Classe de 4ème

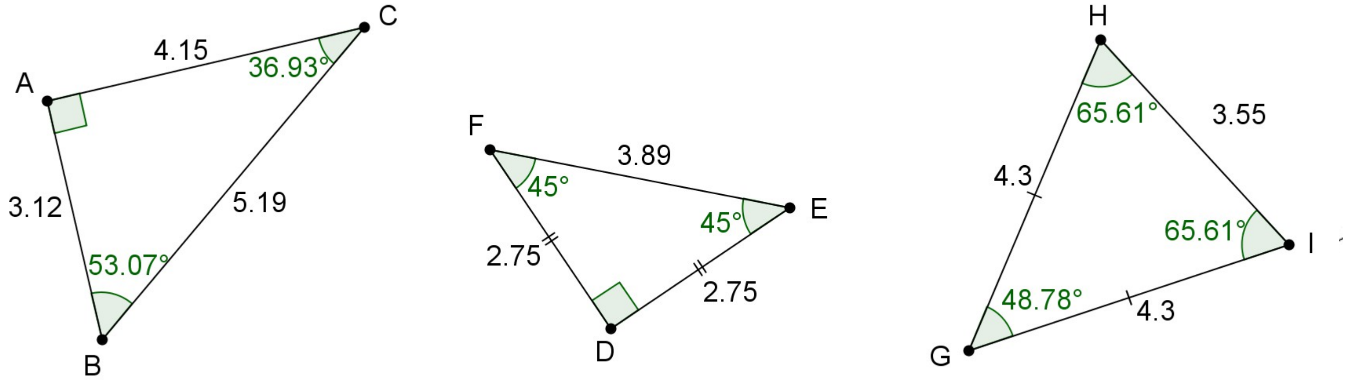
Chapitre 3 : Triangles rectangles

1) Cercle circonscrit à un triangle rectangle

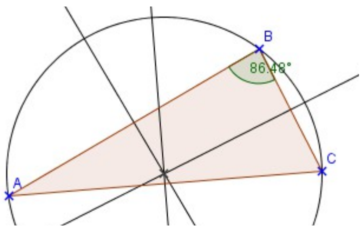
Rappels :

- Un triangle qui a un angle droit (90°) est un triangle rectangle.
- Le côté opposé à l'angle droit, appelé *hypoténuse* du triangle, est le plus grand des trois côtés.
- Les deux angles qui ne sont pas droits sont *aigus* (mesure inférieure à 90°) et *complémentaires* (leur somme fait 90°).
- Un triangle peut être *rectangle* **et** *isocèle* (deux côtés sont égaux), on parle alors de triangle isocèle-rectangle ou de demi-carré.

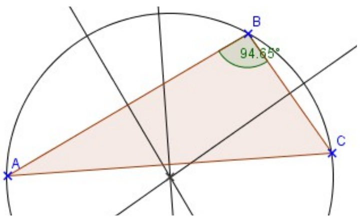
Exemples :
Sur la figure, ABC est un triangle rectangle en A d'hypoténuse [BC] ;
DEF est un triangle isocèle-rectangle de sommet principal D et d'hypoténuse [FE] ;
GHI est un triangle isocèle en G et de base principale [HI].



Médiatrices des 3 côtés d'un triangle :
Traçons ces droites qui, on le sait, sont concourantes en un point équidistant des sommets qu'on appelle le centre du cercle circonscrit au triangle. Le cercle *circonscrit* au triangle est le cercle qui passe par les 3 sommets du triangle.



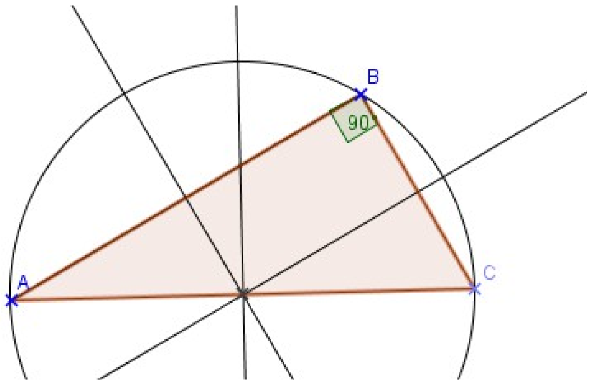
Observation : Dans le cas d'un triangle *obtusangle* (triangle qui a un angle *obtus*) le centre du cercle circonscrit est extérieur au triangle alors que si le triangle est *acutangle* (qui a un angle *aigu*) le centre du cercle circonscrit est intérieur au triangle. Lorsque le triangle est rectangle (la limite entre acutangle et obtusangle), on remarque alors que le centre du cercle circonscrit est au milieu de l'hypoténuse.



Propriété 1 : L'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit à un triangle rectangle.

