Classe de $4^{\text{ème}}$ **Chapitre 2 : Puissances**

Chapitre 2 : Puissances

1) Puissances

a) carrés et cubes

On a déjà rencontré la notation $5^2=5\times5=25$, pour calculer l'aire d'un carré de côté 5.
D'ailleurs on dit « 5 au carré égale 25 » ou « le carré de 5 est 25 ».
Le carré d'un nombre est égal au nombre multiplié par lui-même, pour un nombre quelconque x, le carré de x vaut $x^2=x\times x$. Ainsi le carré de 12 est $12^2=12\times12=144$, le carré de 2,5 est $2{,}5^2=2{,}5\times2{,}5=6{,}25$ et le carré de -1 est $(-1)^2=(-1)\times(-1)=1$.

On peut calculer le carré de n'importe quel nombre.
En fait, il ne s'agit que d'une notation nouvelle et pratique qui évite d'écrire un des facteurs d'un produit de 2 facteurs égaux. C'est une simplification d'écriture qui raccourcit les expressions numériques.
Ainsi, on écrit $(1+2x)^2$ à la place de $(1+2x)\times(1+2x)$.

Pour calculer le volume d'un cube on a rencontré la notation $5^3=5\times5\times5=125$, qui se dit « 5 au cube égale 125 » ou « le cube de 5 est 125 ». Le cube d'un nombre est ainsi égal au produit de trois facteurs égaux au nombre lui-même. Pour un nombre quelconque x, le cube de x vaut $x^3= x\times x\times x$.
Ainsi, le cube de 10 est $10^3=10\times10\times10=1000$, le cube de 1,1 est $1{,}1^3=1{,}1\times1{,}1\times1{,}1=1{,}331$ et le cube de -1 est $(-1)^2=(-1)\times(-1)\times(-1)=-1$.

La calculatrice a une touche spéciale pour le carré, notée x^2 généralement, et souvent aussi une touche spéciale pour le cube, notée x^3, mais si celle-ci n'est pas présente on forme le carré en utilisant la *notation des puissances* (qui nécessite sur la plupart des calculatrices de collège de taper la séquence x ^ 3, par exemple *5* ^ 3 pour 5^3).

Attention à ne pas confondre le carré d'un nombre et le double de ce nombre !

$$5^2=25 \text{ alors que } 5\times2=10.$$

Cette erreur d'inattention ressemble à celle qui consiste à confondre 5+5 et 5×5 ou la droite et la gauche...

b) Puissances d'exposants positifs

La notation des puissances étend ces notations du carré et du cube.

> Définition:
> x étant un nombre quelconque et n étant un entier positif non nul, on appelle *puissance* $n^{ième}$ du nombre x le produit de n facteurs égaux à x et on note ce nombre x^n.
> Ainsi $x^n=x\times x\times x\times\ldots\times x$, dans ce produit il y a n fois le facteur x.
> Le nombre de facteurs égaux — l'entier n que l'on écrit en indice— est appelé *exposant* du nombre x.

Exemples :

$2^8=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=256$; $0{,}5^1=0{,}5$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3\times3}=\frac{32}{729}$$

$$(-1)^{11}=(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)=-1$$

$10^{25}=10\times10\times10\times\ldots\times10=10\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$. Cette dernière égalité montre à quel point les puissances de 10 permettent de simplifier l'écriture des grands nombres. Il y a en effet, autant de zéros à droite du 1 dans le membre de droite que l'indique l'exposant de 10 dans le membre de gauche. C'est l'idée qui est à la base de la *notation scientifique* (voir plus loin).

Propriétés :

- $0^n=0$ et $1^n=1$ pour tout entier n.
- $(-1)^n=1$ pour tout n pair et $(-1)^n=-1$ pour tout n impair.

Ces deux dernières égalités traduisent la règle des signes pour le produit de nombres négatifs entre eux.

Simplification d'écriture :

Pour tout nombre x on a $x^1=x$ (cela vient de la définition).

Convention :
pour tout nombre x on a $x^0=1$.
Cela est nécessaire pour la cohérence de la suite des puissance d'un nombre, par exemple la suite des puissances de 2 est 2, 4, 8, 16, 32, etc. En allant vers la droite on multiplie par 2, donc en allant vers la gauche on divise par 2. Il est donc logique d'avoir, à gauche de 2, le résultat de 2÷2, c'est-à-dire 1.
Ainsi, $2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, etc. De même, on a $10^0=1$, $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, etc.

