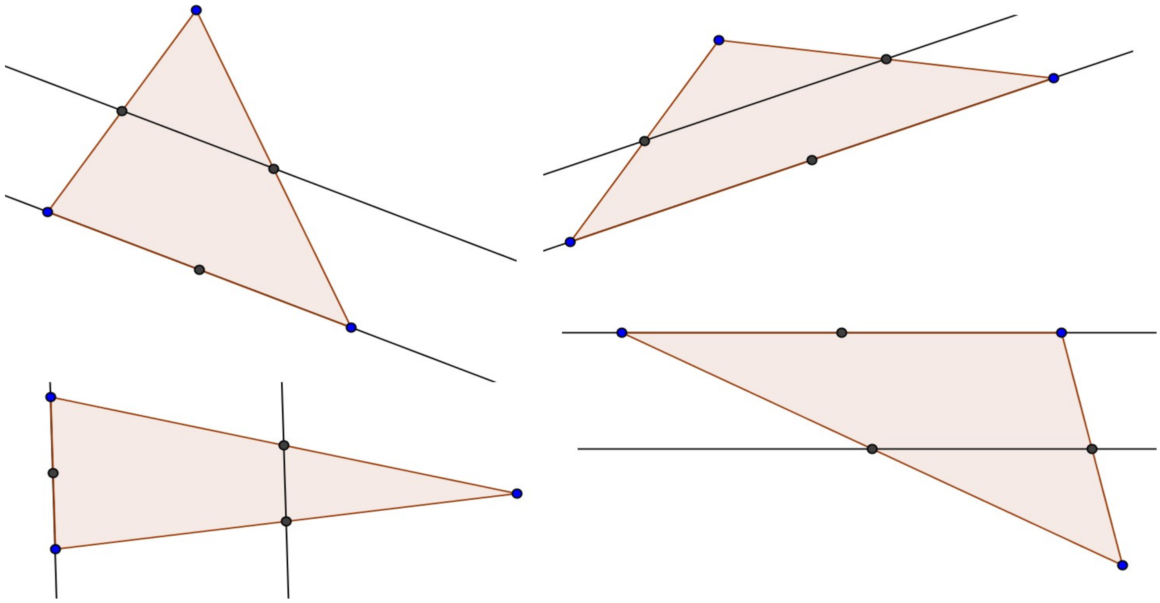
Classe de $4^{ème}$	Chapitre 2 : Triangles

Le programme tel qu'il est extrait de la page 29 du Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008
Capacités : Triangle : milieux et parallèles. * *Triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi-droites de même origine.*
Connaissances : Connaître et utiliser les théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle. **Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi-droites de même origine.*
Commentaires : Ces théorèmes sont démontrés en utilisant la symétrie centrale et les propriétés caractéristiques du parallélogramme ou les aires. Dans le cadre du socle commun, seules les propriétés directes de la droite des milieux sont exigibles. *Le théorème de Thalès dans toute sa généralité et sa réciproque seront étudiés en classe de troisième.*

1) Théorème des milieux

Expérience : Utilisons un logiciel de géométrie dynamique tel que GeoGebra pour construire un triangle et les milieux de ses côtés. Traçons la droite qui joint 2 de ces milieux. Que constatons-nous ?



La *propriété* que nous observons (la droite qui joint les milieux est parallèle au côté correspondant) est une *conjecture*, c'est-à-dire une propriété que l'on pense vraie mais qui n'a pas encore été prouvée. Nous pouvons utiliser cette propriété supposée vraie – on l'appelle alors *hypothèse* – pour déduire d'autres propriétés de la figure, comme par exemple celle qui affirme que les 3 milieux forment, avec un des sommets du triangle, un parallélogramme. Mais cette *déduction* ne sera vraie que si l'hypothèse de départ est vraie. Nous allons donc apporter la *preuve* de cette propriété, en utilisant des propriétés qui ont elles-mêmes déjà été prouvées : celles du parallélogramme étudiées en classe de $5^{ème}$.

a) Énoncés et démonstrations

Voici tout d'abord des propriétés vérifiées par tout parallélogramme (si une figure est un parallélogramme alors elle vérifie ces 6 propriétés) :

