Classe de $4^{ème}$ Chapitre 3 : Fractions

Le programme tel qu'il est extrait de la page 29 du Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008

Connaissances :Produit de nombres positifs en écriture fractionnaire. * *Opérations* (+, – , · ) *sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire (non nécessairement simplifiée). Division de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire. Enchaînement d'opérations.*

Capacités : Déterminer une valeur approchée du quotient de deux nombres décimaux (positifs ou négatifs). * *Multiplier, additionner et soustraire des nombres relatifs en écriture fractionnaire. Diviser des nombres relatifs en écriture fractionnaire. Connaître et utiliser l'égalité :* $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$ *. Sur des exemples numériques, écrire en utilisant correctement des parenthèses, des programmes de calcul portant sur des sommes ou des produits de nombres relatifs. Organiser et effectuer à la main ou à la calculatrice les séquences de calcul correspondantes.*

Commentaires : Les élèves ont une pratique de la multiplication des nombres positifs en écriture décimale *ou fractionnaire*. Les calculs relevant de ces opérations sont étendus au cas des nombres relatifs. **L'addition de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire demande un travail sur la recherche de multiples communs à deux ou plusieurs nombres entiers dans des cas où un calcul mental est possible*. Savoir additionner et soustraire des entiers relatifs et multiplier deux nombres positifs écrits sous forme décimale ou fractionnaire deviennent des capacités exigibles dans le cadre du socle commun. * *Un travail est mené sur la notion d'inverse d'un nombre non nul ; les notations* $\frac{1}{x}$ *et* $x^{-1}$ *sont utilisées, ainsi que les touches correspondantes de la calculatrice.*

## 1) Égalité entre fractions (rappels)

Définitions: une *fraction* est un quotient de deux entiers (le diviseur du quotient ne peut être 0). Le dividende du quotient est appelé *numérateur* de la fraction et son diviseur est appelé *dénominateur* de la fraction. Une *fraction décimale* est une fraction dont le dénominateur est 1, 10, 100, 1000 (on dira une puissance de 10). L'*écriture fractionnaire* d'un quotient utilise le symbolisme des fractions mais n'oblige pas à avoir un dénominateur et un numérateur entiers.

Exemples : $\frac{1}{2}$ est une fraction égale à 1÷2, donc à 0,5. $\frac{5}{10}$ est une fraction décimale car son dénominateur est 10. $\frac{1}{3}$ est une fraction égale à 1÷3 qui n'a pas d'écriture décimale exacte (son écriture décimale est illimitée 0,333333... une suite infinie de 3). Le nombre $\frac{25}{0{,}0123}$ est un quotient écrit sous forme fractionnaire qui n'est pas une fraction car son dénominateur 0,0123 n'est pas entier. L'écriture $\frac{1}{0}$ n'est pas une fraction car le dénominateur d'une fraction ne peut être nul.

Remarque1 : Un quotient est souvent écrit sous la forme fractionnaire car cette forme est *économique*. Elle permet, en effet, de faire l'économie de parenthèses au numérateur et au dénominateur, lorsque ceux-ci sont obtenus par un calcul. Attention cependant à bien rétablir les parenthèses au cas où l'on doive utiliser la calculatrice ! La fraction $\frac{1+2}{4+2}=\frac{3}{6}$ vaut 0,5 alors que si on tape sur la calculatrice 1+2÷4+2, celle-ci affiche le résultat 3,5. Pour taper correctement ce calcul, il faut écrire (1+2)÷(4+2).

Remarque2 : Un quotient est souvent écrit sous la forme fractionnaire car cette forme permet d'écrire certains nombres de façon exacte alors que l'écriture décimale ne le permet pas. Par exemple, si on doit calculer le pourcentage de matière grasse dans un fromage de 3 kg contenant 2 kg de matière grasse, le résultat serait 66,6666...%. Le résultat exact est $\frac{200}{3}$ %. On pourra préférer une valeur approchée de ce quotient, par exemple 67%, ou une écriture mixte à l'anglaise 66 ⅔ % qui est une écriture exacte (mais non utilisée en France[1]).