Propriété (produit de puissances)
Pour tous nombres x et y, et tous entiers positifs m et n, on a :
$$x^m\times x^n=x^{m+n}\ ,\ (x^m)^n=x^{m\times n}\ \text{ et }\ x^n\times y^n=(x\,y)^n\ .$$

Ces propriétés viennent des constatations suivantes que l'on peut faire sur des regroupements de facteurs qui découlent naturellement des propriétés de la multiplication :
$$2^3\times 2^5=(2\times 2\times 2)\times(2\times 2\times 2\times 2\times 2)=2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2=2^{(3+5)}=2^8$$
$$(2^3)^2=(2\times 2\times 2)\times(2\times 2\times 2)=2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2=2^{(3\times 2)}=2^6$$
$$(2^3)\times(5^3)=(2\times 2\times 2)\times(5\times 5\times 5)=2\times 2\times 2\times 5\times 5\times 5=(2\times 5)\times(2\times 5)\times(2\times 5)=(2\times 5)^3=10^3=1000$$

Exemples :
On utilisera cette dernière propriété pour simplifier l'écriture $(3x)^2=3^2\times x^2=9x^2$.
Inversement, pour écrire $144x^2$ comme un carré, le carré de $12x$, car $144=12^2$ et donc $144x^2=12^2\times x^2=(12x)^2$.
L'usage de la notation scientifique (voir plus loin) nous conduira à des calculs sur les puissances de 10 :
$$(10^5)^2=10^{(5\times 2)}=10^{10}=10\,000\,000\,000$$
$$8\times 10^5\times 10^9=8\times 10^{(5+9)}=8\times 10^{14}=800\,000\,000\,000\,000$$
Un dernier exemple où l'on rencontre une écriture un peu plus complexe :
$$3\times 10^5\times(2\times 10^3)^2=3\times 10^5\times 2^2\times 10^{3\times 2}=3\times 4\times 10^{5+6}=12\times 10^{11}=1\,200\,000\,000\,000$$

Méthode (sommes et différences)
Pour simplifier une écriture faisant intervenir une somme ou une différence de puissances, on peut parfois utiliser une factorisation ; il n'y a pas de véritables propriétés sur ce sujet.

Exemples :
Dans l'expression 5^2+5^3 on peut mettre 5^2 en facteur : $5^2+5^3=5^2(1+5)=6\times 5^2=6\times 25=150$.
Bien sûr, on aurait aussi pu calculer directement $5^2+5^3=25+125=150$.
Un autre exemple (plus compliqué) dans lequel la factorisation permet de simplifier une expression :
$$(1+2x)^3-(1+2x)^2=(1+2x)^2\times((1+2x)-1)=(1+2x)^2\times(2x)=2x(1+2x)^2\ .$$

Les calculatrices ou les ordinateurs ont une touche spéciale pour la notation des puissances :
C'est généralement l'accent circonflexe ^ ou bien la flèche ↑ ou encore une touche plus explicite comme x^y.
Ainsi, pour calculer 8^5 (le résultat est 32 768), il faut taper la séquence 8 ^ 5=, ou 8 ↑ 5= ou encore 8 x^y 5=

Règle de priorité :
L'opération d'*élévation à la puissance* est une opération **prioritaire**, qui passe avant les produits et les quotients, et aussi bien sûr avant les additions, les soustractions et les signes.

Exemples :
Pour évaluer l'expression 3×5^2, on commence par élever 5 au carré, et ensuite seulement on multiplie par 3 : $3\times 5^2=3\times 25=75$. Si on veut effectuer le produit d'abord, il faut des parenthèses : $(3\times 5)^2=15^2=225$.
Ainsi, on a $5-3^2=5-9=-9$ et encore $-4^3=-64$.
Si on veut élever −4 au cube, il faut mettre des parenthèses : $(-3)^4=81$ alors que $-3^4=-81$.

c) Utilité des puissances
L'utilité des puissances dépasse de loin la simplification des écritures qu'entraîne cette notation :
C'est un modèle de croissance pour certains phénomènes, mais c'est aussi et surtout une notion qui est à la base même de notre système de numération.