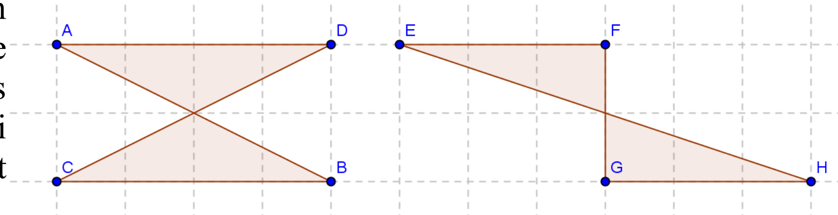
P0 : Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles, deux à deux.
P1 : Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux, deux à deux.
P2 : Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu.
P3 : Un parallélogramme a un centre de symétrie.
P4 : Les angles opposés d'un parallélogramme ont même mesure.
P5 : Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires (leur somme fait 180°).

Remarque : On peut citer d'autres propriétés dans un parallélogramme, concernant notamment les hauteurs (segments joignant un sommet à un côté opposé, perpendiculairement à ce côté) ou les médianes (segments joignant les milieux opposés), mais ces propriétés ne seront pas utiles ici.

Voici maintenant des *critères de reconnaissances* d'un parallélogramme (une de ces propriétés doit être vérifiée pour que le quadrilatère étudié soit un parallélogramme) :

P'1 : Si un quadrilatère a <u>ses côtés opposés parallèles</u> deux-à-deux alors c'est un parallélogramme.
P'2 : Si un quadrilatère a <u>ses diagonales qui ont le même milieu</u> alors c'est un parallélogramme.
P'3 : Si un quadrilatère **non croisé** a <u>ses côtés opposés de même longueur</u> alors c'est un parallélogramme.
P'4 : Si un quadrilatère **non croisé** a <u>un centre de symétrie</u> alors c'est un parallélogramme.
P'5 : Si un quadrilatère **non croisé** a <u>deux côtés opposés parallèles et de même longueur</u> alors c'est un parallélogramme.

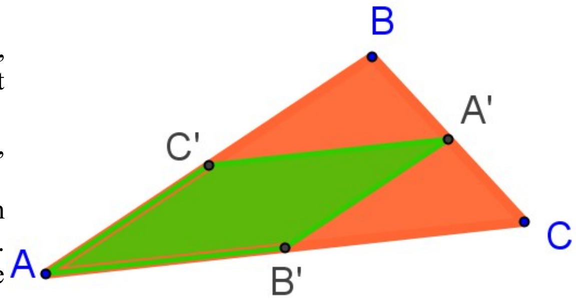
<u>Remarque</u> : La condition « le quadrilatère est non croisé » se rajoute dans certains cas, car le quadrilatère peut se trouver dans une de ces configurations illustrées ci-dessous, où ABCD et EFGH sont des quadrilatères croisés. Le quadrilatère ABCD a, en effet, ses côtés opposés de même longueur, et ce n'est pourtant pas un parallélogramme. Le quadrilatère EFGH a, quant à lui, ses angles opposés de même mesure, il a aussi un centre de symétrie, et ce n'est pourtant pas un parallélogramme.



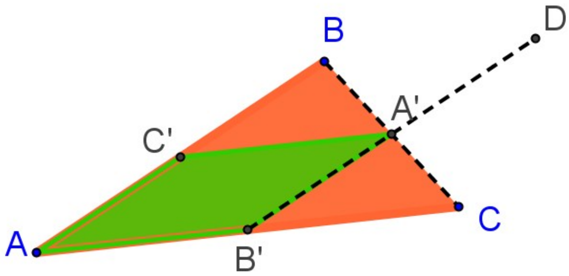
Énonçons d'abord correctement la propriété que nous voulons démontrer :

<u>Propriété des milieux (1)</u> : Si une droite passe par les milieux de 2 côtés d'un triangle, alors elle est parallèle au 3ème côté de ce triangle.

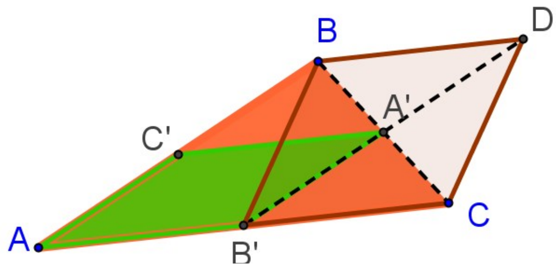
Preuve : Considérons un triangle ABC et A', B' et C' les milieux de ses côtés comme sur la figure suivante.



