Classe de 4ème | Chapitre 1 : Nombres relatifs

Le programme extrait du Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008

Connaissances :Opérations (+, – , · , :) sur les nombres relatifs en écriture décimale. Comparaison de deux nombres relatifs. *Enchaînement d'opérations.*

Capacités : Comparer deux nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire, en particulier connaître et utiliser : *l'équivalence entre $a \geq b$ et $a - b \geq 0$; l'équivalence entre $a > b$ et $a - b > 0$.* Utiliser le fait que des nombres relatifs de l'une des deux formes suivantes sont rangés dans le même ordre que a et b : $a + c$ et $b + c$; $a - c$ et $b - c$. *Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ac et bc sont dans le même ordre (respectivement l'ordre inverse) que a et b si c est strictement positif (respectivement négatif). Écrire des encadrements résultant de la troncature ou de l'arrondi à un rang donné d'un nombre positif en écriture décimale ou provenant de l'affichage d'un résultat sur une calculatrice (quotient ...).* Calculer le produit de nombres relatifs simples. Déterminer une valeur approchée du quotient de deux nombres décimaux (positifs ou négatifs). *Sur des exemples numériques, écrire en utilisant correctement des parenthèses, des programmes de calcul portant sur des sommes ou des produits de nombres relatifs. Organiser et effectuer à la main ou à la calculatrice les séquences de calcul correspondantes.*

Commentaires : *Le fait que x est strictement positif (respectivement x strictement négatif) se traduit par $x > 0$ (respectivement $x < 0$) est mis en évidence. Le fait que « comparer deux nombres est équivalent à chercher le signe de leur différence », intéressant notamment dans le calcul littéral, est dégagé. Ces propriétés sont l'occasion de réaliser des démonstrations dans le registre littéral.* Les élèves ont une pratique de la multiplication des nombres positifs en écriture décimale *ou fractionnaire*. Les calculs relevant de ces opérations sont étendus au cas des nombres relatifs. Savoir additionner et soustraire des entiers relatifs et multiplier deux nombres positifs écrits sous forme décimale ou fractionnaire deviennent des capacités exigibles dans le cadre du socle commun. À la suite du travail entrepris en classe de cinquième les élèves *sont familiarisés à l'usage des priorités ainsi qu'à la gestion d'un programme de calcul utilisant des parenthèses. En particulier, la suppression des parenthèses dans une somme algébrique est étudiée.*

1) Les nombres négatifs (rappels)

a) Définitions

Définition 1 : un nombre *négatif* est un nombre précédé d'un signe moins (−) qui indique une valeur inférieure à zéro.

Remarque 1 : Il y a des entiers négatifs, des décimaux négatifs, des nombres non décimaux négatifs.
Exemples : −2 ; −3,0 ; −28/7 sont des entiers négatifs (et donc aussi des décimaux négatifs),
−2,5 ; −28/5 sont des décimaux négatifs qui ne sont pas entiers
−2/3 ; $-\pi$ sont des nombres négatifs qui ne sont pas décimaux.

Remarque 2 : Les nombres négatifs apparaissent dans les problèmes lorsque certaines grandeurs sont inférieures à zéro.

Exemples : Une date peut être négative (ex : Pythagore est né en −580 à Samos signifie qu'il est naît 580 ans avant la date 0 qui est l'année supposée de la naissance de Jésus-Christ dans l'ère chrétienne), un compte en banque ou un bilan de trésorerie aussi (en 2011, la sécurité sociale a des dépenses évaluées à 450 milliards d'euros et des recettes évaluées à 430 milliards, d'où un solde négatif de −20 milliards d'euros), on parle alors de *déficit*.

Remarque 3 : Les nombres négatifs apparaissent notamment dans les calculs où on enlève à un nombre positif donné un nombre supérieur à ce nombre.

Exemple : 5 − 7 = −2 (on enlève 7 à 5, et comme 7 > 5 le résultat est négatif).

Définition 2 : un nombre *relatif* est un nombre qui peut être positif ou négatif.

