Classe de 4ème — Chapitre 1 : Les nombres

1) Les entiers relatifs

a) Définitions

Définition 1 : un nombre *négatif* est un nombre précédé d'un signe moins (−) qui indique une valeur inférieure à zéro.

Remarque 1 :
Il y a des entiers négatifs, des décimaux négatifs, des nombres non décimaux négatifs.
Exemples : −2 ; −3,0 ; −28/7 sont des entiers négatifs (et donc aussi des décimaux négatifs),
−2,5 ; −28/5 sont des décimaux négatifs qui ne sont pas entiers
−2/3 ; $-\pi$ sont des nombres négatifs qui ne sont pas décimaux.

Remarque 2 :
Les nombres négatifs apparaissent dans les problèmes lorsque certaines grandeurs sont inférieures à zéro.
Exemples : Une date peut être négative (ex : Pythagore est né en −580 à Samos signifie qu'il est naît 580 ans avant la date 0 qui est l'année supposée de la naissance de Jésus-Christ dans l'ère chrétienne), un compte en banque ou un bilan de trésorerie aussi (en 2011, la sécurité sociale a des dépenses évaluées à 450 milliards d'euros et des recettes évaluées à 430 milliards, d'où un solde négatif de −20 milliards d'euros), on parle alors de *déficit*.

Remarque 3 :
Les nombres négatifs apparaissent notamment dans les calculs où on enlève à un nombre positif donné un nombre supérieur à ce nombre.
Exemple : $5 - 7 = -2$ (on enlève 7 à 5, et comme $7 > 5$ le résultat est négatif).

Définition 2 : un nombre *relatif* est un nombre qui peut être positif ou négatif.

Remarque1 :
Les entiers positifs sont aussi appelés les entiers *naturels*, ou simplement les *naturels*.

Remarque2 :
Les nombres positifs peuvent être précédés ou non d'un signe + pour les distinguer des négatifs.

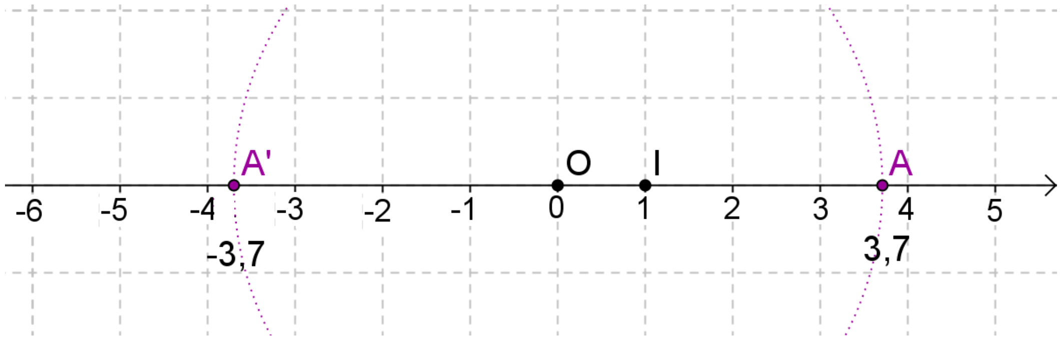
Remarque3 :
Les nombres relatifs sont parfois écrits entre parenthèses pour distinguer les symboles utilisés pour les opérations des symboles utilisés pour les signes.
Exemple : dans l'expression $(-2)+(+3)-(-1)$, on effectue d'abord une somme entre les relatifs −2 et 3 et ensuite une différence entre le résultat (+1) et le négatif −1. Le résultat final est 2 (voir plus loin).

Définition 3 : Deux nombres ne différant que par leur signe sont dits *opposés*.

Exemple :
L'opposé de 3 est −3 et réciproquement, l'opposé de −3 est 3.

Propriétés :

- Tous les nombres positifs ont un opposé négatif, et réciproquement.
- Seul zéro est son propre opposé ($-0 = +0 = 0$).
- L'opposé de l'opposé d'un nombre est le nombre lui même (par exemple $-(-3) = 3$).
- La somme de deux nombres opposés est nulle (par exemple $-3+3 = 0$).
- Si la somme de 2 nombres est nulle alors ces nombres sont opposés.
  Autrement dit : si $a+b = 0$ alors $a = -b$ et $b = -a$.
- Sur un axe gradué, les nombres négatifs sont les *abscisses* de points symétriques par rapport à l'origine (le point qui a pour abscisse 0) : ci-dessous, les points A et A' sont symétriques par rapport à l'origine O (ou diamétralement opposés sur un même cercle de centre O), leurs abscisses (environ 3,7 et −3,7) sont opposées.



Définition 4 : Un nombre relatif est composé d'un signe suivi d'une valeur numérique positive appelée la *distance à zéro* de ce nombre.

Exemple :
Le nombre −3,7 est composé du signe − suivi de la valeur numérique 3,7 qui est la distance (OA' sur notre graphique) entre le point d'abscisse −3,7 (A' sur notre graphique) et l'origine (O sur notre graphique).

Remarque :
Á la place de « distance à zéro », on dit aussi parfois *valeur absolue*, et on emploie parfois la notation suivante $|-3{,}7| = 3{,}7$ pour dire que la valeur absolue de −3,7 est 3,7. Une autre notation employée sur les tableurs ou en programmation est la suivante ABS(−3,7) = 3,7 où ABS signifie « valeur ABSolue ».