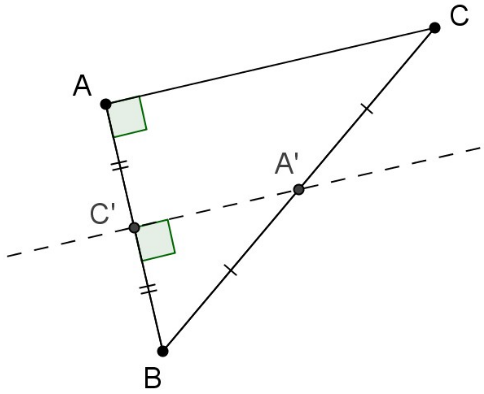
On peut formuler cette propriété autrement :

1. Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est équidistant des 3 sommets.
2. Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le centre du cercle circonscrit.
3. La *médiane*[1] issue de l'angle droit d'un triangle rectangle mesure la moitié de l'hypoténuse.



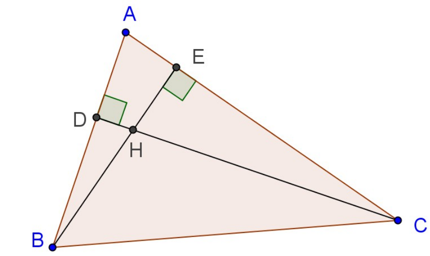
Cette dernière proposition, comme les propositions précédentes, signifie que les 3 sommets du triangle sont équidistants du milieu de l'hypoténuse.

1 Les médianes d'un triangle sont des droites qui passent par un sommet et le milieu du côté opposé à ce sommet. Par abus de langage on appelle aussi médianes les segments qui joignent ces 2 points et aussi parfois, la longueur de ces segments.

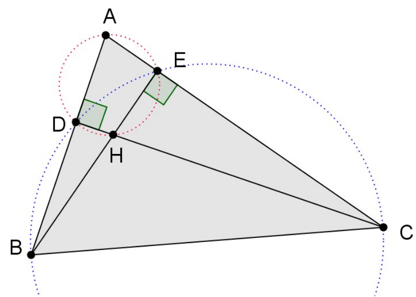


Preuve :
Considérons un triangle ABC, rectangle en A et la médiatrice du côté [AB] de ce triangle. Cette droite passe par le milieu C' de [AB] et est perpendiculaire à (AB). Elle est donc parallèle à (AC). D'après la réciproque de la propriété des milieux qui sera étudiée plus tard (une droite parallèle à un côté et passant par un milieu passe nécessairement par l'autre milieu), la médiatrice de [AB] passe par A', le milieu de l'hypoténuse [BC] et on a donc nécessairement AA'=BA'.
De même, la médiatrice de [AC] passe par A', le milieu de l'hypoténuse et on a AA'=CA'. Le point A' vérifiant AA'=BA'=CA' est donc le centre du cercle circonscrit à ABC.

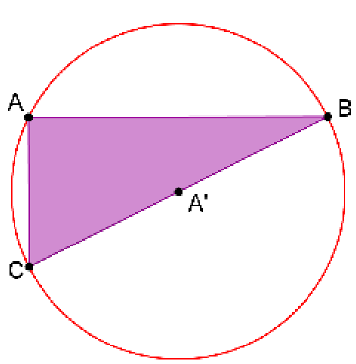
Application :
Cette propriété permet parfois de montrer que quatre points sont cocycliques (situés sur un même cercle). Sur la figure ci-contre représentant un triangle et deux de ses hauteurs, on voit ainsi que B, D, E et C sont cocycliques (cercle de diamètre [BC]),
De même, A, D, H et E sont cocycliques (cercle de diamètre [AH]).

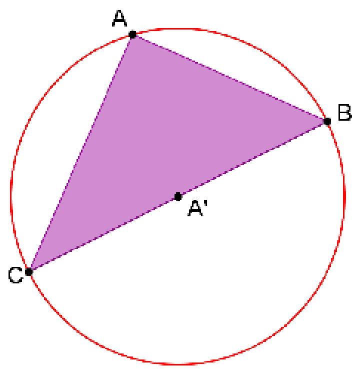


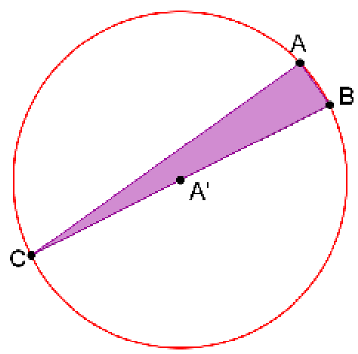
Remarque :
La *cocyclicité* de quatre points est un élément qui peut se révéler d'une certaine importance dans une démonstration. Par exemple ici, le fait que B, D, E et C soient cocycliques permet de déduire que les angles $\widehat{DBE}$ et $\widehat{DCE}$ sont égaux car interceptant le même arc de cercle (propriété étudiée plus tard dont on peut se convaincre en mesurant ces angles précisément avec un logiciel comme GeoGebra).



Examinons maintenant la situation suivante :
un triangle inscrit dans un cercle de manière qu'un de ses côtés soit le diamètre du cercle.
Quelques essais nous permettent de penser que le triangle ainsi formé est toujours un triangle rectangle.

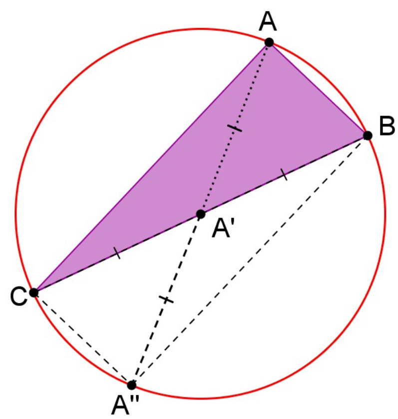






Montrons cela en apportant la preuve.