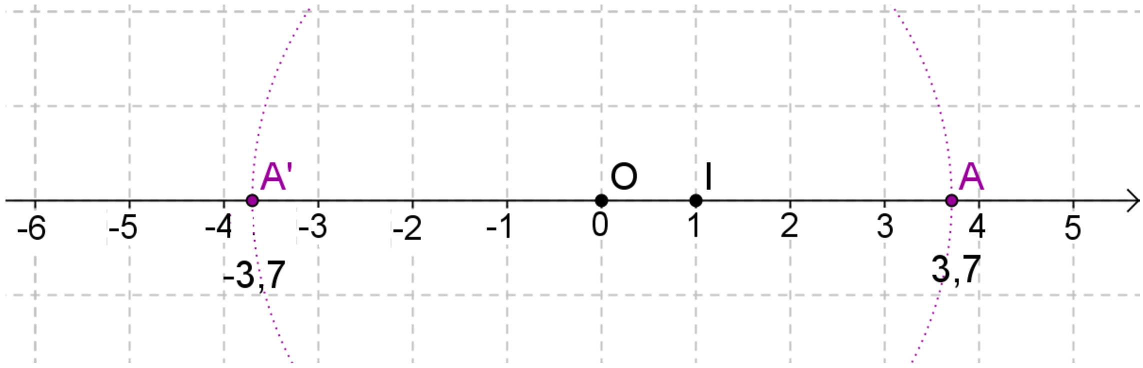
Remarque1 : Les entiers positifs sont aussi appelés les entiers *naturels*, ou simplement les *naturels*.
Remarque2 : Les nombres positifs peuvent être précédés d'un signe + pour les distinguer des négatifs.
Remarque3 : Les nombres relatifs sont parfois écrits entre parenthèses pour distinguer les symboles utilisés pour les opérations des symboles utilisés pour les signes.

Exemple : dans l'expression (−2)+(+3)−(−1), on effectue d'abord une somme entre les relatifs −2 et 3 et ensuite une différence entre le résultat (+1) et le négatif −1. Le résultat final est 2 (voir plus loin).

Définition 3 : Deux nombres ne différant que par leur signe sont dits *opposés*.

Exemple : L'opposé de 3 est −3 et réciproquement, l'opposé de −3 est 3.
Propriétés : Tous les nombres positifs ont un opposé négatif, et réciproquement.
Seul zéro est son propre opposé (−0 = +0 = 0).
L'opposé de l'opposé d'un nombre est le nombre lui même. Par exemple −(−3) = 3.
La somme de deux nombres opposés est nulle. Par exemple −3+3 = 0.
Si la somme de 2 nombres est nulle alors ces nombres sont opposés. Si $a+b = 0$ alors $a = -b$ et $b = -a$.
Sur un axe gradué, les nombres négatifs sont les *abscisses* de points symétriques par rapport à l'origine (le point qui a pour abscisse 0) : ci-dessous, les points A et A' sont symétriques par rapport à l'origine O (ou

diamétralement opposés sur un même cercle de centre O), leurs abscisses (environ 3,7 et −3,7) sont opposées.



Définition 4 : Un nombre relatif est composé d'un signe suivi d'une valeur numérique positive appelée la *distance à zéro* de ce nombre.

Exemple : Le nombre −3,7 est composé du signe − suivi de la valeur numérique 3,7 qui est la distance (OA' sur notre graphique) entre le point d'abscisse −3,7 (A' sur notre graphique) et l'origine (O sur notre graphique).
Remarque : Á la place de « distance à zéro », on dit aussi parfois *valeur absolue*, et on emploie parfois la notation suivante $|-3,7| = 3,7$ pour dire que la valeur absolue de −3,7 est 3,7. Une autre notation employée sur les tableurs ou en programmation est la suivante ABS(−3,7) = 3,7 où ABS signifie « valeur ABSolue ». Ces notations ne font pas partie du programme (ni de celui de la classe de 4ème).
Propriétés : Deux nombres opposés sont deux nombres qui ont la même distance à zéro (ou la même valeur absolue). Avec la notation indiquée plus haut, cela s'écrit : a et b étant 2 nombres, si $b = -a$ alors $|b| = |a|$.
Si deux nombres ont la même distance à zéro, alors ces deux nombres sont, soit égaux, soit opposés.
Avec même notation, cela s'écrit : a et b étant 2 nombres, si $|b| = |a|$ alors $b = a$ ou $b = -a$.

b) Ordre des relatifs
Tous les nombres négatifs sont inférieurs à zéro et à tous les nombres positifs.
D'une façon générale, si a est un nombre positif ($a>0$) et b un nombre négatif ($b<0$), alors on a $a>b$.