Prouvons que le quadrilatère AB'A'C' est un parallélogramme, car alors, d'après la propriété P0, les support des côtés opposés, les droites (AB') et (A'C') seront parallèles.
Pour cela nous allons construire le symétrique de B' par rapport à A', appelons D ce point.
D'après notre construction, BDCB' est un parallélogramme car c'est un quadrilatère qui a ses diagonales se coupant en leur milieu [propriété P'2]. En effet, A' est le milieu de [BC] par définition et de même, A' est le milieu de [B'D] (ceci en raison de la symétrie de centre A').



BDCB' étant un parallélogramme, les côtés opposés [B'C] et [BD] sont parallèles et de même longueur. Par ailleurs, B' étant le milieu de [AC], les segments [AB'] et [B'C] sont parallèles (ils sont situés sur une même droite) et de même longueur aussi. Le quadrilatère AB'DB a donc deux côtés opposés parallèles et de même longueur : les côtés [AB'] et [BD]. De plus, ce quadrilatère est non-croisé car par construction, D est situé à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAC}$, et donc le segment [B'D] aussi. Ce segment rejoint un point d'un côté avec un point intérieur, il ne peut donc pas couper l'autre côté [AB] de l'angle. Le quadrilatère AB'DB est donc un parallélogramme [propriété P'5].



AB'DB étant un parallélogramme, [B'D] et [AB], deux de ses côtés opposés, sont parallèles et de même longueur. Notre quadrilatère AB'A'C' a ses côtés [B'A'] et [AC'] construits sur ceux de AB'DB' ils sont donc parallèles. Comme AC' est la moitié de AB et que B'A' est la moitié de B'D, ces côtés ont même longueur. Le quadrilatère AB'A'C' a donc deux côtés opposés parallèles et de même longueur, et il n'est *évidemment*[1] pas croisé, c'est donc un parallélogramme [propriété P'5].

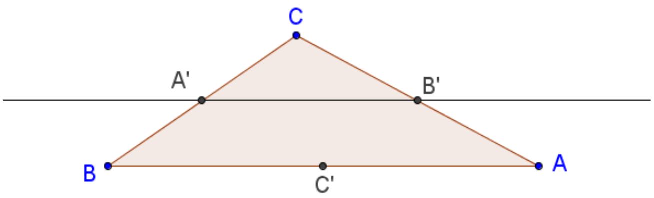
1 Le terme *évidemment* évacue le problème de la démonstration qui n'est pas toujours facile (on l'a vu plus haut pour le quadrilatère AB'DB') du non-croisement des côtés d'un quadrilatère. Mais ici il s'agit d'un argument de convexité : le triangle ABC est convexe et donc, le segment [A'B'] ne peut pas couper un des côtés du triangle, ici le côté [AB] et donc [A'B'] ne peut pas couper [AC'].

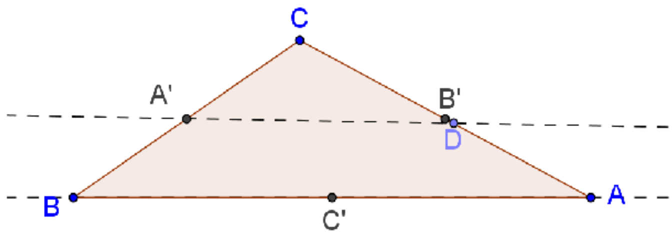
En effectuant cette démonstration, nous avons prouvé une deuxième propriété qu'il nous faut énoncer :

Propriété des milieux (2) : Si un segment joint les milieux de 2 côtés d'un triangle, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du 3ème côté de ce triangle.

Remarque : Cela vient du fait que les 3 milieux forment, avec un des sommets du triangle, un parallélogramme et dans ce cas on applique la propriété P1. Nous l'avons montré pour A'B'AC', mais cela est vrai aussi pour B'C'BA' et pour C'A'CB', les 3 sommets A, B et C pouvant être interchangés.

Examinons maintenant la situation inverse (on utilise aussi le terme de propriété *réciproque*) : un triangle et une droite parallèle à un côté qui passe par le milieu d'un autre côté. Pour fixer les idées, traçons un triangle ABC et une droite parallèle à (AB) qui passe par le milieu A' de [BC]. Cette droite *semble* passer par le milieu B' de [AC], mais cette *observation* n'est pas une *propriété* tant qu'on en a pas apporté la *preuve*. Pour ce faire, nous allons raisonner sur une figure volontairement fausse, la figure de droite, où D est le point d'intersection de la parallèle à (AB) qui passe par A' et de [AC]. B' et D sont distincts sur cette figure ; nous devons montrer que cela ne se peut pas.