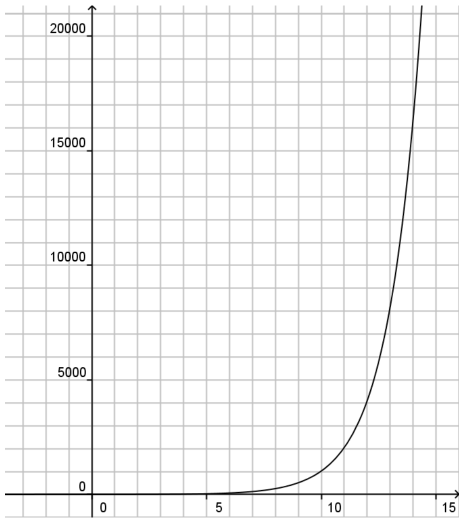
La croissance *exponentielle* est une situation très fréquente où une certaine grandeur est multipliée, à

chaque étape, par un même nombre. Si on appelle a la valeur initiale de cette grandeur, et si on multiplie à chaque étape par un nombre b, alors au bout de n étapes, la grandeur sera égale à $a \times b^n$.
Par exemple, si une population initialement de 100 personnes double chaque année, alors au bout de 10 ans elle sera égale à $100\times2^{10}=102\,400$ personnes et au bout de 20 ans elle sera égale à $100\times2^{20}=104\,857\,600$ personnes. On voit bien que ce modèle, qui conduit à des valeurs infinies lorsque $b>1$, ne peut être suivi que pour un temps donné : avec cette croissance, notre population de 100 passerait en 26 ans à une population du même ordre de grandeur que la population mondiale ($100\times2^{26}=6\,710\,886\,400$ personnes).
Selon ce même modèle de croissance, on raconte la légende du jeu d'échec :
Son inventeur aurait demandé au roi qu'on le paie en mettant 1 grain de riz sur la 1ère case de l'échiquier, le double sur la suivante, etc. Comme il y a 64 cases sur un échiquier cette exigence conduirait le roi à disposer 2^{63} grains de riz sur la dernière case, soit plus de 9 milliards de milliards de grains qui, ajoutés aux grains de riz déjà placés sur les 63 premières cases, feraient le double...

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576
Somme	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	16383	32767	65535	131071	262143	524287	1048575	2097151

Une propriété intéressante des puissances de 2 est en effet que la somme des puissances de 2 inférieures à n soit égale à 2^n-1. Sauriez-vous prouver cette propriété qui s'écrit aussi $2^n=1+2^0+2^1+2^2+...+2^{n-1}$ et qui est illustrée par le tableau ci-dessus?

Notre système de numération utilise les puissances de 10.
Pour exprimer n'importe quel nombre avec 10 chiffres, on décompose le nombre selon les puissances de 10 décroissantes.
Ainsi 2020 se décompose en $2\times10^3+0\times10^2+2\times10^1+0\times10^0$.
Ce système de numération n'est pas le seul à fonctionner ainsi : on aurait pu choisir n'importe quel nombre entier supérieur à 1 comme base de numération. D'ailleurs, des systèmes de numérations dont la base est 2, 8, 16, 20 ou 60 ont aussi été employés et certains le sont encore.



Les puissances de 2

Le *système binaire* par exemple, qui fonctionne à partie des puissances de 2 (encore elles!), est d'une importance primordiale puisqu'il sert à coder les caractères (chiffres, lettres et autres caractères) en informatique. On n'utilise dans ce système que 2 chiffres (0 et 1).
Le nombre 2020 se décompose selon les puissances de 2 en :
$1\times2^{10}+1\times2^9+1\times2^8+1\times2^7+1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$
En base 2, 2020 s'écrit donc 11111100100.

Selon ce principe, on obtiendrait 2202211 en base 3, 133210 en base 4 et 31040 en base 5 (à vérifier).
Les chiffres de 0 à 9 sont insuffisants pour traduire les nombres dans des bases supérieures à 10, c'est pour cela qu'on emploie des lettres (a pour le chiffre 10, b, pour 11, etc.).
Ainsi, 2020 s'écrit 7*e*4 en base 16 (*e* vaut 14) et 510 en base 20 (pas de lettres ici mais les chiffres en base 20 vont jusqu'au *i*).

d) Puissances d'exposants négatifs
L'exigence de cohérence que nous avons exposé pour la convention $x^0=1$ ne s'arrête pas à zéro :
Dans la série des puissances décroissantes d'un nombre x, chaque nouveau nombre est obtenu en divisant par x le précédent : ... x^4, x^3, x^2, $x^1=x$, $x^0=1$, on peut continuer à diviser par le facteur x et définir ainsi les puissances d'exposants négatifs.
Nous obtenons alors $x^{-1}=1\div x$, $x^{-2}=1\div x^2$, $x^{-3}=1\div x^3$, etc.

Définitions

x étant un nombre non nul et n étant un entier positif, on note $x^{-n}=1\div x^n=\frac{1}{x^n}=(\frac{1}{x})^n$.

D'une manière générale $x^{-1}=\frac{1}{x}$ est l'*inverse* du nombre x.