La même propriété fondamentale de la division peut être énoncée en des termes légèrement différents pour les quotients et pour les fractions.

Propriété1 : un **quotient** ne change pas si on multiplie (ou si on divise) son **dividende** et son **diviseur** par un même nombre non nul.

Propriété2 : une **fraction** ne change pas si on multiplie (ou si on divise) son **numérateur** et son **dénominateur** par un même nombre non nul.

Ainsi, si $a$, $b$ et $c$ sont des nombres ($b$ et $c$ étant non nuls), on a : $\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}=\frac{a\div c}{b\div c}$

Remarque : Dans les égalités encadrées, si $a$, $b$ et $c$ sont entiers, seules les deux premières écritures fractionnaires sont toujours des fractions. L'écriture de droite n'est une fraction que si les quotients $a\div c$ et

1 Sauf pour les mesures exprimées dans une unité anglo-saxonne comme le pied ou le pouce. On lira par exemple que Mickaël Jackson mesurait 5'10⅓" ce qui signifie 5 pieds, 10 pouces et un tiers de pouce, soit 70,33333... pouces. En effet, le pied valant 12 pouces, il s'agit de $5\times12+10+\frac{1}{3}=70+\frac{1}{3}=\frac{210}{3}+\frac{1}{3}=\frac{211}{3}$ pouces, soit environ 179 cm, un pouce mesurant environ 2,54 cm. Attention cependant lorsqu'il s'agit d'écran ! On parle d'un écran de 17" 4/3, sous-entendu un écran de diagonale 17 pouces (environ 43 cm), mais la fraction 4/3 ne concerne pas cette longueur. Elle donne seulement le rapport entre la longueur et la largeur de l'écran...

$b \div c$ sont des entiers.

Exemples : $\frac{3}{4}=\frac{3\times 25}{4\times 25}=\frac{75}{100}$ , soit 75%. Cette propriété sert à transformer une fraction en *pourcentage*.
$\frac{3}{12}=\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{1}{4}$ . Dans le sens inverse, cette propriété permet de *simplifier* les fractions (de les écrire avec des nombres plus petits). Notez qu'on peut aussi écrire $\frac{3}{12}=\frac{3\div 3}{12\div 3}=\frac{1}{4}$ .

Défi : Voici une curiosité numérique trouvée sur le site du canadien Charles-É.Jean, 6 fractions égales à 9 dont les 3 premières sont écrites avec les chiffres de 1 à 9 alors que les 3 dernières sont écrites avec les chiffres de 0 à 9. Pourriez-vous trouver de telles écritures pour les nombres entiers de 1 à 8 ?

$$9=\frac{57429}{6381}=\frac{58239}{6471}=\frac{75249}{8361}=\frac{95742}{10638}=\frac{95823}{10647}=\frac{97524}{10836}$$

D'après la règle des signes pour les quotients vue au chapitre 1, pour qu'une fraction soit négative, il faut qu'un seul des entiers qui la compose soit négatif. D'une façon plus générale, la propriété ci-dessous résume la situation et permet de « se débarrasser » de certains signes parfois ou de positionner le signe − au bon endroit (devant la distance à zéro).

Propriété : Si $a$ et $b$ sont des nombres ($b$ étant non nul), on a : $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$ .

Exemples : $\frac{3}{1-5}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}$ ; $\frac{12-25}{30-19}=\frac{-13}{11}=-\frac{13}{11}$ ; $\frac{1-2}{10-20}=\frac{-1}{-10}=\frac{1}{10}$ .

Propriété : Si deux fractions de même dénominateur sont égales, alors les numérateurs doivent être égaux. En d'autres termes, $a$, $b$ et $c$ étant 3 nombres ($c$ étant non nul), si $a=b$ alors $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$ et réciproquement.

