4ème Chapitre 4 Équations

1] Expressions littérales

a) Utilisation de lettres dans des calculs

Les lettres sont utilisées à la place des nombres dans de nombreuses situations.

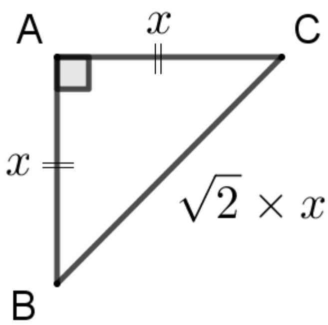
- Lorsqu'on travaille avec un nombre connu (par une définition) et invariable comme :
  - π (le rapport entre le périmètre et le diamètre d'un cercle),
  - φ (le nombre d'or, solution positive de l'équation $x^2 – x – 1 = 0$),
  - *e* (la base des logarithmes),
  - *i* (le nombre imaginaire dont le carré vaut –1)

- Lorsqu'on travaille avec un nombre inconnu et variable (*x*, t, etc.) ou non (*a*, α, etc.). Certaines habitudes ont été prises, comme celles qui consistent à utiliser :
  - des lettres grecques pour des angles,
  - les lettres du début de l'alphabet pour les nombres invariables,
  - les lettres de la fin de l'alphabet pour les nombres variables (dans l'équation de droite $y=ax+b$, les nombres *a* et *b* sont invariables alors que *x* et *y* varient),
  - les lettres *i, j, k, m, n, p* pour des entiers ($2n$ est pair tandis que $2n+1$ est impair).

b) Écrire une expression littérale

Lorsqu'une quantité est inconnue, on la remplace par une lettre, disons qu'une quantité inconnue est notée *x*.
Une expression littérale est un calcul dans lequel intervient la quantité inconnue *x*.

Exemple : un triangle isocèle-rectangle a deux petits côtés égaux à *x*.
Le grand côté de ce triangle est égal $\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}\times x$ d'après le théorème de Pythagore. Pour la simplification de l'expression de l'expression littérale $\sqrt{2x^2}$, j'ai aussi utilisé des propriétés de la racine carrée (notamment $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ et aussi $\sqrt{x^2}=x$ car $x > 0$).



Du coup, le périmètre de ce triangle est égal $x+x+\sqrt{2}\times x=x(2+\sqrt{2})$.
Pour écrire cela j'ai ajouté les expressions littérales des trois côtés et j'ai factorisé cette somme (pour mettre *a* en facteur : $a\times b+a\times b=a\times(b+c)$)

Un autre exemple : la TVA (Taxe sur la Valeur Ajoutée) sur les livres est de 5,5 % en France continentale.
Un collège achète *n* livres du nouveau programme de mathématiques.
Chaque livre coûtant 12,5 € hors taxe, quel est le prix pour l'ensemble, taxes comprises ?
L'ensemble des livres coûte $12{,}5\times n$ € hors taxe.
La taxe étant égale à 5,5 % de $n\times 12{,}5$ €, elle coûte $\frac{5{,}5}{100}\times 12{,}5\times n=0{,}6875\times n$.
Le coût TTC (Toutes Taxes Comprises) de ces livres est donc $12{,}5\times n+0{,}6875\times n=13{,}1875\times n$.
Pour simplifier l'écrirure finale, j'ai encore factorisé (j'ai mis *n* en facteur).

c) Les conventions d'écriture

→ Pour simplifier les écritures littérales, comme la multiplication est prioritaire sur l'addition, on ne met pas les symboles de multiplication qui ne sont pas absolument nécessaires : devant une lettre ou une parenthèse ouvrante ou entre deux lettres, on ne met pas ×. Par exemple :

$$2\times x+5\times y \text{ se note } 2x+5y$$
$$x\times y\times(x+3\times y^2) \text{ se note } x\,y(x+3y^2)$$

→ D'une façon générale, s'il y a un produit contenant un nombre explicitement connu et des lettres, on met d'abord le nombre et ensuite les lettres.

$$x\times 2\times(x+1) \text{ se note } 2x(x+1)$$
$$\pi\times 4\times r^3\div 3 \text{ se note } \frac{4}{3}\pi r^3$$

→ Comme $1\times x=x$, on n'écrit jamais $1\times x$, à la place on écrit *x* (au passage, remarquez que je n'écris jamais x mais *x*, pour ne pas confondre avec × le symbole de la multiplication).
De même, comme $0+x=x$ on n'écrit jamais $0+x$, à la place on écrit *x*.
Enfin, comme $x^0=1$, on n'écrit jamais x^0, à la place on écrit 1.