Propriétés :

- Deux nombres opposés sont deux nombres qui ont la même distance à zéro (même valeur absolue). Avec la notation indiquée plus haut, cela s'écrit : a et b étant 2 nombres, si $b = -a$ alors $|b| = |a|$.
- Si deux nombres ont la même distance à zéro, alors ces deux nombres sont, soit égaux, soit opposés. Avec la notation indiquée : a et b étant 2 nombres, si $|b| = |a|$ alors $b = a$ ou $b = -a$.

b) Ordre des relatifs
Tous les nombres négatifs sont inférieurs à zéro et à tous les nombres positifs.
D'une façon générale, si a est un nombre positif ($a>0$) et b un nombre négatif ($b<0$), alors on a $a>b$.

L'ordre des nombres négatifs est l'ordre « inverse » des nombres positifs, dans le sens où les nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leur distance à zéro.

Les entiers naturels (positifs) dans l'ordre croissant sont 0, 1, 2, etc.
Les entiers négatifs dans l'ordre décroissant : 0, −1, −2, etc. ; dans l'ordre croissant …, −2, −1, 0.

D'une façon générale, si a est un nombre positif ($a>0$) et b tel que $a<b$, alors $-a$ et $-b$ sont deux nombres négatifs et on a $-a>-b$ (exemples : on a 2 < 3 mais −2 > −3 ; de même −1,99 > −2 car 1,99 < 2.

2) Additions et soustractions de nombres relatifs

Règles d'addition

Addition de deux nombres de même signe : pour additionner deux nombres de même signe, on doit additionner leur distance à zéro et conserver le signe.
Addition de deux nombres de signes différents : pour additionner deux nombres de signes contraires, on doit soustraire la plus petite distance à zéro de la plus grande, et conserver le signe du nombre ayant la plus grande distance à zéro.

Exemples1 :
(+5)+(+3) = +(5+3) = +8 ; (−30)+(−3) = −(30+3) = −33 ; (−5,2)+(−1,7) = −(5,2+1,7) = −6,9.
Ici, on effectue des additions car les nombres ont le même signe.

Exemples2 :
(+5)+(−3) = +(5−3) = +2 ; (−30)+(+3) = −(30−3) = −27 ; (−0,2)+(+1,7) = +(1,7−0,2) = +1,5.
Ici, on effectue des soustractions car les nombres ont des signes contraires.

Règle pour la soustraction : Pour **soustraire** un nombre relatif, on doit **ajouter** l'opposé de ce nombre

Exemples :
$(+5)-(+3) = (+5)+(-3) = +(5-3) = +2$; $(-30)-(-3) = (-30)+(+3) = -(30-3) = -27$.
$(+5)-(-13) = (+5)+(+13) = +(5+13) = +18$; $(-20{,}5)-(+3{,}5) = (-20{,}5)+(-3{,}5) = -(20{,}5+3{,}5) = -24$.
On peut donc, ici aussi, être amené à effectuer des additions ou des soustractions selon les cas.

Application de la soustraction : calculs de *distances* sur un axe gradué.
La distance entre deux points d'un axe gradué est égale à la différence entre les abscisses de ces points : on doit enlever l'abscisse la plus petite à l'abscisse la plus grande. De cette façon la distance sera toujours positive (supérieure à zéro) comme il se doit.

Exemple :
Soient A, B, C, D et E, les points d'abscisses respectives 0, 3, -1, -4 et $-2{,}5$.
Calculons les distances AB, BC, BD et DE.
$AB = 3-0 = 3$; $BC = CB = 3-(-1) = 3+(+1) = 4$
$BD = DB = 3-(-4) = 3+4 = 7$; $DE = (-2{,}5)-(-4) = -2{,}5+(+4) = 4-2{,}5 = 1{,}5$.

Simplifications d'écriture :
Les parenthèses entourant les nombres relatifs sont lourdes à manipuler, longues à écrire et, en définitive, inutiles. On peut s'en passer en appliquant successivement ces 3 règles :

Règle I : On remplace toutes les soustractions par des additions (en ajoutant l'opposé du nombre qu'on devait soustraire). Il ne reste plus qu'une somme de nombres relatifs qu'on appelle *somme algébrique*. Règle II : On enlève les symboles d'additions et les parenthèses. Il ne reste plus alors que les signes des nombres qui feront office de symboles opératoires. Règle III : Si une écriture commence par un nombre positif, on enlève le symbole +.

Exemples :
$(+3)-(-1) = (+3)+(+1) = +3+1 = 3+1 = 4$.
$(-3)-(+2) = -3+(-2) = -3-2 = -(3+2) = -5$.

Ordre des opérations :
Dans une somme algébrique, les différents termes de la somme peuvent être interchangés et groupés comme on veut. En effet, la somme est *commutative* (2+3=3+2 ou, de façon générale, $a+b = b+a$), on peut donc échanger 2 termes quelconques d'une somme. Elle est aussi *associative* c'est-à-dire que (2+3)+4=2+(3+4) ou, de façon générale, $(a+b)+c = a+(b+c)$, on peut donc commencer par la droite ou par la gauche. Par conséquent, on peut regrouper tous les nombres positifs d'une part et tous les nombres négatifs d'autre part et soustraire le total des négatifs au total des positifs.

Exemple :
$(+3)+(+5)+(-2)+(-40)+(+11) = 3+5-2-40+11 = 3+5+11-(2+40) = 19-42 = -(42-19) = -23$.
Si on ne doit pas effectuer le calcul manuellement (calcul mental ou calcul posé), on applique la règle ordinaire de priorité suivante : Lorsqu'on a une suite d'additions et de soustractions mélangées, on effectue les opérations de gauche à droite (c'est ce que fait la calculatrice).