C'est une des propriétés des égalités : une égalité ne change pas si on la multiplie (ou si on la divise) par un nombre non nul.
On peut s'interroger maintenant sur l'égalité de deux fractions quelconques, $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ . Mettons ces fractions au même dénominateur $b\times d$, nous obtenons les fractions $\frac{a}{b}=\frac{a\times d}{b\times d}$ et $\frac{c}{d}=\frac{c\times b}{d\times b}=\frac{b\times c}{b\times d}$ . Si ces fractions sont égales, comme elles ont les mêmes dénominateurs, d'après la propriété ci-dessus, cela signifie que leurs numérateurs sont égaux, donc que $a\times d = b\times c$. Résumons cette propriété appelée égalité du *produit en croix*.

Propriété : Si $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres ($b$ et $d$ étant non nuls), si $a\times d = b\times c$ alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ , et réciproquement, si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ alors $a\times d = b\times c$.

Exemples : $2\times(-21) = -3\times 14 = -42$ donc $\frac{2}{-3}=\frac{14}{-21}$ .
Les fractions $\frac{-20}{3}$ et $\frac{120}{-18}$ sont-elles égales ? Oui, car $(-20)\times(-18)= 20\times 18 = 360$ et $3\times 120 = 360$, donc $(-20)\times(-18) = 3\times 120$. Les produits en croix étant égaux, les fractions sont égales.

## 2) Additions et soustractions avec des écritures fractionnaires (rappels)

Propriété : Deux fractions ayant le même dénominateur s'additionnent (ou se soustraient) simplement, en additionnant (ou en soustrayant) les numérateurs.
En d'autres termes, $a$, $b$ et $c$ étant 3 nombres entiers ($c$ étant non nul), $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ .

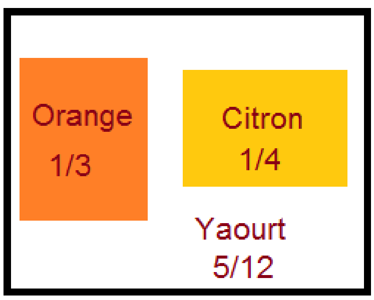
Remarque : Cette propriété peut s'énoncer aussi pour des écritures fractionnaires quelconques.
Exemples : $\frac{1}{12}+\frac{5}{12}=\frac{1+5}{12}=\frac{6}{12}$ ; $\frac{1}{100}-\frac{5}{100}=\frac{1-5}{100}=\frac{-4}{100}=-\frac{4}{100}$ ; $\frac{-1,3}{5,7}-\frac{0,03}{5,7}=\frac{-1,3-0,03}{5,7}=\frac{-1,33}{5,7}$ .
$\frac{1}{4a}+\frac{3b}{4a}=\frac{1+3b}{4a}$ , dans cette dernière expression $a$ et $b$ sont des nombres quelconques ($a$ étant non nul).

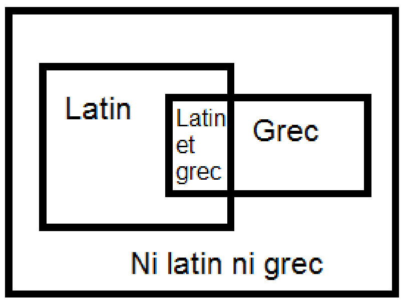
Pour additionner (ou soustraire) des fractions de dénominateurs différents, il faut les « mettre au même dénominateur », puis utiliser la propriété ci-dessus. Pour mettre deux fractions au même dénominateur, on peut utiliser la méthode décrite plus haut, à savoir, mettre les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ au même dénominateur $b\times d$, nous obtenons la règle d'addition suivante. On pourrait également énoncer une règle similaire pour la soustraction.

| |
|---|
| *a, b, c* et *d* étant 4 nombres (*b* et *d* étant non nuls) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times d}+\frac{b\times c}{b\times d}=\frac{a\times d+b\times c}{b\times d}=\frac{ad+bc}{bd}$ |