Propriété réciproque : Si un point A appartient au cercle de diamètre [BC] alors le triangle ABC est rectangle en A.

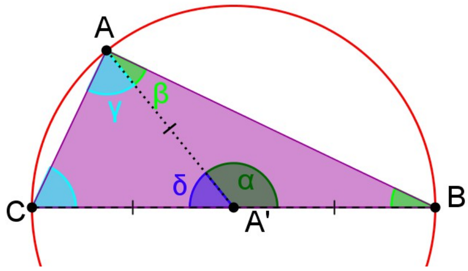


Remarque :
On peut formuler cette propriété autrement :

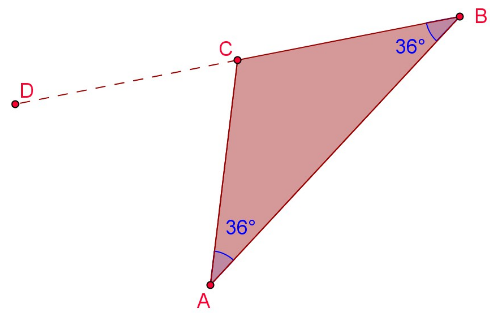
- Si un triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre [BC] alors ce triangle est rectangle en A.
- Si une médiane d'un triangle mesure la moitié du côté correspondant, alors le triangle est rectangle au sommet dont est issue cette médiane.

Preuve 1 :
Soit ABC, un triangle inscrit dans un cercle ayant pour centre A', le milieu de [BC]. Montrons que ce triangle est rectangle en A. Pour cela construisons, comme sur la figure, le symétrique A" de A par rapport à A'. On obtient un quadrilatère ABA"C ayant ses diagonales qui ont même milieu et même longueur. D'après une propriété étudiée en classe de 5ème, ce quadrilatère est donc un rectangle. Par conséquent, l'angle $\widehat{BAC}$ est droit. Ainsi, A étant un point du cercle de diamètre [BC], l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

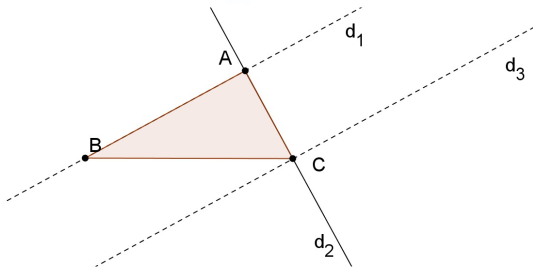
Preuve 2 :
Plutôt que d'appliquer cette propriété caractéristique du rectangle vue en 5ème, montrons ceci par un *calcul direct* de l'angle. A et B étant sur un même cercle de centre A', le triangle AA'B est isocèle en A'. Si on note α l'angle $\widehat{AA'B}$ et β l'angle $\widehat{A'AB}$, alors $\beta=\frac{180-\alpha}{2}=90-\frac{\alpha}{2}$. L'angle $\widehat{AA'C}$, noté δ, étant supplémentaire de α, on a δ =180−α. Le triangle AA'C étant isocèle en A', si on note γ l'angle $\widehat{CAA'}$, on a $\gamma=\frac{180-\delta}{2}=\frac{180-(180-\alpha)}{2}=\frac{\alpha}{2}$. Ainsi β+ γ=90, l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

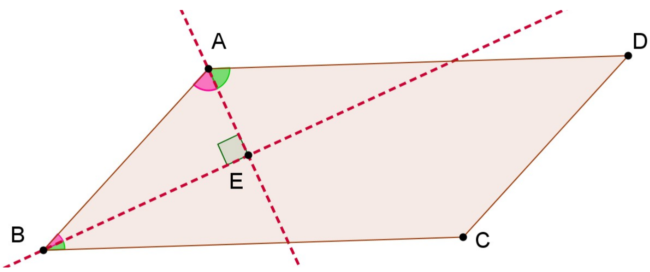


Application :
Le triangle ABC ci-contre est isocèle en C (ses côtés [CA] et [CB] sont de même longueur). On place D, le symétrique de B par rapport à D (C est le milieu de [BD]). Dans ces conditions, le triangle BAD est rectangle en A car CB=CA=CD.



Remarques :
Cette dernière propriété n'est qu'une des façons de montrer qu'un angle est droit et donc que deux droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires. Une autre façon déjà connue est de montrer que d_1 est parallèle à une droite d_3 perpendiculaire à d_2 (voir illustration à droite).



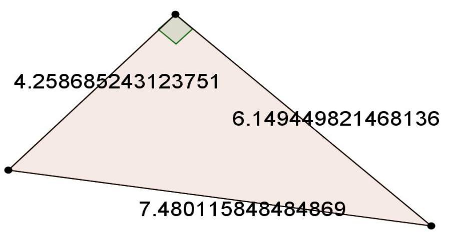


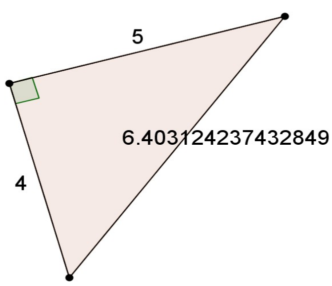
On peut aussi se servir de la propriété qui dit que la somme des angles d'un triangle vaut 180° : pour montrer qu'un angle est droit dans un triangle, il suffit de montrer que les deux angles aigus de ce triangle sont complémentaires. Cette méthode serait par exemple adaptée pour montrer que dans un parallélogramme, deux bissectrices consécutives sont perpendiculaires (figure de droite).