Exemple :
$(+3)+(+5)+(-2)+(-40)+(+11) = \underline{3+5}-2-40+11 = \underline{\mathbf{8}-2}-40+11 = \underline{\mathbf{6}-40}+11 = \mathbf{-34}+11 = \mathbf{-23}$.

Remarque :
Cette règle sert à éviter l'erreur suivante $5-\underline{4-1} = 5-3 = 2$.
En réalité, en commençant par la gauche, $\underline{5-4}-1 = 1-1 = 0$.
Avec l'astuce du regroupement, on ferait plutôt $5-(4+1) = 5-5 = 0$.

3) Multiplications de nombres relatifs

Effectuer une multiplication comme $(-3)\times 2$ c'est additionner (-3) et (-3). Le résultat sera donc (-6).
Ainsi $(-3)\times(+2) = (-6)$. De même, $(-3)\times(+3) = (-3)+(-3)+(-3) = (-9)$.

Complétons la table de multiplication par −3 (on enlève les parenthèses inutiles) :
$-3\times1 = -3$; $-3\times2 = -6$; $-3\times3 = -9$; $-3\times4 = -12$; $-3\times5 = -15$; $-3\times6 = -18$; etc.
À chaque étape, on ajoute −3, donc on enlève 3.
Dans l'autre sens, la table peut « logiquement[1] » être complétée en multipliant −3 par des nombres négatifs.
Voyons ce que cela donne :
$-3\times\mathbf{2} = -6$; $-3\times\mathbf{1} = -3$; $-3\times\mathbf{0} = -0$; $-3\times(\mathbf{-1}) = 0+3 = 3$; $-3\times(\mathbf{-2}) = 3+3 = 6$; $-3\times(\mathbf{-3}) = 6+3 = 9$; etc.

Observations :
Pour multiplier −3 par un nombre positif, il suffit de mettre un signe − devant le produit de 3 (la distance à zéro de −3) par ce nombre. Pour multiplier −3 par un nombre négatif, il suffit de mettre un signe + devant le produit de 3 (la distance à zéro de −3) par la distance à zéro de ce nombre.

Ce que nous venons d'observer pour la table de 3 peut être généralisé pour toutes les tables, et finalement, pour tous les nombres relatifs. C'est pourquoi nous ne retenons que les règles ci-dessous qui résument cela.

Règles de la multiplication

Multiplication de 2 nombres de même signe :
Le produit de deux nombres de **même signe** est **positif**, égal au produit de leur distance à zéro.
Multiplication de 2 nombres de signes différents :
Le produit de deux nombres de **signes contraires** est **négatif**, sa distance à zéro est égale au produit de la distance à zéro des deux facteurs.

Exemples :
$-3\times100 = -300$; $50\times(-20) = -1\,000$; $-3\times(-12) = 36$; $-10\times50\times(-2) = 1\,000$.

Remarque :
Les parenthèses inutiles sont celles qui entourent les nombres positifs (le signe + aussi est alors inutile) et celles qui entourent un nombre négatif placé devant un produit. Bien sûr, cela n'est pas valable si il y a un mélange d'opérations (voir plus loin).

Cas particuliers :
La multiplication par −1 ne fait que changer le signe de ce nombre. Elle transforme donc un nombre en son opposé. Par exemple, $50\times(-1) = -50$ qui est l'opposé de 50. D'une façon générale, si a est un nombre, alors $a\times(-1) = (-1)\times a = -a$. Cette égalité permet de comprendre pourquoi un signe − placé devant une somme algébrique, change tous les signes de cette somme. Par exemple $-(5-2+3)=-5+2-3$. Il s'agit juste d'une application de la distributivité :

$$-(5-2+3) = (-1)\times(5-2+3) = (-1)\times(5)+(-1)\times(-2)+(-1)\times(+3) = -5+2-3.$$

Il peut être utile de se souvenir aussi que $a\times1 = 1\times a = a$ (la multiplication par 1 ne change pas un nombre) et que $a\times0 = 0\times a = 0$ (la multiplication par 0 donne toujours le même résultat, si je donne 0€ à chacun des habitants de la planète, je n'ai rien donné, en tout cas aucun euro).

Règle des signes : Les deux règles que nous venons d'énoncer sont condensées en une règle qui peut s'énoncer ainsi « plus par plus ou moins par moins donnent plus et plus par moins ou moins par plus donnent moins » ou encore, de façon imagée mais réaliste « les amis de mes amis sont mes amis, les ennemis de mes ennemis sont mes amis, les amis de mes ennemis sont mes ennemis et les ennemis de mes amis sont mes ennemis ». Cette règle des signes peut aussi se dessiner :

×	+	−
+	+	−
−	−	+

Finalement, pour déterminer le signe d'un produit de nombres relatifs, il suffit de compter les facteurs négatifs, car les signes − se neutralisent deux par deux (donnent un signe +).

Propriété : Le produit d'un nombre **pair** de facteurs négatifs est **positif**, tandis que le produit d'un nombre **impair** de facteurs négatifs est **négatif**.

1 Pour respecter la logique des opérations, il faut en particulier respecter la distributivité qui veut que $0 = -3\times0 = -3\times[3+(-3)]$ soit égal à $-3\times3+(-3)\times(-3)$, soit à $-9+(-3)\times(-3)$, et donc $-3\times(-3)$ doit être égal à 9 comme nous l'avons écrit.