Remarque 1 : Nous avons employé une écriture simplifiée pour la dernière expression qui suppose qu'entre 2 lettres représentant des nombres différents soit rajouté systématiquement le symbole de multiplication.
Remarque 2 : Cette méthode n'est pas la seule applicable. Le dénominateur commun peut être parfois choisi plus petit que le produit des 2 dénominateurs, ou plus grand. Voyons quelques exemples pour préciser cela,
Exemples : $\frac{1}{2}+\frac{-4}{3}=\frac{1\times 3}{2\times 3}+\frac{-4\times 2}{3\times 2}=\frac{3}{6}+\frac{-8}{6}=\frac{3-8}{6}=\frac{-5}{6}$ , ici nous n'avons rien changé à la méthode.
$\frac{-7}{15}-\frac{3}{50}=\frac{-7\times 10}{15\times 10}-\frac{3\times 3}{50\times 3}=\frac{-70}{150}-\frac{9}{150}=\frac{-70-9}{150}=\frac{-79}{150}$ , ici nous n'avons pas pris 15×50 comme dénominateur commun (c'est possible, mais les calculs sont plus importants) car nous avons reconnu que 15 et 50 sont tous deux des multiples de 5, et par conséquent on peut supprimer du dénominateur commun un des facteurs 5 : 150 = (3×**5**)×10 = 3×(**5**×10) alors que 750 = (3×5)×(5×10).
Pour comprendre comment on fait pour trouver le plus petit dénominateur commun qui convient, on peut dresser les tables de multiplication pour les 2 dénominateurs :
Table de 15 : 15 – 30 – 45 – 60 – 75 – 90 – 105 – 120 – 135 – **150** – 165 – etc.
Table de 50 : 50 – 100 – **150** – 200 – etc. Inutile d'aller plus loin, 150 est le premier multiple commun à 15 et à 50 (on appelle cela le PPCM[2], Plus Petit Commun Multiple).
$\frac{1}{2}+\frac{-1}{4}-\frac{3}{16}=\frac{1\times 8}{2\times 8}+\frac{-1\times 4}{4\times 4}-\frac{3}{16}=\frac{8}{16}+\frac{-4}{16}-\frac{3}{16}=\frac{8-4-3}{16}=\frac{1}{16}$ , le plus petit multiple commun à 2, 4 et 16 étant 16 lui-même, la dernière fraction n'est pas modifiée. Inutile ici d'utiliser le dénominateur commun que voudrait la règle énoncée plus haut, à savoir 2×4×16 = 128, les calculs s'en trouveraient alourdis et il faudrait ensuite simplifier le résultat obtenu par 8 (les résultats sont souvent souhaités sous la forme la plus simple possible).

Application dans les problèmes : On rencontre l'addition (ou la soustraction) de fractions à chaque fois qu'il est question d'ajouter (ou de soustraire) des **parts disjointes d'un même ensemble**, des pourcentages par exemple. La situation concerne en effet un certain *ensemble de référence* dont les parts totalisent 100% du tout. On va pouvoir ajouter les parts de deux sous-ensembles disjoints alors que si les sous-ensembles ne sont pas disjoints, cette addition n'a pas de sens. Par exemple, une boisson contient un tiers de jus d'orange, un quart de jus de citron, le restant étant du yaourt. La part des jus de fruit est égale à $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1\times 4}{3\times 4}+\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12}$ tandis que le yaourt représente $1-\frac{7}{12}=\frac{12}{12}-\frac{7}{12}=\frac{12-7}{12}=\frac{5}{12}$ du mélange.




Si on nous dit que, dans une classe, 50% des élèves font du latin et que 30% font du grec, cela ne veut pas dire que 50+30=80% des élèves font du grec ou du latin, car certains élèves peuvent faire les deux (les ensembles « Latin » et « Grec » ne sont pas disjoints). Par contre, si on nous dit que, dans cette même classe 10% des élèves étudient le latin et le grec, cela signifie que 50−10=40% des élèves font du latin seul, 30−10=20% des élèves font du grec seul et que 100−(40+20+10)=100−70=30% ne font ni du grec ni du latin.
On peut aussi rencontrer des situations où les répartitions d'un ensemble en sous-ensembles disjoints sont entrecroisées. Examinez par exemple ce tableau décrivant la répartition démographique de la France métropolitaine en l'an 2011, selon les critères du sexe et de l'âge. Il est possible de le compléter en ne connaissant pas toutes les valeurs, en raison de l'information redondante (en double) qu'il contient. Par exemple, si on ignore la part des Femmes adultes (29,7%), on peut la recalculer à partir des autres