Dans la partie suivante, nous allons voir une 4ème méthode qui permet de montrer qu'un angle est droit, basée sur une relation caractéristique entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

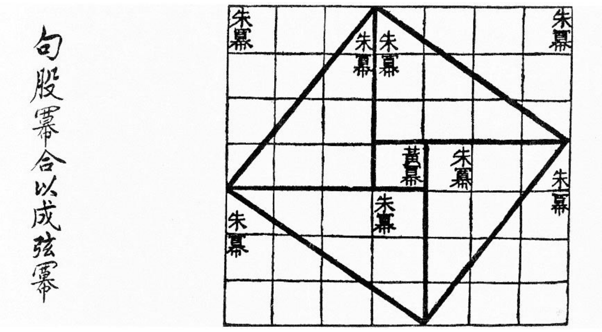
2) Théorème de Pythagore

Si on observe les longueurs des 3 côtés d'un triangle rectangle, il n'est pas évident de trouver une relation entre les trois nombres. De plus, lorsque deux côtés ont des longueurs entières, la 3ème longueur ne semble pas avoir une longueur entière.

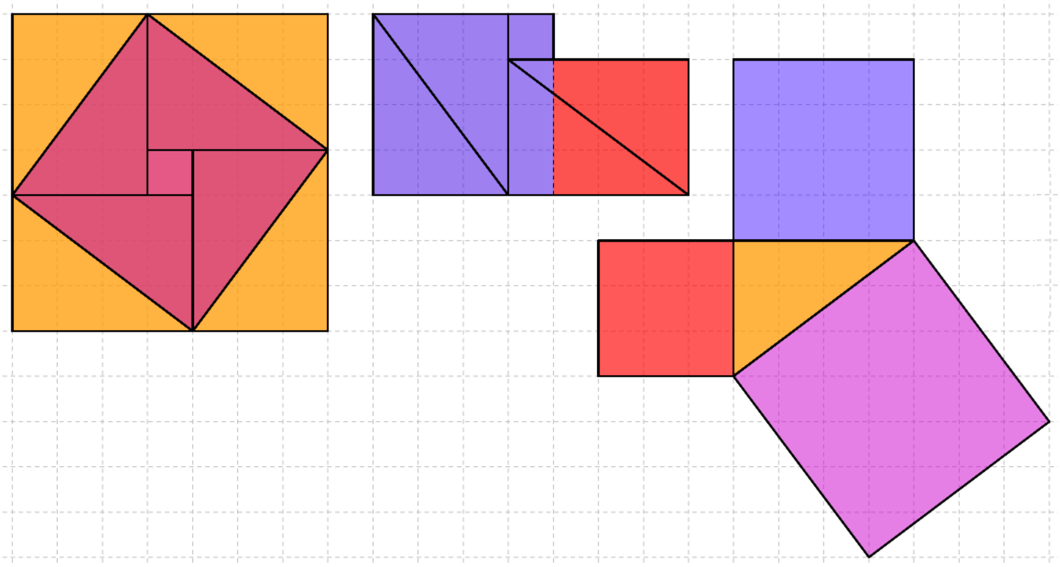




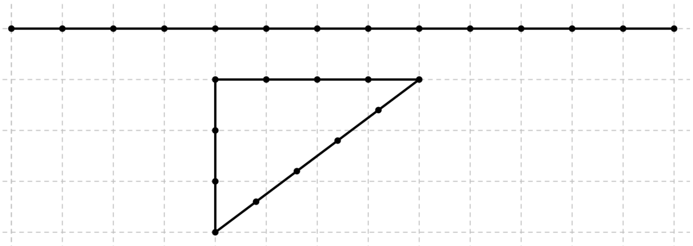
Pourtant, dans cette situation, les anciens savaient qu'il existait une relation, non pas entre les côtés, mais entre les carrés des côtés. Comment savaient-ils cela ?
Comme le montre l'illustration ci-contre extraite d'un ouvrage chinois (le *Zhoubi suanjing*) datant de 23 siècles, la dissection d'un carré permet de recomposer les pièces à la manière d'un puzzle. Les aires sont conservées lors de la recomposition et par conséquent, il est possible de conjecturer des égalités entre les aires.



Ce que semble nous indiquer cette figure chinoise n'est pas évident, il vaut mieux considérer les figures ci-dessous où le carré rose de la figure de gauche est composé des cinq mêmes pièces que le groupe des carrés rouge et bleu de la figure du milieu. Disposés selon les trois côtés du triangle initial (de couleur beige), ces trois carrés nous indique la relation cherchée : la somme des deux petits égale le grand.