Exemples :
$2\times(-2)\times(-2)\times(-2) = -16$.
Le résultat est négatif car il y a un nombre impair (3) de facteurs négatifs.
$(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = 256$.
Le résultat est positif car il y a un nombre pair (8) de facteurs négatifs.
Pour effectuer le calcul $(-2)\times5\times(-1)\times(-10)\times15$, nous pouvons commencer par régler la question du signe : Il est négatif car il y a un nombre impair (3) de facteurs négatifs.
Ce produit vaut donc : $-(2\times5\times1\times10\times15) = -(10\times10\times15) = -(100\times15) = -1500$.

Expressions mixtes :
Pour effectuer un calcul comportant des additions, des soustractions et des multiplications, il faut respecter la règle de priorité qui commande d'effectuer les multiplications en premier (sauf si il y a des parenthèses qui viendraient modifier cet ordre).

Exemples :
$(-2)\times5+(-1)\times(-10)-15 = -10+10-15 = -15$.
Ici, aucune parenthèses ne vient modifier l'ordre naturel des calculs.
Dans cette expression $\mathbf{(}-2\times5+(-1)\mathbf{)}\times\mathbf{(}-10-15\mathbf{)} = -11\times(-25) = 275$, j'ai mis en gras les parenthèses qui modifient l'ordre des priorités.

4) Divisions de nombres relatifs

Effectuer la division d'un nombre a par un nombre b (calculer le quotient de a par b) intervient dans une « multiplication à trou », lorsqu'on cherche par quel nombre il faut multiplier b pour trouver a. Par exemple, si on a 6 paquets pesant en tout 5 kg, chaque paquet pèse $5\div6$ kg, nombre que l'on note aussi $\frac{5}{6}$. En effet, le poids x d'un paquet doit vérifier l'égalité $6\times x = 5$. Cette équation a une unique solution $x = \frac{5}{6}$. Cette relation entre la multiplication et la division (si $b\times x = a$ alors $x = \frac{a}{b}$, et réciproquement) explique que l'on ait une règle des signes identique pour ces deux opérations.

Signe de $x=a\times b$ ou de $x=a\div b$	+	+	−	−
Signe de a	−	+	−	+
Signe de b	−	+	+	−

Règles de la division

Division de deux nombres de même signe :
Le quotient de deux nombres de **même signe** est **positif**, égal au quotient de leur distance à zéro.
Division de deux nombres de signes différents : Le quotient de deux nombres de **signes contraires** est **négatif**, sa distance à zéro est égale au quotient de la distance à zéro des deux nombres.

Exemples :
$-3\div100 = -0{,}03$; $50\div(-20) = -(50\div20) = -5\div2 = -2{,}5$; $-3\div(-12) = 3\div12 = 1\div4 = 0{,}25$;
$10\div(-7) = -10\div7 = -1{,}428\,571\,428\,571\,\ldots$ ce nombre n'étant pas décimal possède une suite infinie de décimales où se répète la séquence de chiffres 142857. Généralement, on donne une valeur arrondie d'un quotient qui « ne tombe pas juste ». Par exemple, on écrira que $10\div(-7) \approx -1{,}429$ en faisant ce qu'on nomme un *arrondi au millième le plus proche* (on a mis un 9 à la place du 8 car le quotient est plus proche de 1429 millièmes que de 1428 millièmes). La valeur exacte d'un quotient qui n'a pas de valeur décimale est, quant à elle, notée sous la forme fractionnaire. Dans notre exemple, si on souhaite s'arrêter à la valeur exacte, on écrira $10\div(-7) = \frac{-10}{7}$.

Remarque :
Dans certains pays, aux États-Unis par exemple, et sur certaines calculatrices, on utilise parfois les nombres fractionnaires (*mixed numbers*) qui séparent la partie entière de la partie décimale d'un quotient, et seule cette dernière partie est exprimée sous la forme d'une fraction, dite *propre* (une fraction dont le dénominateur est plus petit que le numérateur est dite *impropre*). Sur la calculatrice, le symbole ⌋ permet d'indiquer qu'on souhaite effectuer un quotient « proprement ». Ainsi $\frac{-10}{7}=-\left(1+\frac{3}{7}\right)$ et si je tape sur ma calculatrice −10⌋7 celle-ci me répond −1⌋3⌋7. Cette notation rappelle que le système décimal n'a pas

toujours existé et si les anglo-saxons disent d'une personne qu'elle mesure 5 pieds ⅔ et non pas 5,67 pieds, nous disons aussi d'un film qu'il dure 1 heure et demi (ce qui se noterai 1⅃1⅃2 h) et non pas 1,5 heures, n'est-il pas ?

<u>Cas particuliers</u> :
La division par 1 ou par −1 ne fait que changer le signe de ce nombre. Elle transforme donc un nombre en son opposé. Par exemple, 12,5÷(−1) = −12,5 qui est l'opposé de 12,5. D'une façon générale, si a est un nombre, alors $a\div(-1) = a\div 1 = -a$.
La division par zéro n'a pas de sens (la calculatrice affiche ERROR dans ce cas). Essayez de diviser un nombre, disons 10, par 0,1 puis par 0,01 ainsi de suite jusqu'à diviser par un nombre très proche de 0 comme 0,000 000 1. Le résultat sera de plus en plus grand si vous divisez par un nombre positif (comme 0,000 000 1) et de plus en plus petit si vous divisez par un nombre négatif (comme −0,000 000 1). Pour zéro, le résultat serait donc tiraillé entre ces deux extrémités infinies...
Diviser 0 par n'importe quel nombre (sauf 0) donne toujours 0, que l'on divise par un nombre positif ou négatif. Diviser un nombre par lui-même (sauf 0) donne toujours 1, diviser un nombre par son opposé (sauf 0) donne toujours −1.