L'ordre des nombres négatifs est l'ordre « inverse » des nombres positifs, dans le sens où les nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leur distance à zéro.
Exemples : Les entiers naturels (positifs) dans l'ordre croissant sont 0, 1, 2, etc. alors que 0, −1, −2, etc. est l'ordre des entiers négatifs dans l'ordre décroissant.
On a $2 < 3$ mais $-2 > -3$. De même, $-1,99 > -2$ car $1,99 < 2$.
D'une façon générale, si a et b sont 2 nombres positifs ($a>0$ et $b>0$) tels que $a<b$, alors $-a$ et $-b$ sont 2 nombres négatifs et on a $-a>-b$.

Nous reviendrons sur les relations d'ordre dans des chapitres ultérieurs (calcul littéral, inéquations).

2) Additions et soustractions de nombres relatifs (rappels)

Règles d'addition Addition de 2 nombres de même signe : pour additionner deux nombres de même signe, on doit additionner leur distance à zéro et conserver le signe. Addition de 2 nombres de signes différents : pour additionner deux nombres de signes contraires, on doit soustraire la plus petite distance à zéro de la plus grande, et conserver le signe du nombre ayant la plus grande distance à zéro.

Exemples1 : $(+5)+(+3) = +(5+3) = +8$; $(-30)+(-3) = -(30+3) = -33$; $(-5,2)+(-1,7) = -(5,2+1,7) = -6,9$.
Ici, on effectue des additions car les nombres ont le même signe.
Exemples2 : $(+5)+(-3) = +(5-3) = +2$; $(-30)+(+3) = -(30-3) = -27$; $(-0,2)+(+1,7) = +(1,7-0,2) = +1,5$.
Ici, on effectue des soustractions car les nombres ont des signes contraires.

Règle pour la soustraction : Pour **soustraire** un nombre relatif, on doit **ajouter** l'opposé de ce nombre.

Exemples : (+5)−(+3) = (+5)+(−3) = +(5−3) = +2 ; (−30)−(−3) = (−30)+(+3) = −(30−3) = −27.
(+5)−(−13) = (+5)+(+13) = +(5+13) = +18 ; (−20,5)−(+3,5) = (−20,5)+(−3,5) = −(20,5+3,5) = −24.
On peut donc, ici aussi, être amené à effectuer des additions ou des soustractions selon les cas.

Application de la soustraction : calculs de *distances* sur un axe gradué.
La distance entre deux points d'un axe gradué est égale à la différence entre les abscisses de ces points : on doit enlever l'abscisse la plus petite à l'abscisse la plus grande. De cette façon la distance sera toujours positive (supérieure à zéro) comme il se doit.
Exemple : Soient A, B, C, D et E, les points d'abscisses respectives 0, 3, −1, −4 et −2,5. Calculons les distances AB, BC, BD et DE.
AB = 3−0 = 3 ; BC = CB = 3−(−1) = 3+(+1) = 4
BD = DB = 3−(−4) = 3+4 = 7 ; DE = (−2,5)−(−4) = −2,5+(+4) = 4−2,5 = 1,5.

Simplifications d'écriture : Les parenthèses entourant les nombres relatifs sont lourdes à manipuler, longues à écrire et, en définitive, inutiles. On peut s'en passer en appliquant successivement ces 3 règles :

Règle I : On remplace toutes les soustractions par des additions (en ajoutant l'opposé du nombre qu'on devait soustraire). Il ne reste plus qu'une somme de nombres relatifs qu'on appelle *somme algébrique*.
Règle II : On enlève les symboles d'additions et les parenthèses. Il ne reste plus alors que les signes des nombres qui feront office de symboles opératoires.
Règle III : Si une écriture commence par un nombre positif, on enlève le symbole +.

Exemples : (+3)−(−1) = (+3)+(+1) = +3+1 = 3+1 = 4.
(−3)−(+2) = −3+(−2) = −3−2 = −(3+2) = −5.