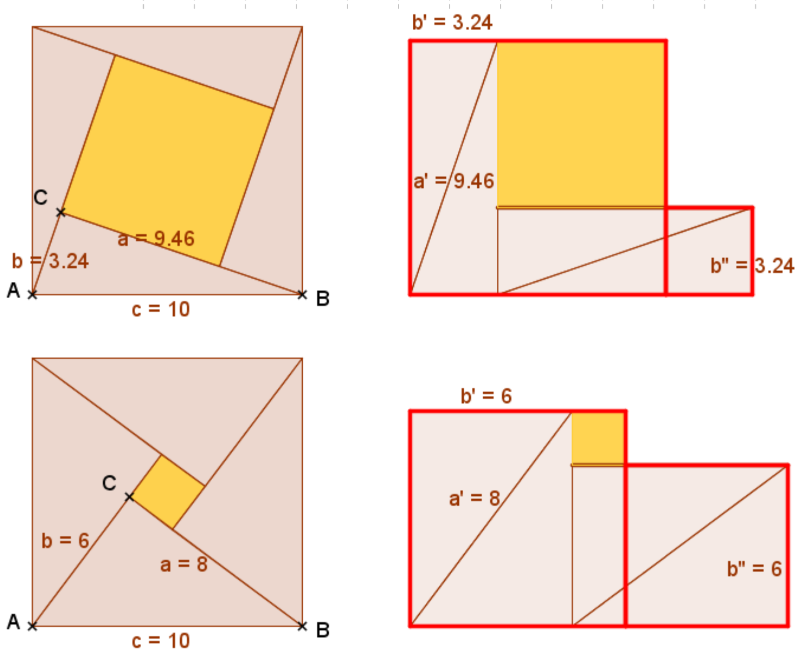
Bien sûr, cette figure n'apporte pas une preuve générale, car elle est donnée pour des valeurs particulières des côtés du triangle : 3, 4 et 5. Ainsi nous avons la relation : $3^2+4^2=5^2$ qui est bien vraie ($9+16=25$) et qui caractérise les côtés d'une variété de triangle rectangle. Un triangle dont les côtés mesurent 3, 4 et 5 unités est un triangle rectangle.



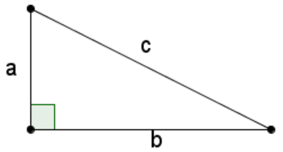
Cette propriété était connue des égyptiens qui utilisaient, dit-on, une corde avec treize nœuds équidistants. Il suffisait de construire avec cette corde un triangle de côtés 3, 4 et 5 pour disposer d'un angle droit.

Essayons de faire varier la dimension des pièces de ce puzzle, tout en maintenant leur forme.
Conservons le découpage des coins du grand carré selon quatre triangles rectangles identiques (on dit plutôt superposables) qui laisse en son centre un petit carré. Ces pièces semblent bien s'ajuster, dans tous les cas, en deux carrés dont les côtés sont ceux de l'angle droit des triangles rectangles.

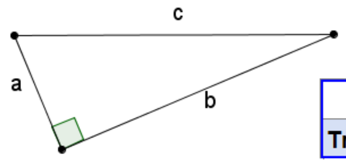
La relation semble donc se généraliser à tous les triangles rectangles.



Essayons une *approche expérimentale directe* :
pour un triangle ABC rectangle en C, calculons d'un part AC^2+BC^2 (les carrés des côtés de l'angle droit) et d'autre part AC^2. Comparons alors les résultats obtenus. Sur notre illustration, nous avons deux triangles rectangles de formes différentes et quelconques. On s'aperçoit que les résultats sont identiques en affichant 5 décimales ou en affichant même davantage (GeoGebra permet d'en afficher 15). Cela ne constitue pas une preuve, au sens propre et « puriste » car ce ne sont encore que des *exemples* qui montrent la coïncidence des décimales que jusqu'à un certain rang alors que celles-ci semblent, la plupart du temps, en nombre infini.



	a=	b=	c=	a²=	b²=	c²=	a²+b²=
Triangle 1	2.11425	4.24	4.73789	4.47003	17.9776	22.44763	22.44763

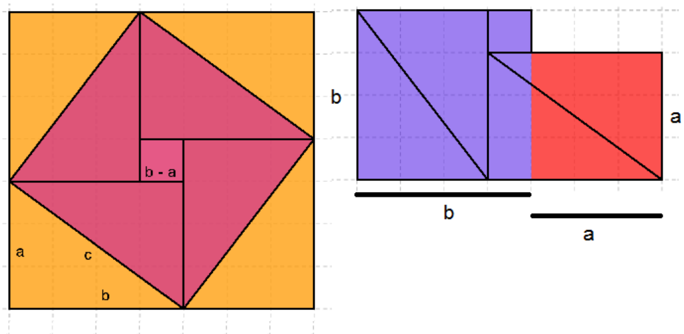


	a=	b=	c=	a²=	b²=	c²=	a²+b²=
Triangle 2	2.1617	5.20773	5.63856	4.67293	27.1204	31.79333	31.79333

Propriété de Pythagore :
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des côtés de l'angle droit. En d'autres termes, dans un triangle ABC rectangle en C on a : $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