Exemples :
$\frac{-10}{-1}=\frac{10}{1}=10$; $\frac{-10}{1}=\frac{10}{-1}=-10$; $\frac{0}{-1}=\frac{0}{1}=0$; $\frac{-10}{-10}=\frac{10}{10}=1$; $\frac{-10}{10}=\frac{10}{-10}=-1$

<u>Priorité des opérations</u> :
Pour effectuer un calcul comportant des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions, il faut respecter la règle de priorité qui commande d'effectuer les multiplications et les divisions en premier (sauf si il y a des parenthèses qui viendraient modifier cet ordre).
Attention ! Lorsqu'on a une suite de multiplications et de divisions (opérations de même priorité) on doit effectuer les opérations de gauche à droite. S'il n'y a que des multiplications, l'ordre des opérations n'a pas d'importance. Si les divisions sont écrites à l'aide du trait de fraction (voir chapitre 3), celui-ci considère que tout le numérateur (même si c'est le résultat d'un calcul) est divisé par tout le dénominateur (idem).

Exemples :
(−20)×6÷(−2)+(−45)÷15 = −120÷(−2)+(−3) = 60−3 = 57.
On aurait pu noter cette suite d'opérations $\frac{-20\times 6}{-2}+\frac{-45}{15}=\frac{120}{2}+(-3)=60-3=57$.
Le trait de fraction simplifie certaines écritures comportant des divisions et des parenthèses comme celle-ci (−20)+15÷((−2)+(−45)÷15) qui s'écrit simplement $-20+\frac{15}{-2+\frac{-45}{15}}$.
Dans ce cas, il faut toujours effectuer les calculs en-dessus ou en-dessous du trait de fraction, avant d'effectuer la division :

$$-20+\frac{15}{-2+\frac{-45}{15}}=-20+\frac{15}{-2+(-3)}=-20+\frac{15}{-5}=-20+(-3)=-23$$

5) <u>Les nombres rationnels</u>

Dans la division de a par b, a est appelé le *dividende*, b étant le *diviseur*. Lorsqu'on effectue une division où le dividende, le diviseur et le quotient sont entiers, on dit qu'on fait une *division euclidienne*. Dans une division euclidienne, il y a un *reste*, entier aussi, qui peut être nul (la division "tombe" juste) ou non.

La division de 50 par 12 donne 4 et un reste 2, on peut noter cela : 50 ÷ 12 = 4, reste 2.

Mais on préférera souvent la notation avec un produit suivante : 50 = 12 × 4 + 2.

Le résultat d'une division n'étant pas toujours un nombre décimal (parfois la division « ne s'arrête pas »), le quotient de a par b ne peut parfois pas être écrit autrement qu'en donnant l'opération qui le définit c'est-à-dire $a \div b$.

2÷3 = 0,66666666666…(une infinité de 6).

Ce quotient n'a pas d'écriture décimale exacte (on note pourtant parfois ce nombre 0,<u>6</u> en soulignant le chiffre qui se répète), on va donc l'écrire 2÷3, ou mieux, on va utiliser la notation fractionnaire : $\frac{2}{3}$.

a) <u>Définition</u> :

Une *fraction* est un quotient de deux entiers, noté avec la *notation fractionnaire* qui utilise un trait pour séparer le dividende du diviseur. La *fraction* $\frac{a}{b}$ est donc le nombre qui, multiplié par b donne a.

Dans la *fraction* $\frac{a}{b}$ le nombre a, le dividende du quotient, est appelé *numérateur* de la fraction, tandis que le nombre b, le diviseur du quotient, est appelé *dénominateur* de la fraction.

Une fraction est donc un nombre (un quotient) résultat d'une opération (une division), mais c'est aussi une façon d'écrire ce nombre. On peut noter cette fraction avec un trait oblique / (un *slash*) ou deux points : ou encore le symbole ⌐ (notation rencontrée sur certaines calculatrices).

L'écriture fractionnaire n'est pas réservée aux fractions. On peut noter n'importe quel quotient sous forme fractionnaire. Le trait de fraction remplace dans ce cas, tout simplement, le symbole de division. Mais attention aux priorités opératoires qui nécessite parfois qu'on ajoute des parenthèses autour du numérateur et du dénominateur d'une fraction lorsqu'on utilise une calculatrice.

Exemple :

La fraction $\frac{2+6}{3-1}$ vaut $\frac{8}{2}$, donc 2.

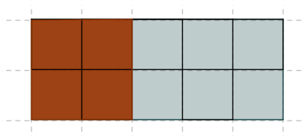
Mais avec une calculatrice, il faudrait taper (2+6)/(3−1) sinon, la séquence 2+6/3−1 donnera 3 (car la calculatrice effectuera d'abord 6/3 et ensuite 2+2−1).

<u>Remarque</u> :

La notation égyptienne n'utilise que des fractions *unitaires* (dont le numérateur est 1) de dénominateur différents. Ainsi 2/5 peut être noté 1/5 + 1/6 + 1/30.

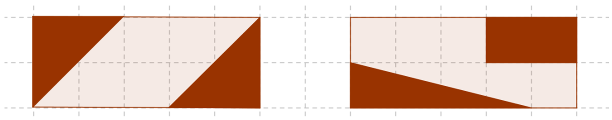
<u>Fractions et proportions</u>

L'idée de proportion est étudiée généralement avant celle de fraction. On demande par exemple à un élève de colorier les 2/5 d'une grille contenant 10 cases.



Cette activité permet de comprendre que 2/5 et 4/10 sont des fractions égales.