Exemples :

$2^{-8}=\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256}=0{,}00390625$; $2^{-1}=\frac{1}{2}=0{,}5$; $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}=0{,}001$; $(-5)^{-2}=\frac{1}{(-5)^2}=\frac{1}{25}=0{,}04$

Les calculatrices disposent souvent d'une touche notée x^{-1} qui sert à prendre l'inverse d'un nombre.

L'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}=1{,}5$.

D'une façon générale l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$ ce qui se note $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$.

Les très petits nombres vont pouvoir être noter avec une puissance négative de 10.

<u>Règle des zéros :</u> pour un entier positif *n*

$10^{-n}=\frac{1}{10^n}=\frac{1}{1000...(n \text{ zéros})}=0{,}00...1(n \text{ zéros, celui avant la virgule compris})$.

Exemples :

Un millième $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}=0{,}001$

Un milliardième $10^{-9}=\frac{1}{10^9}=\frac{1}{1\,000\,000\,000}=0{,}00\,000\,000\,1$.

<u>Propriétés</u> :

0^{-n} n'existe pas (on ne peut pas diviser par 0).

Pour tous nombres $x\neq 0$ et *y*, et tous entiers *m* et *n* on a :

$$\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}\ ,\ x^m\times x^n=x^{m+n}\ ,\ (x^m)^n=x^{m\times n} \text{ et } x^n\times y^n=(x\,y)^n$$

La première propriété permet de simplifier les quotients :

$\frac{2^5}{2^2}=\frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2}=2\times2=2^{5-3}=2^2=4$

$\frac{5^3\times7^2}{5^5\times7}=5^{3-5}\times7^{2-1}=5^{-2}\times7=0{,}04\times7=0{,}28$

$\frac{10^3\times10^{-2}}{(10^2)^3\times10^{-4}}=10^{3-2-6+4}=10^{-1}=0{,}1$

2) <u>Notation scientifique</u>

La notation scientifique d'un résultat est une façon de donner la valeur approchée d'une mesure qui utilise :

- une puissance de 10 pour donner l'*ordre de grandeur* de cette mesure
- un autre nombre (appelé parfois *mantisse*), compris entre 1 et 10 (10 exclu), qui indique les *premiers chiffres non nuls* de cette mesure et qui tient compte de la *précision* de la mesure.

Définition (notation scientifique) :

La forme d'un nombre décimal exprimé en *notation scientifique* est $a\times10^n$ où *n* est un entier et *a* est un nombre décimal dont la partie entière est formée d'un seul chiffre non nul, c'est-à-dire que $1\leq a < 10$.

<u>Exemples</u> :

0,00 052 se note $5{,}2\times10^{-4}$ en notation scientifique.

L'*ordre de grandeur* de ce nombre est le dix-millième 10^{-4} et ce nombre est connu avec une précision de 2 chiffres significatifs (non nuls).

Quand on dit que la vitesse de la lumière dans le vide est de 300 000 km/s, cela s'écrit 3×10^5, la précision n'est que de 1 chiffre pour cette valeur.

En réalité, elle a été définie en 1983 comme étant égale à 299 792 458 m/s (cette valeur définissant le mètre) c'est-à-dire $2{,}99\,792\,458\times10^5$ km/s, une valeur à 9 chiffres significatifs.

La masse d'un électron étant approximativement de $9{,}109\times10^{-31}$ kg et celle de la Terre étant d'environ $5{,}9736\times10^{24}$ kg, quel est le rapport entre ces masses ?

$5{,}9736\times10^{24}\div(9{,}109\times10^{-31})=\dfrac{5{,}9736\times10^{24}}{9{,}109\times10^{-31}}\approx0{,}655790976\times10^{24+31}\approx6{,}558\times10^{54}$.

Ce nombre (entier) obtenu contient 55 chiffres ! Si la Terre n'était faite que d'électrons, il y en aurait :

6558000000000000000000000000000000000000000000000000000

Attention à certaines écritures qui ressemblent à la notation scientifique sans en posséder toutes les caractéristiques. La *notation ingénieur* utilise des exposants qui sont des multiples de 3 (milliers, millions, etc.) comme avec le nombre $78{,}456\times10^{6}$ qui, en notation scientifique, s'écrirait $7{,}84\,56\times10^{7}$. La mantisse de cette notation ingénieur est un nombre compris entre 1 et 1000 (1000 exclu).

Remarques :

0 ne peut pas être représenté en notation scientifique.

Les nombres négatifs par contre sont acceptés. Il faut alors étendre notre définition pour accepter les mantisses négatives : un nombre décimal non nul peut s'exprimer sous la forme $\pm a\times10^{n}$ où a est un décimal compris entre 1 et 10 exclu.

Par exemple, la charge électrique d'un électron est de $-1{,}602\times10^{-19}$C .