Ordre des opérations : Dans une somme algébrique, les différents termes de la somme peuvent être interchangés et groupés comme on veut. En effet, la somme est *commutative* (2+3=3+2 ou, de façon générale, a+b = b+a), on peut donc échanger 2 termes quelconques d'une somme. Elle est aussi *associative* c'est-à-dire que (2+3)+4=2+(3+4) ou, de façon générale, (a+b)+c = a+(b+c), on peut donc commencer par la droite ou par la gauche. Par conséquent, on peut regrouper tous les nombres positifs d'une part et tous les nombres négatifs d'autre part et soustraire le total des négatifs au total des positifs.
Exemple : (+3)+(+5)+(−2)+(−40)+(+11) = 3+5−2−40+11 = 3+5+11−(2+40) = 19−42 = −(42−19) = −23.
Si on ne doit pas effectuer le calcul manuellement (calcul mental ou calcul posé), on applique la règle ordinaire de priorité suivante : Lorsqu'on a une suite d'additions et de soustractions mélangées, on effectue les opérations de gauche à droite (c'est ce que fait la calculatrice).
Exemple : (+3)+(+5)+(−2)+(−40)+(+11) = <u>3+5</u>−2−40+11 = <u>**8**−2</u>−40+11 = <u>**6**−40</u>+11 = **−34**+11 = **−23**.
Remarque : Cette règle sert à éviter l'erreur suivante 5−<u>4−1</u> = 5−3 = 2. En réalité, en commençant par la gauche, <u>5−4</u>−1 =1−1 = 0. Avec l'astuce du regroupement, on ferait plutôt 5−(4+1) = 5−5 = 0.

3) Multiplications de nombres relatifs

Effectuer une multiplication comme (−3)×2 c'est additionner (−3) et (−3). Le résultat sera donc (−6).
Ainsi (−3)×(+2) = (−6). De même, (−3)×(+3) = (−3)+(−3)+(−3) = (−9).
Complétons la table de multiplication par −3 (on enlève les parenthèses inutiles) :
−3×1 = −3 ; −3×2 = −6 ; −3×3 = −9 ; −3×4 = −12 ; −3×5 = −15 ; −3×6 = −18 ; etc. à chaque étape, on ajoute −3, donc on enlève 3. Dans l'autre sens, la table peut « logiquement[1] » être complétée en multipliant −3 par des nombres négatifs. Voyons ce que cela donne :
−3×**2** = −6 ; −3×**1** = −3 ; −3×**0** = −0 ; −3×(**−1**) = 0+3 = 3 ; −3×(**−2**) = 3+3 = 6 ; −3×(**−3**) = 6+3 = 9 ; etc.
Observations : Pour multiplier −3 par un nombre positif, il suffit de mettre un signe − devant le produit de 3 (la distance à zéro de −3) par ce nombre. Pour multiplier −3 par un nombre négatif, il suffit de mettre un signe + devant le produit de 3 (la distance à zéro de −3) par la distance à zéro de ce nombre.

Ce que nous venons d'observer pour la table de 3 peut être généralisé pour toutes les tables, et finalement, pour tous les nombres relatifs. C'est pourquoi nous ne retenons que les règles ci-dessous qui résument cela.

Règles de la multiplication

1 Pour respecter la logique des opérations, il faut en particulier respecter la distributivité qui veut que 0 = −3×0 = −3×[3+(−3)] soit égal à −3×3+(−3)×(−3), soit à −9+(−3)×(−3), et donc −3×(−3) doit être égal à 9 comme nous l'avons écrit.

Multiplication de 2 nombres de même signe : Le produit de deux nombres de **même signe** est **positif**, égal au produit de leur distance à zéro.
Multiplication de 2 nombres de signes différents : Le produit de deux nombres de **signes contraires** est **négatif**, sa distance à zéro est égale au produit de la distance à zéro des deux facteurs.

Exemples : $-3\times100 = -300$; $50\times(-20) = -1\,000$; $-3\times(-12) = 36$; $-10\times50\times(-2) = 1\,000$.
Remarque : Les parenthèses inutiles sont celles qui entourent les nombres positifs (le signe + aussi est alors inutile) et celles qui entourent un nombre négatif placé devant un produit. Bien sûr, cela n'est pas valable si il y a un mélange d'opérations (voir plus loin).
Cas particuliers : La multiplication par -1 ne fait que changer le signe de ce nombre. Elle transforme donc un nombre en son opposé. Par exemple, $50\times(-1) = -50$ qui est l'opposé de 50. D'une façon générale, si a est un nombre, alors $a\times(-1) = (-1)\times a = -a$. Cette égalité permet de comprendre pourquoi un signe $-$ placé devant une somme algébrique, change tous les signes de cette somme. Par exemple $-(5-2+3)=-5+2-3$. Il s'agit juste d'une application de la distributivité :

$$-(5-2+3) = (-1)\times(5-2+3) = (-1)\times(5)+(-1)\times(-2)+(-1)\times(+3) = -5+2-3.$$

Il peut être utile de se souvenir aussi que $a\times1 = 1\times a = a$ (la multiplication par 1 ne change pas un nombre) et que $a\times0 = 0\times a = 0$ (la multiplication par 0 donne toujours le même résultat, si je donne 0€ à chacun des habitants de la planète, je n'ai rien donné, en tout cas aucun euro).