On dira qu'on a colorié une même proportion de la figure si on a colorié n'importe quelle surface ayant une aire égale à 2/5 de celle de la figure entière, comme celles-ci.



Deux partages correspondent à une même proportion si les fractions calculées sont égales.

b) <u>Propriété</u>

un quotient ne change pas lorsqu'on multiplie son dividende et son diviseur par un même nombre.

Avec la notation fractionnaire, si a, b et c sont des nombres quelconques (c doit être différent de 0 pour que les quotients existent) alors on a l'égalité suivante : $\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}$

Exemples :

0,2÷12,5 = 2÷125 = 4÷250 = 16÷1000.

Avec des fractions : $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{80}{120}=\frac{2\times c}{3\times c}$.

Cette propriété a de nombreuses applications, que nous allons passer en revue.

<u>Simplifications de fractions</u>

Simplifier une fraction, c'est transformer la fraction pour qu'elle s'écrive avec un numérateur et un dénominateur plus proches de zéro.

Exemples : Simplifions les fractions $\frac{128}{450}$ et $\frac{129}{450}$:

Pour la première remarquons que 128 et 450 sont *pairs* (multiples de 2) et donc $\frac{128}{450}=\frac{2\times 56}{2\times 225}=\frac{56}{225}$.

Pour la seconde remarquons que 126 et 450 sont des multiples de 3 (la somme de leurs chiffres est à chaque fois un multiple de 3 : 1+2+9 = 12 = 3×4, 4+5+0 = 9 = 3×3) et donc $\frac{129}{450}=\frac{129\div 3}{450\div 3}=\frac{43}{150}$.

Remarque :
On peut continuer à simplifier une fraction pour réduire au maximum son numérateur et son dénominateur. Dans notre exemple on ne peut pas simplifier davantage la première fraction car 56 ne se divise que par des nombres pairs et par 7 alors que 225 n'est ni pair ni divisible par 7. Pour la deuxième fraction on ne peut pas continuer la simplification car 43 est un nombre *premier* (qui n'est divisible par aucun nombre plus petit que lui, à part 1) et que 150 n'est pas divisible par 43.

Comparaisons
Pour comparer deux fractions, on va généralement les "mettre" au même dénominateur (car si des fractions ont le même dénominateur, il suffit de comparer les numérateurs pour comparer les fractions).

Exemple :
Si on doit comparer 4/5 et 7/12, on peut transformer ces fractions pour qu'elles aient même dénominateur.

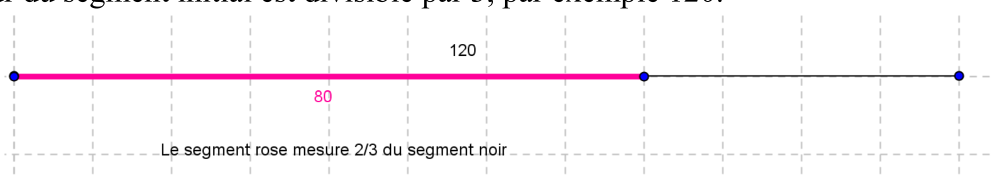
Comme $\frac{4}{5}=\frac{4\times 12}{5\times 12}=\frac{48}{60}$ et $\frac{7}{12}=\frac{7\times 5}{12\times 5}=\frac{35}{60}$ et 48>35, on en déduit que $\frac{48}{60}>\frac{35}{60}$ d'où $\frac{4}{5}>\frac{7}{12}$.

Remarque :
bien sûr on peut faire autrement.
On peut diviser à la calculatrice 4 par 5 et 7 par 12 et comparer les quotients écrits sous forme décimale.
4÷5 = 0,8 tandis que 7÷12 ≈ 0,58333... donc 4/5 > 7/12.

Pourcentages
Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100 et notée avec le symbole %.
Le pourcentage est une des façons d'écrire un rapport sans dimension entre deux nombres.
Cette notion est souvent utilisée car le fait d'utiliser toujours le même dénominateur permet de comparer immédiatement deux pourcentages (comparer deux fractions est moins intuitif)
Exemple : 25% = $\frac{25}{100}$ = 0,25. Pour comparer $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{7}$, ce n'est pas évident.
Mais sachant que la 1$^{\text{ère}}$ fraction correspond à 25% et la seconde à 28,6% environ, on voit immédiatement que c'est la seconde qui est plus grande.

Additions ou soustractions
Pour additionner deux fractions, on doit également les mettre au même dénominateur. Car alors, il suffit d'additionner les numérateurs.
Par exemple 1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4 = (2+1)/4 = 3/4
Un autre exemple : $\frac{4}{5}+\frac{7}{12}=\frac{48}{60}+\frac{35}{60}=\frac{48+35}{60}=\frac{83}{60}$
Pour la soustraction, c'est exactement pareil : $\frac{4}{5}-\frac{7}{12}=\frac{48}{60}-\frac{35}{60}=\frac{48-35}{60}=\frac{13}{60}$

c) Multiplication d'un quotient par un nombre
Si on fait des coloriages pour avoir la bonne proportion, cela ne demandent pas de connaissances particulières tant que le partage peut se faire aisément. Mais rapidement on va devoir faire des calculs : on devra calculer une quantité pour avoir une certaine proportion dans l'ensemble.
Si on demande de tracer un segment ayant une longueur égale à 2/3 d'un segment donné, c'est facile si la longueur du segment initial est divisible par 3, par exemple 120.



Cette opération est moins évidente si le nombre n'est pas divisible par le dénominateur de la fraction. Prendre les 2/3 d'une longueur de 100 demande d'effectuer un calcul ($100\times\frac{2}{3}=\frac{100\times2}{3}=\frac{200}{3}\approx67$, voir plus loin) ou bien d'exploiter une propriété géométrique étudiée plus loin (le théorème de Thalès).