→ Lorsqu'un nombre écrit avec une lettre est multiplié par lui-même, on utilise la notation des puissances :

$$\frac{16\times x^2\times x\times y^3}{2\times y^{-2}}=8x^3y^5$$

(on pourrait écrire cette expression $2^3x^3y^5$, mais cela ne présente pas d'intérêt ici de remplacer 8 par 2^3)

d) <u>Utilisations de la distributivité</u>

Rappelons que la distributivité permet de

- factoriser : pour mettre a en facteur : $a\times b+a\times b=a\times(b+c)$
- développer : on inverse l'égalité précédente : $a\times(b+c)=a\times b+a\times b$

→ On peut développer un produit, ce qui conduit à supprimer des parenthèses :

$$2(x+2y-3xy)=2x+4y-6xy$$
$$4x(x+2y-3xy)=4x^2+8y-12x^2y$$

→ On peut enlever les parenthèses d'une expression si elles sont précédée par un signe – en changeant tous les signes des termes qui sont dans les parenthèses (cela revient à développer car $-x=(-1)\times x$) :

$$-(x+2y-3xy)=-x-2y+3xy$$
$$5x+2y+3xy-(x+2y-3xy)=4x+6xy$$

→ On peut factoriser une somme ou une partie seulement d'une somme, ce qui conduit à la réduire :

$$2x+3x=(2+3)\times x=5x$$
$$6y^2+3x-y^2=(6-1)\times y^2+3x=5y^2+3x$$
$$1+6x-x^2-5+3x-2x^2=1-5+(6+3)\times x+(-1-2)x^2=-4+9x-3x^2$$

e) <u>Détermination de la valeur d'une expression</u>

On peut remplacer les nombres inconnus d'une expression littérales par des nombres connus explicitement. Cela permet d'évaluer une expression.

<u>Exemple</u> :

Évaluons l'expression $\frac{4}{3}\pi r^3$

- lorsque $r=1$, elle vaut $\frac{4}{3}\pi 1^3=\frac{4}{3}\pi\approx 4{,}189$.
- lorsque $r=20$, elle vaut $\frac{4}{3}\pi 21^3=12348\pi\approx 38792$.

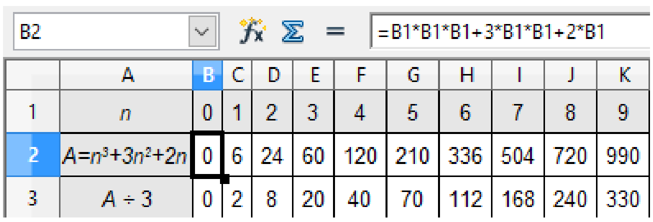
L'évaluation d'une expression peut prendre un caractère systématique (répétitif, pour beaucoup de valeurs). Pour éviter de répéter sans arrêt les mêmes calculs, on utilise alors un tableur (on peut aussi parfois écrire un programme). Cet outil permet de recopier une formule sans avoir à la reécrire.

<u>Exemple</u> :

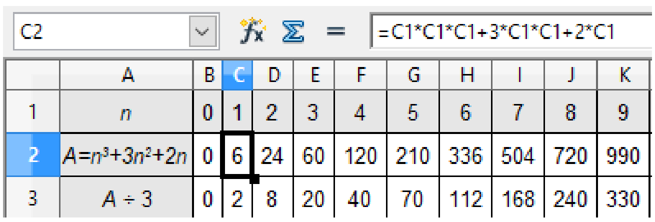
Lorsque n est un entier, l'expression $A=n^3+3n^2+2n$ est-elle toujours un multiple de 3.
Si on trouve une valeur de n pour laquelle l'affirmation A est fausse, on pourra directement conclure.
Pour commencer, on va donc évaluer l'expression pour tous les entiers n allant de 0 à 20.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$A=n^3+3n^2+2n$	0	6	24	60	120	210	336	504	720	990	1320	1716	2184	2730	3360	4080	4896	5814	6840	7980	9240
$A \div 3$	0	2	8	20	40	70	112	168	240	330	440	572	728	910	1120	1360	1632	1938	2280	2660	3080

Ce travail qui serait fastidieux avec une calculatrice (certaines font office de tableur) a été effectué avec un tableur. Il suffit de taper dans la cellule B2 la formule =B1*B1*B1+3*B1*B1+2*B1
(cela peut être écrit autrement =PUISSANCE(B1;3)+3*PUISSANCE(B1;2)+2*B1 mais ce n'est pas vraiment plus simple).
Dans la cellule B3 on entre la formule =B2/3.
Il n'y a plus qu'à saisir le petit carré noir (voir ci-dessous) pour recopier vers la droite les deux formules.