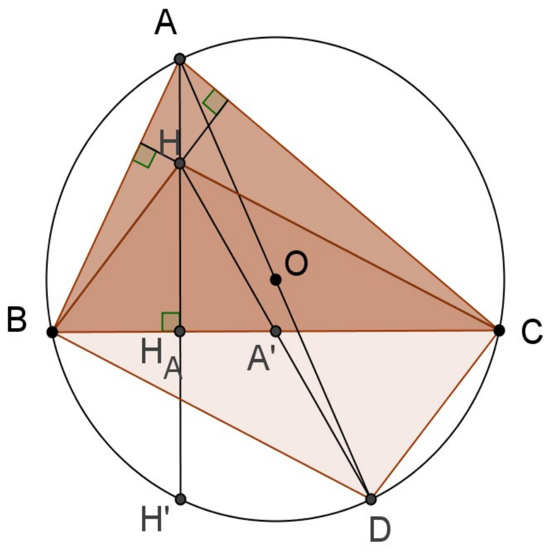


D'après notre hypothèse, la droite (A'D) est parallèle à (AB). Les points A' et B' étant les milieux de 2 côtés d'un triangle, la droite (A'B') est donc aussi parallèle à (AB) [d'après la Propriété des milieux qui vient d'être démontrée]. O, par un point ne peut passer qu'une seule droite parallèle à une droite donnée – c'est le 5ème *axiome*[2] d'Euclide – on en déduit que les droites (A'D) et (A'B') sont confondues ainsi que les points B' et D. Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

Propriété : Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un autre côté de ce triangle, alors elle coupe le 3ème côté en son milieu.

b) Exemples d'applications

Exemple 1 : Montrons que *les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés de ce triangle sont situés sur le cercle circonscrit au triangle*. Nous avons tracé un triangle ABC et son cercle circonscrit qui a pour centre O (l'intersection des médiatrices). D est le symétrique de A par rapport à O et H' est le symétrique de H par rapport à (BC). Nous devons montrer que H' est sur le cercle. En permutant les sommets, ce résultat se généralisera aux 2 autres symétriques de H.

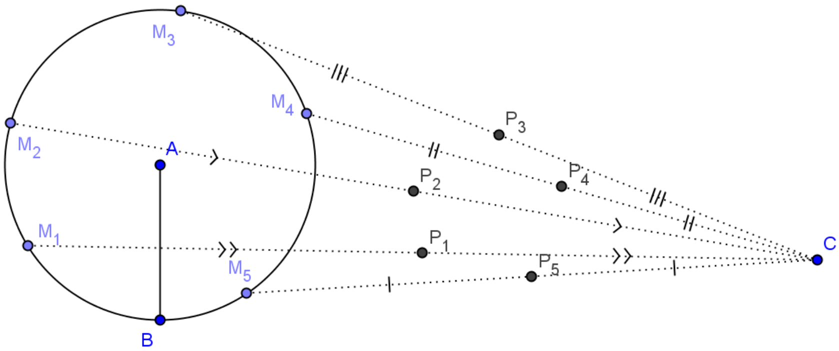


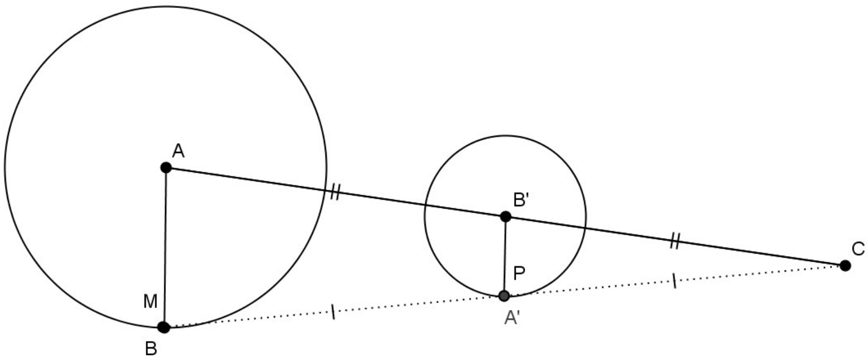
Montrons tout d'abord que BDCH est un parallélogramme : (BH) et (DC) sont 2 droites perpendiculaires à (AC). Elles sont donc parallèles. En effet, (BH) est la hauteur du triangle ABC passant par