D'une manière générale, les $\frac{2}{3}$ d'une quantité q correspondent à un quantité égale à $\frac{2}{3}\times q$ qui se calcule aussi bien par le produit $2\times\frac{q}{3}$ que par le quotient $\frac{2\times q}{3}$.

Dans tous les cas, prendre la fraction $\frac{a}{b}$ d'une quantité q, c'est calculer une quantité q' égale à
$$\frac{a}{b}\times q=\frac{a\times q}{b}=a\times\frac{q}{b}$$ (il y a trois façons distinctes d'effectuer ce calcul).

Idées pour la démonstration :
Montrons sur un exemple pourquoi $\frac{3}{2}\times10=15$. Comme on l'a rappelé au début du chapitre, la fraction $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b donne a. Ainsi, $\frac{3}{2}$ est le nombre qui, multiplié par 2 donne 3.
On peut donc écrire notre calcul : $\frac{3}{2}\times10=\frac{3}{2}\times(2\times5)=(\frac{3}{2}\times2)\times5=3\times5=15$.
Pour tenter de généraliser cet exemple, on vient de montrer que $\frac{3}{2}\times q=\frac{3}{2}\times(2\times\frac{q}{2})=(\frac{3}{2}\times2)\times\frac{q}{2}=3\times\frac{q}{2}$ ce qui, on le comprend bien, peut aisément se généraliser en l'égalité $\frac{a}{b}\times q=a\times\frac{q}{b}$.
Pourquoi la fraction $\frac{a\times q}{b}$ est-elle égale aux deux précédentes ?
Toujours d'après la définition, $\frac{a\times q}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b donne $a\times q$.
Cela s'écrit $\frac{a\times q}{b}\times b=a\times q$; or $(a\times\frac{q}{b})\times b=a\times(\frac{q}{b}\times b)=a\times q$, les nombres $\frac{a\times q}{b}$ et $a\times\frac{q}{b}$ sont donc égaux puisque, multipliés par le même nombre b, ils donnent le même nombre $a\times q$.
Pour admettre cette démonstration, on doit seulement savoir que les propriétés de la multiplication (associativité et commutativité) et aussi l'unicité du quotient : si $a\times q=b$ et $a\times q'=b$ alors $q=q'$.

Exemple 1
$\frac{4}{5}$ des élèves d'une classe contenant 25 élèves sont des filles.
Le nombre de filles est $\frac{4}{5}\times25$ qu'on peut calculer de trois façons distinctes :
$\frac{4}{5}\times25=0,8\times25=20\,;\frac{4\times25}{5}=\frac{100}{5}=20\,;4\times\frac{25}{5}=4\times5=20$. Il y a donc 20 filles dans cette classe.

Exemple 2
Une entreprise a utilisé 45% de sa réserve de fuel qui fait 6000L. Combien lui en reste t-il ?
Elle a utilisé $\frac{45}{100}\times6000=45\times\frac{6000}{100}=45\times60=2700$ L, il lui en reste donc 6000−2700 = 3300 L.

Fraction d'une fraction
Nous pouvons appliquer ce qui vient d'être revu en prenant comme quantité q une fraction :
si on prends par exemple le quart de la moitié, on va devoir calculer $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$.
Voyons ce que cela donne sur un schéma :

La moitié a été partagé en quart, le carré rouge représente le quart de la moitié (les 3/4 restants sont en orange), mais il représente le huitième de l'ensemble.
En effet $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. Pour effectuer ce produit, il suffit de multiplier les numérateurs et les dénominateurs ensemble, car $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1\times1}{4\times2}$.

D'une façon générale, prendre $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ c'est calculer $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$.

Exemple 1 :
30% de la surface de la Terre est occupée par les continents.
On estime de plus, que 10% seulement des continents est cultivable.
Quelle fraction de la surface terrestre est cultivable?
Les 30% de 10%, c'est-à-dire $\frac{30}{100}\times\frac{10}{100}=\frac{30\times10}{100\times100}=\frac{300}{10000}=\frac{3}{100}$, donc seulement 3%.
C'est peu... et en diminution du fait de la croissance des zones urbaines.

Exemple 2 :
La moitié des filles et le quart des garçons n' a pas fait son devoir de maths (ces chiffres sont fantaisiste, la plupart des filles et des garçons faisant leurs devoirs). Sachant que les filles représentent 3/5 des élèves (les garçons représentent donc 2/5 des élèves), quelle fraction de la classe n'a pas fait son devoir?

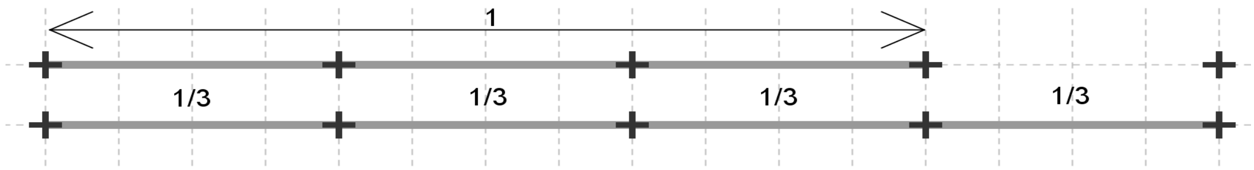
Il faut calculer 1/2 de 3/5 et additionner le résultat à 1/4 de 2/5 :
$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{1\times3}{2\times5}=\frac{3}{10}$ et $\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1\times2}{4\times5}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$ d'où la fraction de ceux qui n'ont pas fait leur devoir est :
$\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3+1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, soit 40%.