B2 =B1*B1*B1+3*B1*B1+2*B1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$A=n^3+3n^2+2n$	0	6	24	60	120	210	336	504	720	990
3	$A \div 3$	0	2	8	20	40	70	112	168	240	330


C2 =C1*C1*C1+3*C1*C1+2*C1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$A=n^3+3n^2+2n$	0	6	24	60	120	210	336	504	720	990
3	$A \div 3$	0	2	8	20	40	70	112	168	240	330

On constate alors que sur ces premières valeurs de n, l'expression A est bien divisible par 3.

La preuve définitive de cette propriété ne peut pas venir de cette méthode (on ne peut vérifier pour tous les nombres puisqu'il y en a une infinité). Il faut faire un raisonnement mathématique. Ici, il faut factoriser *A*...

Exemple :
Lorsque *n* est un entier, l'expression $B=2^{2^n}+1$ est-elle toujours un nombre premier ? C'est ce que croyait Fermat*, ce grand mathématicien. Il n'avait pas alors la grande facilité de calcul que nous avons aujourd'hui. Cette propriété se révèle fausse : il suffit de le vérifier par la méthode précédente.

n	0	1	2	3	4	5
E=2*ⁿ* → $E=2^n$	1	2	4	8	16	32
$B=2^E+1$	3	5	17	257	65 537	4 294 967 297
	P	*P*	*P*	*P*	*P*	*non P*

Lorsque *n*=5, le nombre *B* vaut 4 294 967 297 qui n'est pas un nombre premier puisqu'il est divisible par 641 (le quotient est 6 700 417). Pour les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 le nombre *B* est premier (Fermat prouva que 65 537 est premier) ; ce sont même, sans doute, les seules valeurs de *n* pour lesquelles cette expression est un nombre premier. Mais cela reste à prouver.

* Pierre de Fermat, né dans la première décennie du XVII[e] siècle, à Beaumont-de-Lomagne (Tarn-et-Garonne) et mort le 12 janvier 1665 à Castres (Tarn), est un magistrat, polymathe et surtout mathématicien français, surnommé «le prince des amateurs». Il est aussi poète, habile latiniste et helléniste, et s'est intéressé aux sciences et en particulier à la physique ; on lui doit notamment le principe de Fermat en optique. Il est particulièrement connu pour avoir énoncé le « grand théorème de Fermat », dont la démonstration n'a été établie que plus de 300 ans plus tard par le mathématicien britannique Andrew Wiles en 1994 (d'après Wikipédia).

2] Égalités

a) Définition

Une égalité est l'affirmation — à tort ou à raison — que deux quantités sont égales.

Exemples : L'affirmation 4+11=15 est une égalité qui est vraie de façon évidente.
L'affirmation 13÷3 = 4,3 est une égalité, mais cette égalité est fausse. Comme 13÷3 = 4,3333... (une suite infinie de 3), il n'y a pas d'écriture décimale exacte de ce nombre. Une égalité vraie : $13\div3=3+\frac{1}{3}$.
Avec une lettre : l'affirmation 4+*x*=15 est une égalité qui est fausse pour toutes valeurs de *x*, sauf pour la valeur *x* = 11. Pour *x* = 11, l'égalité 4+*x* = 15 est vraie, pour *x* ≠ 11, l'égalité 4+*x* = 15 est fausse.

On peut ainsi écrire n'importe quel type d'égalité.
Si on écrit une égalité contenant un (ou plusieurs) nombre inconnu, représenté par une lettre, cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de ce nombre inconnu et fausse dans les autres cas.