2 En logique, un *axiome* est une propriété indémontrable qu'il faut accepter car elle est naturelle. *Euclide* (−325, −265) est le premier mathématicien de l'histoire à énoncer ainsi la géométrie : d'abord une série d'axiomes (ou postulats) et ensuite des propriétés qui se déduisent de ces axiomes ainsi que des propriétés déjà démontrées. Le 5ème axiome dont nous parlons ici a permis de développer la géométrie euclidienne qui a longtemps été la seule géométrie existante. Aujourd'hui, des géométries non-euclidiennes existent aussi (géométries sphérique et hyperbolique).

B, et C est un point du cercle de diamètre [AD]. De même, (CH) et (BD) sont parallèles, car elles sont toutes 2 perpendiculaires à (AB). Le quadrilatère BDCH, qui a ses côtés opposés parallèles, est donc un parallélogramme [Propriété P'1].
Le centre du parallélogramme BDCH est le milieu de ses diagonales [Propriété P2]. C'est donc A', le milieu de [BC]. On en déduit que A' est aussi le milieu de [HD]. Par construction, H_A est le milieu de [HH']. La droite (BC), passant par les milieux A' et H_A de 2 côtés du triangle HH'D, est donc, **d'après le théorème des milieux (1)**, parallèle au 3$^{\text{ème}}$ côté [H'D]. Finalement, comme le triangle AH'D est rectangle en H', son centre est le milieu de son hypoténuse. C'est donc O. H' est donc sur le cercle de centre O passant par A...

Exemple 2 : Lieu d'un point.
ABC est un triangle, M un point du cercle de centre A passant par B et P est le le milieu de [MC]. Où se situe le point P lorsque M décrit le cercle ? Notons que ce que l'on cherche est un ensemble de points (ce qu'on appelle *un lieu*) et faisons une figure où le point M est placé à différents endroits du cercle (d'où les noms M_1, M_2, etc. P_1, P_2, etc. qui ont été placés).



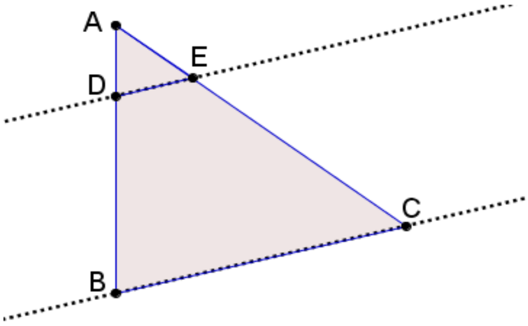


A partir de cette figure, peut-on se faire une idée du lieu cherché ? Oui, il semblerait que ce soit sur un cercle dont le rayon est la moitié de celui du premier cercle, et le centre est B' le milieu de [AC]. Traçons ce 2$^{\text{ème}}$ cercle et remarquons que M peut être confondu avec B et donc P avec A', le milieu de [BC]. Lorsque M décrit le cercle, B' et P étant les milieux de deux côtés du triangle AMC, le segment [B'P] mesure la moitié du 3$^{\text{ème}}$ côté [AM]. On a donc B'P = ½AM = ½AB. Comme B'P est constant, le point P est sur un cercle de centre B' qui a pour rayon ½AB.
Nous venons de montrer que si M est sur le grand cercle, alors P est sur le petit cercle. Mais tous les points du petit cercle correspondent-ils à un point du grand cercle ? Si P est un point quelconque du petit cercle, peut-on trouver un candidat sur le grand cercle ? Oui, il suffit de prendre le symétrique N de C par rapport à P. D'après la 1ère propriété, B' et P étant les milieux de deux côtés du triangle ANC, le segment [B'P] mesure la moitié du 3$^{\text{ème}}$ côté [AN]. Donc AN est constant et vaut AN=2B'P=2B'A'=AB, le point ainsi défini est bien un point du grand cercle (en fait, M et N sont confondus).

