/100 km.