$\sqrt{x^2}=x$ est une égalité vraie quand $x\geq0$ et fausse quand $x<0$

$x^2=1$ est une égalité vraie quand $x=1$ ou $x=-1$ et fausse dans tous les autres cas

b) Tester une égalité

Lorsqu'une égalité est donnée, on peut remplacer les nombres inconnus par des valeurs particulières et voir (en effectuant les calculs) si l'égalité est vraie ou fausse. On évalue donc les deux membres de l'égalité et on compare les valeurs obtenues.

Exemple n°1 :
Testons l'égalité suivante $2x^2-1=-2x+3$ pour savoir si elle est vérifiée pour des valeurs entières du nombre inconnu *x*. L'extrait du tableur ci-dessous nous donne l'évaluation de chaque membre et la comparaison. J'ai choisi un intervalle de valeurs qui inclus des nombres négatifs car il y a une valeur solution (à ne pas oublier) qui se trouve dans cet intervalle.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$A=2x^2-1$	49	31	17	7	1	-1	1	7	17	31	49
$B=-2x+3$	13	11	9	7	5	3	1	-1	-3	-5	-7

On constate, que pour $x=-2$ et pour $x=1$, l'égalité est vraie.
Pour les autres valeurs testées, l'égalité est fausse.
En réalité, cette égalité n'est vraie que pour les deux valeurs mentionnées. Elle est fausse pour toutes les autres valeurs de *x*, que ce soit des nombres entiers ou des nombres quelconques. Mais cela ne peut pas être prouvé en évaluant l'égalité pour tous les nombres (il y en a une infinité). Là encore, il faut autre chose...

Exemple n°2 :
Testons l'égalité suivante $7=n\times(3-k)$ pour savoir si elle est vérifiée pour des valeurs entières des nombres inconnus k et n. Le plus efficace ici est d'exprimer une inconnue à l'aide de l'autre. En divisant l'égalité par $3-k$, on obtient $n=\frac{7}{3-k}$. Connaissant k, on peut alors calculer n et il suffit de vérifier que ce nombre n obtenu est entier (car on cherche un entier).
J'ai arrondi la valeur de k à un chiffre après la virgule pour que cela prenne le moins de place possible.

K	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N=7/(3-k)	0,9	1,0	1,2	1,4	1,8	2,3	3,5	7,0	-	-7,0	-3,5	-2,3	-1,8	-1,4	-1,2	-1,0	-0,9
entier ?	non	oui	non	non	non	non	non	oui	-	oui	non	non	non	non	non	oui	non

On trouve alors quelques couples (n ; k) solutions du problème : (1 ; −4), (7 ; 2), (−7 ; 4), (−1 ; 10).
Cette méthode ne permet pas de déterminer toutes les solutions entières, ni d'être sûr de les avoir trouver toutes, mais elle permet d'illustrer et d'explorer la situation. Un raisonnement mathématique peut suivre.

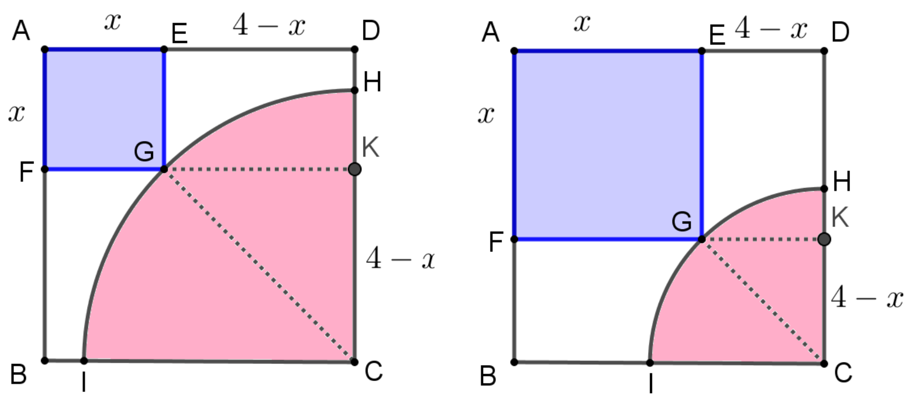
c) Tester une inégalité
La comparaison de deux quantités ne se réduit pas à l'égalité ou à la non-égalité.
En cas d'inégalité, on peut affirmer laquelle est la plus grande et écrire une inégalité.
On peut écrire deux sortes d'inégalités :