Remarque : Le premier exemple est une application de la première propriété des milieux (connaissant qu'une droite passe par 2 milieux, on en déduit qu'elle est parallèle au 3$^{\text{ème}}$ côté). Le deuxième exemple est une application de la deuxième propriété des milieux (connaissant qu'un segment passe par 2 milieux, on en déduit qu'il mesure la moitié du 3$^{\text{ème}}$ côté). Voyons, dans la partie suivante, des applications de l'autre sens de la propriété des milieux (connaissant qu'une droite passant par 1 milieu est parallèle à un côté, on en déduit qu'elle passe par l'autre milieu).

2) Droites sécantes recoupant 2 droites parallèles (sens direct du théorème de Thalès)

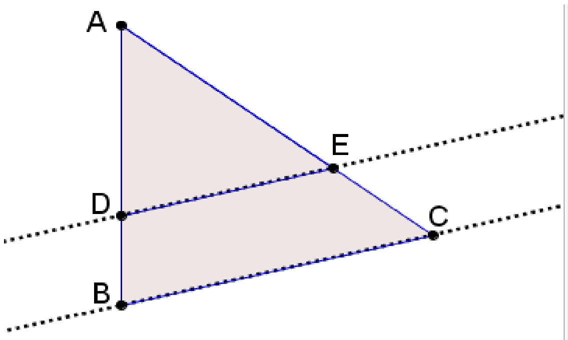
Examinons la situation suivante : ABC est un triangle, D et E sont 2 points situés respectivement sur les côtés [AB] et [AC] de ce triangle et tels que, la droite (DE) soit parallèle à la droite (BC), le support du 3ème côté [BC] du triangle.



	A	B	C
1	AB	AC	BC
2	4	5	4.12311
3	AD	AE	DE
4	1.06289	1.32861	1.0956
5	AD/AB	AE/AC	DE/BC
6	0.26572	0.26572	0.26572

En effectuant plusieurs séries de mesure, ou en utilisant un logiciel de géométrie dynamique qui permet de faire varier la position des points D et E, on s'aperçoit que les rapports de longueurs des côtés correspondants de ABC et ADE sont égaux, et par conséquent, les triangles ABC et ADE ont des côtés proportionnels. Cet unique rapport de longueur k est le coefficient multiplicateur de la situation de proportionnalité. On a donc les égalités suivantes :

$$k=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$



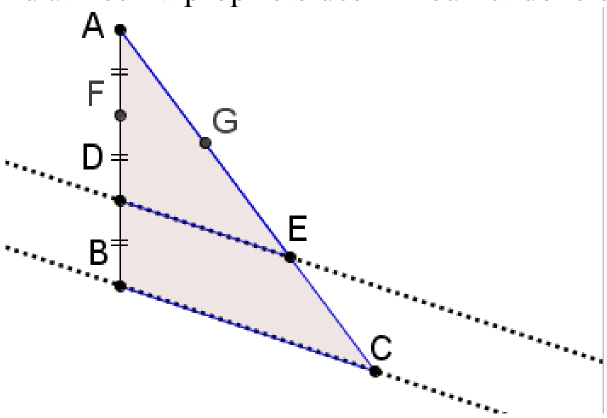
	A	B	C
1	AB	AC	BC
2	4	5	4.12311
3	AD	AE	DE
4	2.72	3.4	2.80371
5	AD/AB	AE/AC	DE/BC
6	0.68	0.68	0.68

Cette propriété que nous conjecturons ici peut être énoncée ainsi :

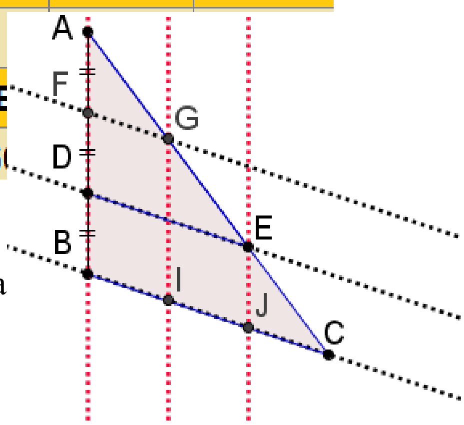
<u>Propriété des parallèles interceptant deux sécantes</u> : (AB) et (AC) étant deux droites sécantes en A, et D étant un point de [AB], la parallèle à (BC) passant par D coupe le côté [AC] en un point E tels que : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

Démonstration dans le cas général : nous ne ferons pas la démonstration de cette propriété dans le cas général qui vient d'être énoncé. Vous pouvez la trouver dans le cours de la classe de 3ème. L'idée de cette démonstration est présente dans *Les Éléments* d'Euclide et utilise des rapports d'aires de triangles.