2 Pour éviter d'avoir à dresser ces tables de multiplication, on utilise aussi la *décomposition des nombres en facteurs premiers* qui est unique pour tout nombre entier. Les décompositions de 15 et 50 en facteurs premiers sont 15 = 3×5 et 50 = 2×5×5. Il suffit ensuite de prendre ce qui est commun aux 2 décompositions (ici un facteur 5) et d'y multiplier ce qui appartient spécifiquement à l'une et à l'autre décomposition (ici 3 qui appartient spécifiquement à la décomposition de 15 et 2×5 qui appartiennent spécifiquement à celle de 50). Le PPCM de 15 et 50 est donc 5×3×2×5, soit 150.

informations du tableaux : 29,7=58,7−29,0 ou encore 29,7=51,6−(11,9+9,9).

| | Moins de 20 ans | de 20 à 64 ans | 65 ans ou plus | totaux |
|---|---|---|---|---|
| Femmes | 11,9% | 29,7% | 9,9% | 51,6% |
| Hommes | 12,5% | 29,0% | 7,0% | 48,4% |
| totaux | 24,3% | 58,7% | 16,9% | 100,0% |

## 3) Multiplications avec des écritures fractionnaires

Propriété : Pour multiplier deux fractions entre elles, on multiplie entre eux les numérateurs et les dénominateurs des 2 fractions.
En d'autres termes, *a*, *b*, *c* et *d* étant 4 nombres entiers (*c* et *d* étant non nuls), $\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{a\times b}{c\times d}$ .

Remarque : Cette propriété peut s'énoncer aussi pour des écritures fractionnaires quelconques.
Justification de cette règle : La multiplication est *commutative* (on peut échanger les facteurs d'un produit) et *associative* (dans une suite de multiplication, on peut enlever les parenthèses et commencer par la multiplication qu'on veut). On peut ainsi interpréter la multiplication de 2 fractions comme un produit de 4 nombres $\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=(a\times\frac{1}{c})\times(b\times\frac{1}{d})=a\times b\times(\frac{1}{c}\times\frac{1}{d})=(a\times b)\times(\frac{1}{c\times d})=\frac{a\times b}{c\times d}$ .

Rappel sur les quotients et la notion d'inverse : La décomposition d'une fraction en un produit $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$ que nous avons utilisé ici provient de la définition même du quotient de *a* par *b* : par quoi faut-il multiplier *b* pour trouver *a* ? Par 2 nombres : par le nombre *a* bien sûr et aussi par un nombre *b*' qui neutralise *b*, tel que *b*×*b*'=1 qu'on appelle l'**inverse de *b*** et que l'on calcule en divisant 1 par *b* d'où la notation *b*'= $\frac{1}{b}$ . On a ainsi *b*×(*b*'×*a*)=*b*× $\frac{1}{b}$ ×*a*=*a*. Ce produit *b*'×*a*= $\frac{1}{b}$ ×*a*= $\frac{a}{b}$ est le quotient de *a* par *b.*

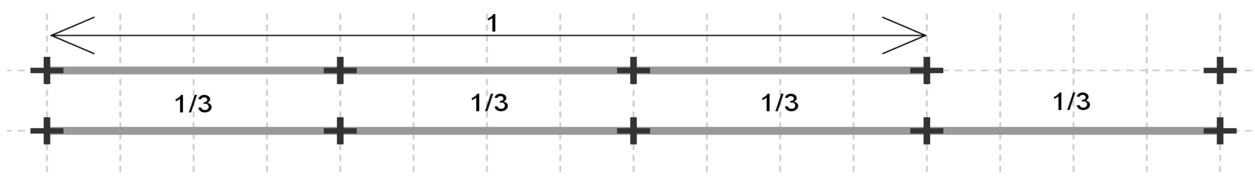
Exemples : Avec des dénominateurs différents (cas général) $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1\times3}{3\times4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ .
Attention! Avec des dénominateurs égaux, la règle est inchangée : on doit multiplier les dénominateurs entre eux. $\frac{1}{12}\times\frac{5}{12}=\frac{1\times5}{12\times12}=\frac{5}{144}$ . Ne pas confondre avec l'addition (ou la soustraction) $\frac{1}{12}+\frac{5}{12}=\frac{1+5}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ !!
Donnons encore d'autres exemples, avec des nombres décimaux relatifs variés :
$\frac{0{,}1}{2}\times\frac{12{,}3}{100}=\frac{0{,}1\times12{,}3}{2\times100}=\frac{0{,}123}{200}$ ; $\frac{-2{,}5}{7}\times\frac{50}{-11}=\frac{-2{,}5\times50}{7\times(-11)}=\frac{-125}{-77}=\frac{125}{77}$ ; $3\times\frac{12}{100}=\frac{3\times12}{100}=\frac{36}{100}=\frac{9}{25}$