- inégalité au sens strict : $a > b$ (a est supérieur à b) ou $a < b$ (a est inférieur à b)
- inégalité au sens large : $a \geq b$ (a est supérieur ou égal à b) ou $a \leq b$ (a est inférieur ou égal à b)

Une inégalité au sens strict comme $a > 2$ est vraie pour tous les nombres supérieurs à 2, cela peut être 3 ou 10 ou 123 456 789 ou même 2,01 ou 2,00000001 mais 2 est exclu ($2 > 2$ est une inégalité fausse).
Une inégalité au sens large comme $a \geq 2$ est vraie pour tous les nombres supérieurs ou égaux à 2, cela peut être 3 ou 10 ou 123 456 789 ou 2,01 ou 2,00000001 ou encore 2 qui est inclus ($2 \geq 2$ est une inégalité vraie).

Pour tester une inégalité contenant des nombres inconnus, on fait comme pour les égalités : on remplace les nombres inconnus par des valeurs pour savoir si l'inégalité est vraie ou si elle est fausse.

Exemple :
ABCD est un carré de côté 4.
On place *E* sur le côté [*AD*] et on note x la distance *AE*.
On construit alors le carré *AEGF* de côté *AE* (voir les figures).
On trace ensuite un quart de cercle de centre *C* passant par *G*.
La question que l'on se pose : pour quelles valeurs de x l'aire du carré *AEGF* est-elle plus grande que celle du secteur circulaire *CHI* ?



Pour répondre à cette question, on écrit que l'aire du carré *AEGF* est égale à x^2.
Ensuite, on détermine le rayon $r=GC=HC=IC$ du quart de disque à l'aide du théorème de Pythagore : $GC^2=GK^2+KC^2$ soit, en remplaçant GK et KC par $4-x$, $GC^2=(4-x)^2+(4-x)^2=2(4-x)^2$.
L'aire du secteur circulaire, le quart de disque est égale à $\frac{\pi r^2}{4}=\frac{\pi GC^2}{4}$, soit $\frac{\pi\times 2(4-x)^2}{4}=\frac{\pi(4-x)^2}{2}$.
La question posée s'écrit donc $x^2>\frac{\pi(4-x)^2}{2}$. Testons-la pour différentes valeurs de x inférieures à 4.

x	4	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2	1,9
A=x²	16	15,21	14,44	13,69	12,96	12,25	11,56	10,89	10,24	9,61	9	8,41	7,84	7,29	6,76	6,25	5,76	5,29	4,84	4,41	4	3,61
B=π(4-x)²÷2	0	0,01571	0,06283	0,14137	0,25133	0,393	0,565	0,77	1,005	1,272	1,571	1,901	2,262	2,655	3,079	3,534	4,021	4,5396	5,08938	5,67057	6,28319	6,92721
A>B ?	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	non	non	non	non

On constate alors que pour les valeurs $x \leq 2{,}3$ l'inégalité cherchée est vraie.
On peut affiner encore cette recherche des valeurs qui satisfont l'inégalité en « zoomant » sur les environs de 2,3 comme par exemple ci-dessous. On peut en déduire qu'il faut avoir $x \leq 2{,}225$.

2,3	2,29	2,28	2,27	2,26	2,25	2,24	2,235	2,23	2,225	2,22	2,215
5,29	5,244	5,198	5,153	5,108	5,063	5,018	4,995	4,973	4,951	4,928	4,906
4,54	4,593	4,647	4,701	4,756	4,811	4,866	4,893	4,921	4,949	4,977	5,005
oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	non	non

On pourrait encore affiner la solution en s'approchant de plus en plus lentement de la valeur frontière qui vaut environ 2,2248369484934 (exactement $\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}+\sqrt{2}}$).

3] Équations

a) Définitions

Définition (équation) :
Une équation est une égalité dans laquelle figure un nombre (ou plusieurs) inconnu, remplacé par une lettre.

Remarque :
Si elle figure deux fois dans une égalité, la même lettre remplace toujours le même nombre.

Exemples :
$2x+1=0$ est une équation dans laquelle le nombre inconnu est x.
$2x+5y=3$ est une équation dans laquelle il y a deux nombres inconnus x et y.
Ces deux nombres x et y sont, à priori, indépendants et généralement différents.
$3x^2+2x+1=0$ est une équation où il y a un seul nombre inconnu x, présent à deux endroits différents.