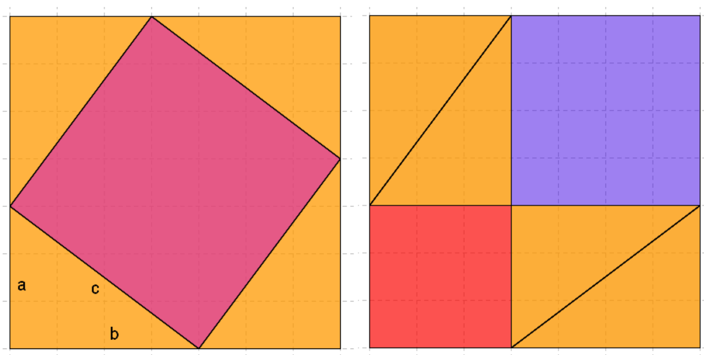
Preuve 1 :
Montrons que **si** un triangle est rectangle **alors** l'égalité de Pythagore est vérifiée (ce que l'on appelle la propriété directe). Pour cela, utilisons la figure du début, celle du *Zhoubi suanjing* avec des côtés a, b et c variables. Cette démonstration est visuelle, la figure parlant d'elle-même.

Nous pouvons cependant vérifier que les trois quadrilatères coloriés sont bien des carrés. Le tout petit carré de la figure de gauche a des côtés égaux à $(b-a)$. Lorsque les cinq pièces sont disposées selon la configuration de gauche, elles forment un carré car les angles de ce quadrilatère rose sont composés de deux angles adjacents complémentaires et les côtés sont égaux par construction. Ce grand carré a pour aire c^2.



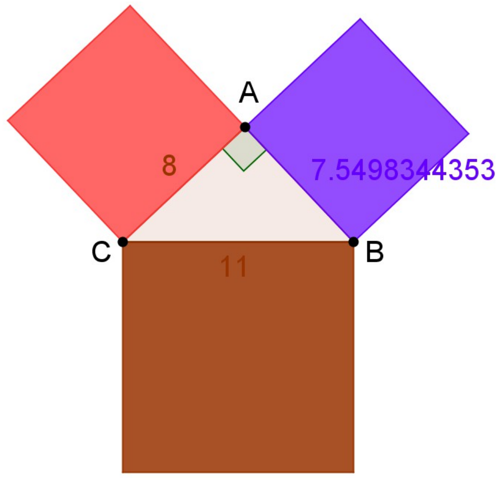
Lorsqu'on dispose les cinq pièces selon la configuration de droite, le quadrilatère bleu d'un part et le quadrilatère rouge d'autre part sont bien des carrés pour des raisons toutes simples concernant les côtés : le côté horizontal du quadrilatère bleu est $a+(b-a)=b$ et celui du quadrilatère rouge est $b-(b-a)=a$. Les angles de ces quadrilatères sont par ailleurs, et de façon évidente, tous droits. Le découpage et le déplacement de pièces ne modifiant pas l'aire d'une figure, les deux carrés de droite ont donc la même aire que celui de gauche, soit $a^2+b^2=c^2$.

Preuve 2 :
Beaucoup d'autres preuves visuelles ont été données pour cette propriété. La plus simple peut-être et la plus répandue utilise la décomposition suivante. Les quatre triangles rectangles de gauche découpent un carré (voir preuve 1) et se recomposent en deux rectangles qui laissent apparaître les deux petits carrés de la figure de droite. Ces deux carrés ont même aire que le grand carré de gauche pour des raisons de conservation de l'aire par découpage et recomposition.



Remarque :
On peut utiliser le calcul littéral pour apporter une autre sorte de preuve, plus algébrique que les précédentes. Le grand carré extérieur a pour côté a+b et donc pour aire $(a+b)^2$. Le carré rose a pour côté c, son aire c^2 est obtenue en enlevant à celle du grand carré, l'aire des quatre triangles rectangles, soit en faisant : $c^2=(a+b)^2-4\times(\frac{a\times b}{2})=a^2+b^2+2ab-2ab=a^2+b^2$.

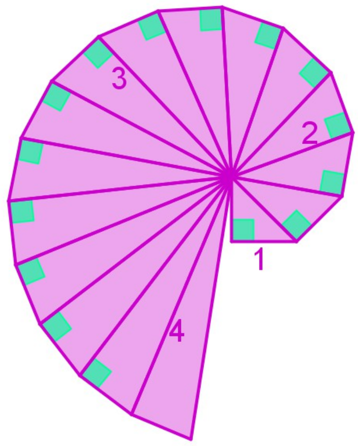
Application pratique de cette propriété :
Dans un triangle rectangle, on peut calculer un côté si on connaît les deux autres. Si, comme dans la figure ci-contre, on a un triangle ABC, rectangle en A, tel que AC = 8 et BC = 11, alors, la propriété de Pythagore nous dit que $AB^2 + AC^2 = BC^2$, c'est à dire que AB vérifie l'égalité :
$AB^2 + 8^2 = 11^2$ et donc $AB^2 = 121 - 64 = 57$.
Le nombre positif qui a pour carré 57 est appelé la « racine carrée » de 57 et noté $\sqrt{57}$. Nous pouvons utiliser la calculatrice pour donner une valeur approchée de ce nombre, celle-ci nous donne $\sqrt{57}\approx 7{,}55$ et par conséquent $AB\approx 7{,}55$.