Application dans les problèmes : On rencontre la multiplication des fractions à chaque fois que, dans une situation donnée, on trouve un énoncé du type « la quantité *xxx* vaut les 2 tiers *de* la quantité *yyy* ». L'expression ...*de*... dans un énoncé se traduit par une multiplication dans une égalité. Ici, on aurait $xxx=\frac{2}{3}\times yyy=\frac{2\times yyy}{3}$ . De même, on va multiplier 2 fractions entre elles si, dans l'énoncé, il est question de « fraction *d*'une fraction ». Par exemple, dans l'expression les trois quarts *d*'une demi-heure, on doit comprendre qu'il s'agit de 22,5 minutes car $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3\times1}{4\times2}=\frac{3}{8}$ et $\frac{3}{8}\times60=3\times\frac{60}{8}=3\times\frac{15}{2}=3\times7{,}5=22{,}5$ .

Remarque finale : Rien de plus simple donc que la multiplication des fractions entre elles ou d'une fraction par un nombre. Pour ce dernier point, on peut (dans un premier temps) écrire le nombre entier avec un dénominateur égal à 1, pour comprendre que $a\times\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{b}{c}=\frac{a\times b}{1\times c}=\frac{a\times b}{c}$ .

## 4) Divisions avec des écritures fractionnaires

Pour diviser un nombre *a* par *b*, nous avons rappelé qu'il fallait multiplier *a* par l'inverse de *b*. Mais quel est l'inverse d'une fraction $c=\frac{a}{b}$ ? C'est un nombre *c*' tel que *c*×*c*'=1. Nous pouvons vérifier, avec la règle sur la multiplication vue plus haut que $c'=\frac{b}{a}$ car alors *c*×*c*'= $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{a\times b}{b\times a}=\frac{ab}{ab}$ =1. L'inverse de $\frac{3}{4}$ est $\frac{4}{3}$ et cela peut être illustré très simplement en montrant que les 3 quarts de 4 tiers valent 1 :



Règle : Pour diviser deux fractions entre elles, on multiplie la première par l'inverse de la deuxième.
En d'autres termes, $a$, $b$, $c$ et $d$ étant 4 nombres entiers ($b$, $c$ et $d$ étant non nuls), $\frac{a}{c}\div\frac{b}{d}=\frac{a}{c}\times\frac{d}{b}=\frac{a\times d}{c\times b}$.
Cas particuliers : $a\div\frac{b}{c}=a\times\frac{c}{b}=\frac{a\times c}{b}$ et $\frac{a}{c}\div b=\frac{a}{c}\times\frac{1}{b}=\frac{a\times 1}{c\times b}=\frac{a}{c\times b}$

Remarque et cas particuliers : On note parfois la division des fractions avec le trait de fraction. Les fractions à étages que l'on obtient sont parfaitement définies si on prend bien soin de **placer le signe égal au même niveau que le trait de fraction**. Réécrivons la règle et ses cas particuliers de cette façon :

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}=\frac{a}{c}\times\frac{d}{b}=\frac{a\times d}{c\times b}\ ;\ \frac{a}{\frac{b}{c}}=a\times\frac{c}{b}=\frac{a\times c}{b}\ ;\ \frac{\frac{a}{c}}{b}=\frac{a}{c}\times\frac{1}{b}=\frac{a\times 1}{c\times b}=\frac{a}{c\times b}$$