Définition (degré d'une équation) :
Le degré de l'équation est l'exposant maximum de l'inconnu.
Dans une équation du 1^er^ degré, le nombre x^2 n'intervient pas.

Exemples :
L'équation $2x+1=0$ est une équation du 1er degré ; l'équation $x^2+2x+1=0$ est une équation du 2d degré.
L'équation $x^2+2x+1= x^2$ n'est pas vraiment une équation du 2d degré car le terme x^2 disparaît complètement si on l'enlève des deux côtés de l'égalité (voir plus loin, la propriété n°1) ; elle devient alors $2x+1=0$ qui est du 1er degré.

Définition (résoudre une équation):
Résoudre une équation signifie trouver toutes les valeurs du nombre inconnu (ou des nombres inconnus s'il y en a plusieurs) qui vérifient l'égalité. On appelle ces valeurs les solutions de l'équation.
Résoudre une équation consiste donc à trouver ses solutions, en faire la liste.

Exemples :
L'équation $2x+1=0$ a pour solution $x = -0,5$. C'est la seule solution (preuve plus loin).
L'équation $(x-1)^2-5(x-1)=0$ a pour solution évidente $x=1$ (car $(1-1)^2-5(1-1)=0^2-5\times0=0$).
Mais est-ce la seule solution ? Non, il y a aussi $x=6$.
Vérification : $(6-1)^2-5(6-1)=5^2-5^2=0$

Comment être sûr de trouver toutes les solutions ?
En utilisant les propriétés des égalités étudiées au paragraphe suivant et en suivant la méthode ci-dessous.

Méthode pour résoudre une équation du 1er degré à une inconnue :
- isoler dans un membre ce qui contient le nombre inconnu (en ajoutant ou en enlevant ce qu'il faut).
- puis, diviser l'égalité par un nombre tel qu'il ne reste plus que le nombre inconnu dans un membre.

On trouve ainsi la solution unique de ce genre d'équations.

b) Propriétés des égalités

Propriété n°1 : Lorsqu'une égalité est vraie, il est possible de soustraire ou d'ajouter le même nombre aux deux membres de l'égalité tout en conservant l'égalité entre ses deux membres.

D'une manière générale, si $a = b$ alors $a + c = b + c$ (on a ajouté c aux deux membres de l'égalité).
Dans les même conditions, on aura aussi $a - c = b - c$.

C'est comme sur une balance à plateaux :
lorsque la balance est équilibrée, on peut ajouter le même poids sur les deux plateaux de la balance sans perdre l'équilibre. On peut aussi enlever les même poids des deux côtés sans perdre l'équilibre.
Si le poids du choux C est équilibré par des masses de 1,120 kg, on a C=1,12.
On peut ajouter le même poids des deux côtés de la balance, par exemple 5 kg.
On aura toujours l'égalité des poids, cette fois C+5=1,12+5, soit C+5=6,12.

Cette propriété permet de « faire changer de côté » un nombre dans une égalité.
Le nombre qui disparaît d'un côté apparaît de l'autre avec son signe qui a changé.

Exemples :
Si $x - 3 = 5$ alors $x = 5 + 3 = 8$.
On a ajouté 3 aux deux membres de l'égalité de manière à faire disparaître le – 3 du membre de gauche, ce qui explique qu'il apparaisse dans le membre de droite sous la forme +3.
On fait cela pour trouver la valeur de x pour laquelle $x - 3 = 5$; cette valeur est $x = 8$.
On dit alors que la solution de l'équation $x - 3 = 5$ est $x = 8$.

Si $3t + \pi = 0$ alors $3t = -\pi$.
On a soustrait π aux deux membres de l'égalité pour isoler l'inconnu t dans un bloc produit.
Il faudra utiliser alors la propriété n°2 pour résoudre l'équation : en divisant par 3 les deux membres de l'égalité, on trouve la seule valeur qui convienne pour rendre vraie l'égalité : c'est $t=\frac{-\pi}{3}\approx-1{,}04719755$.

Si $2x-7=3x+5$ alors $2x-3x=5+7$, soit $-x=12$.
On a ajouté 7 et soustrait $3x$ aux deux membres de l'égalité (on a finalement ajouté $7-3x$ aux deux membres) pour isoler l'inconnu x dans un bloc produit
Pour résoudre l'équation, il n'y a qu'à changer les signes : on en déduit que x=12 pour que l'égalité soit vraie.
La seule solution de l'équation $2x-7=3x+5$ est x=12.