Pour donner un exemple encore plus simple, la diagonale d'un carré de côté 1 m mesure $\sqrt{2}\approx 1{,}414$ m.
Ces nombres, qui comportent un radical « racine carrée », sont rarement des nombres décimaux.
On a bien $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$ ou $\sqrt{\frac{9}{4}}=1{,}5$ mais on montre que, généralement, ils ne sont pas rationnels.
Rappel : un nombre rationnel peut s'écrire comme un rapport de deux nombres entiers.

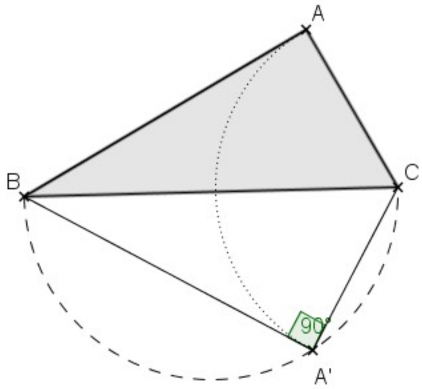
Remarque :
Lorsqu'on utilise un théorème, on le cite (cela fait partie de ce qu'on appelle une justification):
« Le triangle … étant rectangle en …, d'après le théorème de Pythagore, on a $\ldots^2 + \ldots^2 = \ldots^2$ »

La figure ci-contre est connue sous le nom de spirale de Théodore[2].
C'est une façon simple de construire des segments dont la longueur est la racine carrée d'un entier. Elle utilise des triangles rectangles dont un côté mesure une unité.



Propriété de Pythagore (réciproque) : Si, dans un triangle ABC on a $AC^2 + BC^2 = AB^2$ alors, ce triangle est rectangle **en C**.

Remarque :
Cette propriété permet de montrer qu'un angle est droit. Il faut disposer des longueurs des trois côtés et montrer clairement (comme dans l'exemple) que la somme des carrés de deux côtés égale le carré du 3ème côté. Elle découle naturellement de la propriété énoncée plus tôt qui est dite « propriété directe de Pythagore ». Voyons cela,



Preuve :
Supposons que ABC est un triangle vérifiant l'égalité $AC^2 + AB^2 = BC^2$. Prenons un point A' sur le demi-cercle de diamètre [BC] tel que CA' = CA. D'après la propriété vue dans la partie 1) l'angle $\widehat{BA'C}$ est un angle droit et donc, d'après la propriété directe de Pythagore on a $A'C^2 + A'B^2 = BC^2$.
Par identification de BC^2 entre les deux égalités précédentes $A'C^2 + A'B^2 = AC^2 + AB^2$, et comme par construction CA' = CA, on en déduit que $A'B^2 = AB^2$ et finalement A'B = AB. A et A' sont donc symétriques par rapport à (BC) et par conséquent les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BA'C}$ sont égaux. L'angle $\widehat{BAC}$ est donc droit.

2 Théodore de Cyrène était le maître de mathématiques du grand philosophe Platon qui explique dans son *Théétète*, qu'il fut le premier à démontrer l'irrationalité de ces racines carrées (vers 425 avant J.-C.).

Exemple 1 :
AB = 9, AC = 12 et BC = 15. Le triangle ABC est-il rectangle ?
Si oui en quel point ? $AB^2 = 81$, $AC^2 = 144$ et $BC^2 = 225$.
Comme 81 + 144 = 225, on a l'égalité $\mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2 = BC^2$, le triangle ABC est donc rectangle en **A.**

Exemple 2 :
AB = 160, AC = 140 et BC = 80. Le triangle ABC est-il rectangle ?
Si oui en quel point ? $AB^2 = 25\,600$, $AC^2 = 19\,600$ et $BC^2 = 6\,400$.
On remarque que 19 600+6 400 = 26 000 alors que le carré du plus grand côté est 25 600 et donc, non, la relation $A\mathbf{C}^2 + B\mathbf{C}^2 = AB^2$ n'est pas vérifiée, le triangle ABC n'est donc pas rectangle **en C.**
Précisons que nous avons choisi le plus grand des 3 côtés comme *l'hypoténuse potentielle* d'un éventuel triangle rectangle : l'hypoténuse étant toujours le plus grand des côtés d'un triangle rectangle, il suffit de vérifier que le plus grand des 3 côtés du triangle donné vérifie ou ne vérifie pas l'égalité de Pythagore avec les 2 autres côtés.