Règle des signes : Les deux règles que nous venons d'énoncer sont condensées en une règle qui peut s'énoncer ainsi « plus par plus ou moins par moins donnent plus et plus par moins ou moins par plus donnent moins » ou encore, de façon imagée mais réaliste « les amis de mes amis sont mes amis, les ennemis de mes ennemis sont mes amis, les amis de mes ennemis sont mes ennemis et les ennemis de mes amis sont mes ennemis ». Cette règle des signes peut aussi se dessiner :

×	+	−
+	+	−
−	−	+

Finalement, pour déterminer le signe d'un produit de nombres relatifs, il suffit de compter les facteurs négatifs, car les signes $-$ se neutralisent deux par deux (donnent un signe +).

Propriété : Le produit d'un nombre **pair** de facteurs négatifs est **positif**, tandis que le produit d'un nombre **impair** de facteurs négatifs est **négatif**.

Exemples : $2\times(-2)\times(-2)\times(-2) = -16$. Le résultat est négatif car il y a un nombre impair (3) de facteurs négatifs. $(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = 256$. Le résultat est positif car il y a un nombre pair (8) de facteurs négatifs.
Pour effectuer le calcul $(-2)\times5\times(-1)\times(-10)\times15$, nous pouvons commencer par régler la question du signe : il est négatif car il y a un nombre impair (3) de facteurs négatifs. Ce produit vaut donc : $-(2\times5\times1\times10\times15) = -(10\times10\times15) = -(100\times15) = -1500$.

Expressions mixtes (rappel) : Pour effectuer un calcul comportant des additions, des soustractions et des multiplications, il faut respecter la règle de priorité qui commande d'effectuer les multiplications en premier (sauf si il y a des parenthèses qui viendraient modifier cet ordre).
Exemples : $(-2)\times5+(-1)\times(-10)-15 = -10+10-15 = -15$. Ici, aucune parenthèses ne vient modifier l'ordre naturel des calculs, contrairement à cette expression $\mathbf{(}-2\times5+(-1)\mathbf{)}\times\mathbf{(}-10-15\mathbf{)} = -11\times(-25) = 275$. Dans cette dernière, nous avons mis en gras les parenthèses qui modifient l'ordre des priorités.

4) Divisions de nombres relatifs

Rappel : Effectuer la division d'un nombre a par un nombre b (calculer le quotient de a par b) intervient dans une « multiplication à trou », lorsqu'on cherche par quel nombre il faut multiplier b pour trouver a. Par exemple, si on a 6 paquets pesant en tout 5 kg, chaque paquet pèse $5\div6$ kg, nombre que l'on note aussi $\frac{5}{6}$. En effet, le poids x d'un paquet doit vérifier l'égalité $6\times x = 5$. On a vu en classe de $5^{\text{ème}}$ que cette équation a pour unique solution $x = \frac{5}{6}$. Cette relation entre la multiplication et la division (si $b\times x = a$ alors $x = \frac{a}{b}$, et réciproquement) explique que l'on ait une règle des signes identique pour ces deux opérations.

x	+	+	−	−
b	−	+	−	+
a	−	+	+	−

Règles de la division

Division de 2 nombres de même signe : Le quotient de deux nombres de **même signe** est **positif**, égal au quotient de leur distance à zéro.

Division de 2 nombres de signes différents : Le quotient de deux nombres de **signes contraires** est **négatif**, sa distance à zéro est égale au quotient de la distance à zéro des deux nombres.

Exemples : $-3\div100 = -0{,}03$; $50\div(-20) = -(50\div20) = -5\div2 = -2{,}5$; $-3\div(-12) = 3\div12 = 1\div4 = 0{,}25$; $10\div(-7) = -10\div7 = -1{,}428\,571\,428\,571\ldots$ ce nombre n'étant pas décimal possède une suite infinie de décimales où se répète la séquence de chiffres 142857. Généralement, on donne une valeur arrondie d'un quotient qui « ne tombe pas juste ». Par exemple, on écrira que $10\div(-7) \approx -1{,}429$ en faisant ce qu'on nomme un *arrondi au millième le plus proche* (on a mis un 9 à la place du 8 car le quotient est plus proche de 1429 millièmes que de 1428 millièmes). La valeur exacte d'un quotient qui n'a pas de valeur décimale est, quant à elle, notée sous la forme fractionnaire. Dans notre exemple, si on souhaite s'arrêter à la valeur exacte, on écrira $10\div(-7) = \frac{-10}{7}$.