<u>Propriété n°2</u> : Lorsqu'une égalité est vraie, il est possible de multiplier ou de diviser les deux membres d'une même égalité par le même nombre tout en conservant l'égalité entre ses deux membres.
La seule condition est de ne pas diviser par 0 car c'est impossible.

D'une manière générale, si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$ (on a multiplié par c les deux membres de l'égalité).
Dans les même conditions, si $c\neq0$, on aura aussi $a \div c = b \div c$.

Cette propriété est une autre façon de « faire changer de côté » un nombre dans une égalité.
Il faut, pour appliquer cette propriété, que le nombre qu'on veut faire disparaître soit mis en facteur.
Il va disparaître en tant que multiplicateur d'un côté et apparaître de l'autre en tant que diviseur.

Exemples :
Si $5x = -1$ alors $5x\div5=-1\div5$, soit $x = -\frac{1}{5}$ (on a divisé par 5 les deux membres de l'égalité).
Si $x \div 3 = 5$ alors $x = 5\times3$ (on a multiplié par 3 les deux membres de l'égalité).
Si $\frac{3}{7}x=12$ alors $\frac{7}{3}\times\frac{3}{7}x=\frac{7}{3}\times12$, soit $x =$ $x=4\times7=28$ (on a multiplié par $\frac{7}{3}$, c'est-à-dire par l'inverse de $\frac{3}{7}$ les deux membres de l'égalité, pour faire disparaître $\frac{3}{7}$ du membre de gauche).

La plupart du temps, il faut utilisersuccessivement les deux règles.
C'est la stratégie de résolution, explicitée dans la méthode, qui dicte laquelle des deux règles on utilise.

Exemple :
Soit à résoudre l'équation $2(x - 4) + 12 = 0$. Dans un 1[er] temps, on « fait passer » le 12 dans le membre de droite. Il va changer de signe car on l'enlève des deux côtés : $2(x - 4) = -12$.
Ensuite, on divise les deux membres de l'égalité par 2. Ce qui conduit à $x - 4 = -6$.
Enfin, on ajoute 4, ce qui « fait passer » le – 4 de l'autre côté et isole l'inconnue : $x = 4 - 6 = -2$.
La solution de l'équation est donc $x = -2$.

Pour résumer la stratégie de résolution des équations du 1[er] degré :

i. On regroupe du même côté de l'égalité ce qui contient l'inconnue par des ajout ou des retraits.
ii. On factorise pour obtenir dans un membre, le produit de l'inconnue par une facteur k
iii. On divise par le facteur k, afin d'obtenir la valeur de notre inconnue.

En procédant ainsi, les équations du 1[er] degré en x peuvent toujours se ramener à la forme $ax+b = 0$, où a et b sont des nombres à déterminer. Cette équation possède une seule solution qui est $x=\dfrac{-b}{a}$.

Preuve :
Si on a $ax+b=0$ et que le nombre $a\neq0$, alors en enlèvant b des deux membres : $ax=-b$ et en divisant par $a\neq0$ on obtient finalement $x=\frac{-b}{a}$.

Exemple :

L'équation $6(x+1)-3x+7=5x-3$ est bien du 1er degré et elle se ramène successivement à :

$$6x+6-3x+7=5x-3$$
$$3x+13=5x-3$$
$$13+3=5x-2x$$
$$16=3x$$
$$x=\frac{16}{3}$$

La seule solution de cette équation est donc $x=\frac{16}{3}=5+\frac{1}{3}\approx 5{,}33$.

Exemple :

L'équation $5(x^2-2x+1)-x^2+7=(2x-3)^2-3(x+2)$ paraît du 2d degré...

$5x^2-10x+5-x^2+7=4x^2-12x+9-3x-6$ nous développons tout, dans les deux membres

$(5-1-4)x^2+(-10+12+3)x+(7-9-6)=0$ nous regroupons pour réduire l'équation

$5x-8=0$ et … nous constatons que les x^2 disparaissent.

L'équation se ramène donc au 1er degré, elle est du type $ax+b=0$, sa solution est $x=\frac{8}{5}=1{,}6$.

La solution de l'équation du départ est $x = 1{,}6$.