d) Division des fractions

Inverse d'une fraction

L'inverse d'un nombre non nul b est le nombre b' tel que $b\times b'=1$.
D'après la définition d'une fraction, on calcule b' de la façon suivante $b'=\frac{1}{b}$.
Exemple : l'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$ car $\frac{2\times1}{2}=\frac{2}{2}=1$.
Remarques : L'inverse de l'inverse de $b\neq0$ est b lui-même. L'inversion est une opération *involutive*, tout comme l'opération qui consiste à prendre l'opposé d'un nombre (l' opposé de l' opposé de b est $-(-b)=b$). Cela dit il ne faut pas confondre opposé et inverse qui sont deux notions totalement différentes.

Quelle est l'inverse d'une fraction $c=\frac{a}{b}$?
C'est un nombre c' tel que $c\times c'=1$. Nous pouvons vérifier, avec la règle sur la multiplication vue plus haut que $c'=\frac{b}{a}$ car alors $c\times c'=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{a\times b}{b\times a}=\frac{ab}{ab}=1$.
Exemple : L'inverse de $\frac{3}{4}$ est $\frac{4}{3}$.
Illustration montrant que les 3 quarts de 4 tiers valent 1 :



Application à la division

Multiplions $b\neq0$ par $B=b'\times a$: $b\times B=b\times(b'\times a)=b\times(\frac{1}{b}\times a)=(b\times\frac{1}{b})\times a=a$
Puisque $b\times B=a$, le nombre B est le quotient de a par b : $B=b'\times a=\frac{1}{b}\times a=\frac{a}{b}$
Diviser par b revient donc à multiplier par l'inverse de b.
Exemple : Pour diviser par 2 on peut multiplier par l'inverse de 2 qui est $\frac{1}{2}=0{,}5$

Règle : Pour diviser deux fractions entre elles, on multiplie la première par l'inverse de la deuxième.
En d'autres termes a, b, c et d étant quatre nombres entiers (b, c et d étant non nuls), $\frac{a}{c}\div\frac{b}{d}=\frac{a}{c}\times\frac{d}{b}=\frac{a\times d}{c\times b}$.
Cas particuliers : $a\div\frac{b}{c}=a\times\frac{c}{b}=\frac{a\times c}{b}$ et $\frac{a}{c}\div b=\frac{a}{c}\times\frac{1}{b}=\frac{a\times1}{c\times b}=\frac{a}{c\times b}$

Remarque :
Si on note la division des fractions avec le trait de fraction, les fractions à étages obtenues sont parfaitement valides mais il faut toujours placer le signe égal au niveau du trait de fraction correspondant à la « division principale ». Réécrivons la règle et ses cas particuliers de cette façon :

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}=\frac{a}{c}\times\frac{d}{b}=\frac{a\times d}{c\times b}\;;\;\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\times\frac{c}{b}=\frac{a\times c}{b}\;;\;\frac{\frac{a}{c}}{b}=\frac{a}{c}\times\frac{1}{b}=\frac{a\times1}{c\times b}=\frac{a}{c\times b}$$

Exemples : $\frac{\frac{5}{12}}{\frac{4}{3}}=\frac{5}{12}\times\frac{3}{4}=\frac{5\times3}{12\times4}=\frac{15}{48}=\frac{5}{16}$; $\frac{10}{\frac{15}{100}}=10\times\frac{100}{15}=\frac{10\times100}{15}=\frac{1000}{15}=\frac{200}{3}\approx66{,}67$;

$$\frac{\frac{10}{15}}{100}=\frac{10}{15}\times\frac{1}{100}=\frac{10\times 1}{15\times 100}=\frac{10}{1500}=\frac{1}{150}\approx 0{,}00667$$

Simplification évidente et utile (si c n'est pas nul) : $\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\dfrac{a}{b}$

Mélange d'opérations

Ceci est valable pour les fractions et aussi les écritures fractionnaires car les traits de fraction sont juste une notation commode qu'on utilise dans les deux cas et qui a les mêmes propriétés. Indication : pour ne pas se tromper, calculer le numérateur et le dénominateur de la fraction principale (elle fait face au signe =) :

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{-4}{15}}{1+\frac{3}{5}\times\frac{-1}{3}}=\frac{\frac{5}{15}+\frac{-4}{15}}{\frac{15}{15}+\frac{-3}{15}}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{12}{15}}=\frac{1}{15}\times\frac{15}{12}=\frac{15}{180}=\frac{1}{12}\approx 0{,}0833 \text{ et } \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

Avec des nombres relatifs : $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{-2}{3}}{1+\frac{3}{5}\times\frac{-1}{3}}=\dfrac{\frac{3}{6}+\frac{-4}{6}}{\frac{15}{15}+\frac{-3}{15}}=\dfrac{\frac{-1}{6}}{\frac{12}{15}}=\dfrac{-1}{6}\times\dfrac{15}{12}=\dfrac{-3\times 5}{2\times 3\times 12}=\dfrac{-5}{24}$

Rappel:

On allège les calculs en simplifiant avant d'effectuer les produits.

$$\frac{15}{48}\times\frac{7}{60}=\frac{\cancel{15}\times 7}{48\times(\cancel{15}\times 4)}=\frac{7}{48\times 4}=\frac{7}{192}$$

On a simplifié par 15 dès qu'on a reconnu le facteur commun.

On aurait aussi pu utiliser les décompositions en facteurs premiers.