Remarque : Dans certains pays, aux États-Unis par exemple, et sur certaines calculatrices, on utilise parfois les nombres fractionnaires (*mixed numbers*) qui séparent la partie entière de la partie décimale d'un quotient, et seule cette dernière partie est exprimée sous la forme d'une fraction, dite *propre* (une fraction dont le dénominateur est plus petit que le numérateur est dite *impropre*). Sur la calculatrice, le symbole ⌋ permet d'indiquer qu'on souhaite effectuer un quotient « proprement ». Ainsi $\frac{-10}{7}=-\left(1+\frac{3}{7}\right)$ et si je tape sur ma calculatrice −10⌋7 celle-ci me répond −1⌋3⌋7. Cette notation rappelle que le système décimal n'a pas toujours existé et si les anglo-saxons disent d'une personne qu'elle mesure 5 pieds ⅔ et non pas 5,67 pieds, nous disons aussi d'un film qu'il dure 1 heure et demi (ce qui se noterai 1⌋1⌋2 h) et non pas 1,5 heures, n'est-il pas ?

Cas particuliers : La division par 1 ou par −1 ne fait que changer le signe de ce nombre. Elle transforme donc un nombre en son opposé. Par exemple, $12{,}5\div(-1) = -12{,}5$ qui est l'opposé de 12,5. D'une façon générale, si a est un nombre, alors $a\div(-1) = a\div1 = -a$.

La division par zéro n'a pas de sens (la calculatrice affiche ERROR dans ce cas). Essayez de diviser un nombre, disons 10, par 0,1 puis par 0,01 ainsi de suite jusqu'à diviser par un nombre très proche de 0 comme 0,000 000 1. Le résultat sera de plus en plus grand si vous divisez par un nombre positif (comme 0,000 000 1) et de plus en plus petit si vous divisez par un nombre négatif (comme −0,000 000 1). Pour zéro, le résultat serait donc tiraillé entre ces deux extrémités infinies...

Diviser 0 par n'importe quel nombre (sauf 0) donne toujours 0, que l'on divise par un nombre positif ou négatif. Diviser un nombre par lui-même (sauf 0) donne toujours 1, diviser un nombre par son opposé (sauf 0) donne toujours −1.

Exemples : $\frac{-10}{-1}=\frac{10}{1}=10$; $\frac{-10}{1}=\frac{10}{-1}=-10$; $\frac{0}{-1}=\frac{0}{1}=0$; $\frac{-10}{-10}=\frac{10}{10}=1$; $\frac{-10}{10}=\frac{10}{-10}=-1$

Priorité des opérations (rappel) : Pour effectuer un calcul comportant des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions, il faut respecter la règle de priorité qui commande d'effectuer les multiplications et les divisions en premier (sauf si il y a des parenthèses qui viendraient modifier cet ordre). Attention ! Lorsqu'on a une suite de multiplications et de divisions (opérations de même priorité) on doit effectuer les opérations de gauche à droite. S'il n'y a que des multiplications, l'ordre des opérations n'a pas d'importance. Si les divisions sont écrites à l'aide du trait de fraction (voir chapitre 3), celui-ci considère que tout le numérateur (même si c'est le résultat d'un calcul) est divisé par tout le dénominateur (idem).

Exemples : $(-20)\times6\div(-2)+(-45)\div15 = -120\div(-2)+(-3) = 60-3 = 57$. On aurait pu noter cette suite d'opérations $\frac{-20\times6}{-2}+\frac{-45}{15}=\frac{120}{2}+(-3)=60-3=57$.

Le trait de fraction simplifie certaines écritures comportant des divisions et des parenthèses comme celle-ci $(-20)+15\div((-2)+(-45)\div15)$ qui s'écrit simplement $-20+\frac{15}{-2+\frac{-45}{15}}$. Dans ce cas, il faut toujours effectuer les calculs en-dessus ou en-dessous du trait de fraction, avant d'effectuer la division :

$$-20+\frac{15}{-2+\frac{-45}{15}}=-20+\frac{15}{-2+(-3)}=-20+\frac{15}{-5}=-20+(-3)=-23$$