Démonstration dans un cas particulier : nous envisageons le cas où D coupe [AB] au deux-tiers (ceci afin d'utiliser la propriété des milieux et donc de relier ces deux propriétés).



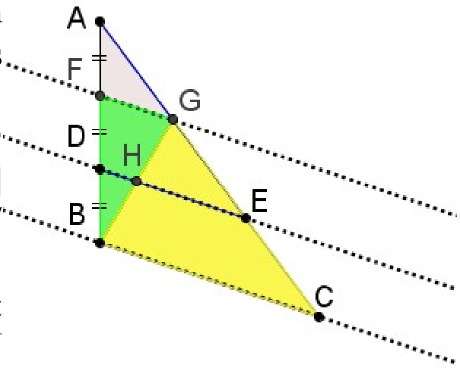
	A	B	C
1	AB	AC	BC
2	3	5	3.16228
3	AD	AE	DE
4			
5	AD/AE		
6	0.666		



Introduisons les points F, G, I et J définis par :

F est le milieu de [AD] ; G est l'intersection de [AC] et de la

parallèle à (DE) passant par F ; I et J sont les intersections de [BC] et des parallèles à (AB) passant par G et E.
Dans le triangle ADE, la parallèle au côté [DE] passant par le milieu F de [DA] coupe le 3ème côté en son milieu. G est donc le milieu de [AE].
Introduisons encore un point, le point H, intersection de [BG] et [DE]. Dans le triangle FGB, la parallèle au côté [FG] passant par le milieu D de [FB] coupe le 3ème côté [BG] en son milieu. H est donc le milieu de [BG]. Par conséquent, en utilisant encore une fois la même propriété, dans le triangle BCG, on montre que E est le milieu de [CG]. Conclusion : le segment [AC] est divisé en 3 parts égales AG=GE=EC. Finalement, si (DE)//(BC) et $\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}$ alors on a $\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$.



Il nous reste à montrer que $\frac{DE}{BC}=\frac{2}{3}$. Considérons le triangle ABC en permutant les points ainsi A→C, B→A et C→B. Ce que nous venons de montrer conduit à la conclusion suivante :
D étant un point de [AB], la parallèle à (BC) passant par D coupe le côté [AC] en un point E tels que : le segment [BC] est divisé en 3 parts égales BI=IJ=JC. Finalement, si (EJ)//(GI)//(AB) et $\frac{CE}{CA}=\frac{1}{3}$ alors on a $\frac{CJ}{CB}=\frac{1}{3}$ et $\frac{BJ}{BC}=\frac{2}{3}$.
Mais comme (DE)//(BJ) et (DB)//(EJ), le quadrilatère DEJB est un parallélogramme. Par conséquent DE=BJ. En remplaçant BJ par DE dans le dernier rapport, on obtient ce que l'on cherchait.

Application de la propriété générale : partage d'un segment en une fraction donnée.
Supposons que nous ayons un segment [AB] de 7 cm et que nous voulions partager ce segment en 3 morceaux de même longueur. Une méthode manuelle simple consiste à diviser 7 par 3 (on trouve 2,33333...) et à tracer un segment de longueur approximativement égale à 3,3 cm. On doit faire un arrondi du quotient trouvé et une erreur additionnelle de tracé (l'instrument de mesure n'est pas parfait, l'épaisseur du crayon n'est pas nulle, ni régulière, etc.) La méthode géométrique que nous allons décrire, ne demande pas la mesure du côté et ne conduit pas à un tracé ayant une mesure donnée. Par contre, elle nécessite de savoir tracer une parallèle avec précision et de savoir reporter une longueur (sans la mesurer).
Méthode pour partager un segment [AB] en *n* parts égales : Sur une demi-droite d'origine A, on reporte *n* fois une longueur donnée, on trace le segment qui joint B et le dernier point placé sur la demi-droite. On trace ensuite un réseau de droites parallèles à ce segment passant par chacun des points de la demi-droite.
L'illustration de gauche montre un partage en tiers, celle de droite montre un partage en cinq parts égales. Par exemple, le point J est tel que $\frac{AJ}{AB}=\frac{3}{5}$. En supposant que AB=7 cm, cette méthode conduit à placer le point J sur [AB] de sorte que $AJ=\frac{3}{5}AB=\frac{21}{5}=4{,}2\text{cm}$.