****
*** Fin du chapitre ***
****

Compléments facultatifs au sujet de Pythagore

Pourquoi appelle t-on cette propriété, propriété de Pythagore ?
Pythagore était un savant philosophe, religieux, thaumaturge (qui guérit de façon miraculeuse) et mystique de l'antiquité grecque. Sa vie est très peu connue et auréolée de légendes. Il serait né vers −570 à Samos, une des îles Sporades qui bordent l'actuelle Turquie dans la mer Égée. À l'age de 40 ans, après d'hypothétiques voyages initiatiques en Égypte et Mésopotamie, Pythagore émigre à Crotone, une ville du golfe de Tarente, dans l'actuelle Italie du Sud alors occupée par les grecs. Il y était un personnage très charismatique dont tous voulaient être le disciple.
Dans cette école pythagoricienne qu'il fonda, il y avait 4 niveaux d'initiation, et ce n'était qu'au 3$^{\text{ème}}$, après des années de préparation, que les disciples (*acousmaticiens*) pouvaient écouter leur maître derrière un rideau. Au niveau ultime, ils étaient appelés *mathématiciens* (ceux qui savent) et pouvaient le rencontrer. À la fin de sa vie, il s'exila à Métaponte où il mourut à l'âge de 85 ans. Au centre de l'enseignement du maître, à côté de ses préceptes sur le végétarisme, la métempsychose ou le cosmos, se trouvent les nombres entiers (« Tout est nombre », « Les choses sont des nombres ») mais aussi les proportions, donc les nombres rationnels, avec lesquelles il décrit notamment les lois de l'harmonie musicale. On suppose qu'il connaissait ce théorème qui porte son nom et qui conduisit à reconnaître l'existence de nombres qui ne sont pas des rapports d'entiers (les nombres irrationnels, comme $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{57}$) ce que ne pouvait pas admettre l'école pythagoricienne.

La première démonstration connue de ce théorème est celle qui figure dans *Les Éléments* d'Euclide, écrits deux siècles après la mort de Pythagore. Ce n'est que beaucoup plus tard, en hommage à ce grand fondateur des mathématiques, que l'on donna ce nom au théorème.

Nous avons mentionné le triplet de nombres entiers (3, 4, 5) comme vérifiant l'égalité de Pythagore.
Existe t-il d'autres triplets de nombres entiers vérifiant cette propriété ?

Voici les triplets pythagoriciens primitifs ne dépassant pas 100

3, 4, 5	5, 12, 13	7, 24, 25	9, 40, 41	11, 60, 61	13, 84, 85	15, 8, 17	21, 20, 29	33, 56, 65	35, 12, 37
39, 80, 89	45, 28, 53	55, 48, 73	63, 16, 65	65, 72, 97	77, 36, 85				

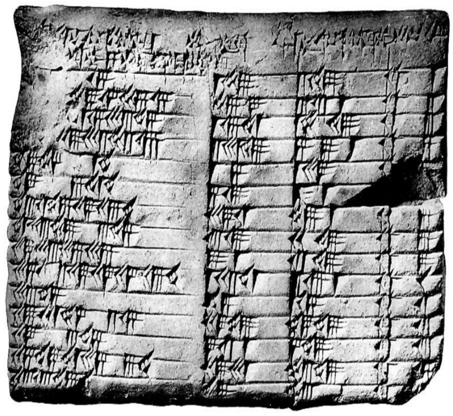
Voici les triplets pythagoriciens multiples des précédents ne dépassant pas 100

6, 8, 10	9, 12, 15	12, 16, 20	15, 20, 25	18, 24, 30	21, 28, 35	24, 32, 40	27, 36, 45	30, 40, 50	33, 44, 55
36, 48, 60	39, 52, 65	42, 56, 70	45, 60, 75	48, 64, 80	51, 68, 85	54, 72, 90	57, 76, 95	60, 80, 100	10, 24, 26
15, 36, 39	20, 48, 52	25, 60, 65	30, 72, 78	35, 84, 91	14, 48, 50	21, 72, 75	28, 96, 100	18, 80, 82	30, 16, 34
45, 24, 51	60, 32, 68	75, 40, 85	42, 40, 58	63, 60, 87	70, 24, 74				

Voici les 42 différentes valeurs que peut prendre z, inférieur à 100

5	10	13	15	17	20	25	26	29	30	34	35	37	39	40	41	45	50	51	52
53	55	58	60	61	65	68	70	73	74	75	78	80	82	85	87	89	90	91	95
97	100																		

Oui. L'image ci-dessus donne les triplets pythagoriciens dont le plus grand nombre (l'hypoténuse du triangle rectangle), noté z, ne dépasse pas 10 .
Déjà il y a tous ceux que l'on peut déduire de ce premier triplet par un agrandissement (en changeant l'unité de mesure par exemple). Ainsi les triplets (6, 8, 10) ou (30, 40, 50) vérifient-ils cette égalité, ce sont des multiples du triplet « primitif » (3, 4, 5).
Mais il y a d'autres triplets primitifs, il y en a même une infinité.



Il est possible que les triplets pythagoriciens aient été connus au moins 1000 ans avant Pythagore, car certains interprètent une tablette babylonienne (tablette Plimpton 322, datée du 18ème siècle avant J.-C.) comme des indications concernant les triplets pythagoriciens. Ces triplets de nombres n'avaient cependant sans doute aucune relation avec la géométrie du triangle rectangle et n'exprimeraient que la relation arithmétique existant entre certains nombres entiers.

Par ailleurs et pour terminer, on démontre que si p et q désignent deux *nombres premiers entre eux* (qui n'ont aucun diviseur commun à part 1), alors le triplet $(p^2-q^2, 2pq, p^2+q^2)$ est un triplet pythagoricien et tous les triplets pythagoriciens peuvent être trouvés avec cette formule.
Ainsi le plus petit triplet primitif (3, 4, 5) correspond à p=2 et q=1,
le suivant (5, 12, 13) correspond à p=3 et q=2, le multiple (6, 8, 10) correspond à p=3 et q=1, etc.