Exemples : $\frac{\frac{5}{12}}{\frac{4}{3}}=\frac{5}{12}\times\frac{3}{4}=\frac{5\times 3}{12\times 4}=\frac{15}{48}=\frac{5}{16}$

$$\frac{10}{\frac{15}{100}}=10\times\frac{100}{15}=\frac{10\times 100}{15}=\frac{1000}{15}=\frac{200}{3}\approx 66{,}67\ ;\ \frac{\frac{10}{15}}{100}=\frac{10}{15}\times\frac{1}{100}=\frac{10\times 1}{15\times 100}=\frac{10}{1500}=\frac{1}{150}\approx 0{,}00667$$

Mélange d'opérations diverses avec des fractions ou des écritures fractionnaires : il faut se rappeler les règles de priorités (déjà rappelées au chapitre 1) et aussi le rôle particulier du trait de fraction sur ces priorités. Voici par exemple un petit calcul typique et sympathique, où il faut d'abord chercher à calculer le numérateur et le dénominateur de la fraction principale (celle qui fait face au signe =) :

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{-4}{15}}{1+\frac{3}{5}\times\frac{-1}{3}}=\frac{\frac{5}{15}+\frac{-4}{15}}{\frac{15}{15}+\frac{-3}{15}}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{12}{15}}=\frac{1}{15}\times\frac{15}{12}=\frac{15}{180}=\frac{1}{12}\approx 0{,}0833$$

Remarque : Il vaut mieux, si l'on effectue les calculs à la main (donc avec sa tête, sans calculatrice), simplifier les calculs dès que c'est possible. Cela allège les calculs intermédiaires, et de toutes façons, la plupart du temps, on simplifiera la fraction obtenue, donc autant simplifier le plus tôt possible. Dans notre exemple, on aurait pu simplifier par 15 assez rapidement. On pourra retenir la règle de simplification suivante, valable évidemment si $c$ n'est pas nul :

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{b}$$

Quelques petits problèmes pour finir :

1) **Diophante d'Alexandrie** a vécu au 3ème siècle. Il a laissé de nombreux livres de mathématiques qui ont inspiré les mathématiciens pendant des siècles. On connaît de lui son épitaphe, rédigé en vers par un certain Métrodore vers l'an 500 qui nous permet de calculer l'âge qu'avait Diophant lorsqu'il mourut. Voici le problème en abrégé : « *L'enfance de Diophante occupa un sixième de toute sa vie. Le douzième fut pris par son adolescence. Après une nouvelle période équivalente au septième de sa vie, il se maria. Cinq ans plus tard, il eut un fils. La vie de ce fils fut exactement une demie de celle de son père. Diophante mourut quatre ans après la mort de son fils.* »

2) Paul achète pour sa mère un bouquet de 48 fleurs. Le tiers d'entre elles sont des roses. Les $\frac{3}{8}$ du reste sont des mimosas. Combien y a-t-il de roses dans le bouquet ? Combien y a-t-il de mimosas ? Combien y a-t-il d'autres fleurs (qui sont des tulipes) ? Une rose coûte 1,22 euros, un mimosa 0,76 euros, une tulipe 0,69 euros. Écrire sans l'effectuer un calcul en une ligne donnant le prix du bouquet.

3) M$^{r}$ et M$^{me}$ K. ont acheté une cuisine intégrée. Ils ont payé le sixième du prix à la commande, un quart du prix à la livraison et le reste en six mensualités d'un même montant. Quelle fraction du prix représentent les six mensualités ? La cuisine, TVA et installation comprise, a couté 3 600€. Calculez le montant d'une mensualité.

4) Stéphanie prend $\frac{3}{8}$ d'une tablette de chocolat, et donne $\frac{2}{3}$ de sa part à son frère Nicolas. Quelle fraction de la tablette a Nicolas ? La tablette pèse 100 g. Combien pèse la part de Nicolas ?