CORRECTION

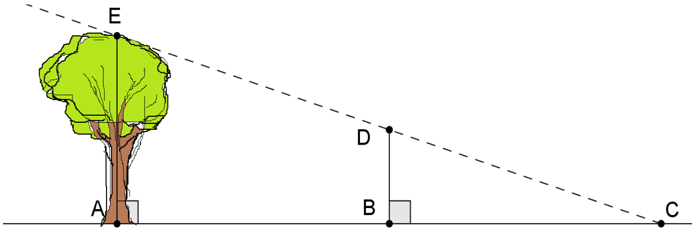
Barème : 6-4-5-5 points

1) <u>Hauteur inaccessible</u>

On veut évaluer la hauteur AE d'un arbre.

Pour cela on plante verticalement une perche $[BD]$ de 1,8 m de haut et on mesure la distance qui sépare le pied B de cette perche de l'endroit C où l'on peut aligner les sommets D de la perche et E de l'arbre.

On mesure alors la longueur CB=6,2 m.



a) Cas n°1 : On mesure la distance AB=24 m.

Écrire les mesures sur la figure, puis justifier comment déterminer AE. Effectuer les calculs en arrondissant le résultat au décimètre le plus proche.

(AE) et (BD) sont deux droites verticales, donc parallèles.

De plus, (ED) et (AB) sont sécantes en C.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès qui affirme que :

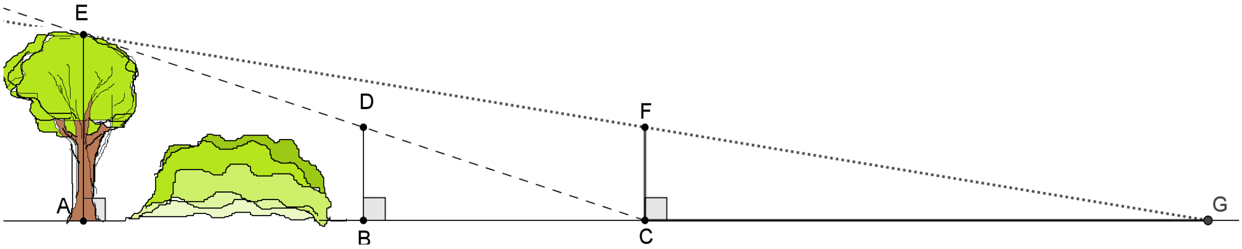
$\frac{CB}{CA}=\frac{BD}{AE}$, avec les mesures effectuées et, compte-tenu du fait que $CA=CB+BA$, on a $\frac{6,2}{6,2+24}=\frac{1,8}{AE}$.

On en déduit que $AE=\frac{1,8\times 30,2}{6,2}=\frac{1359}{155}\approx 8,76774$

L'arbre mesure donc environ 8,8 m de haut.

b) Cas n°2 : On ne peut pas mesurer AB. On mesure CB=6,2 m et $BD=CF$=1,8 m ainsi que la distance GC=7,8 m, G étant le point d'où l'on voit E aligné avec le sommet F de la perche placée en C.

En vous servant de ces mesures, déterminer AE (*justifier*)



(AE) et (CF) sont deux droites verticales, donc parallèles.

De plus, (EF) et (AC) sont sécantes en G.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès qui affirme que $\frac{GC}{GA}=\frac{CF}{AE}$ or $GA=GC+CB+AB$.

On a donc $\frac{7,8}{7,8+6,2+AB}=\frac{1,8}{AE}\Leftrightarrow\frac{7,8}{14+AB}=\frac{1,8}{AE}$

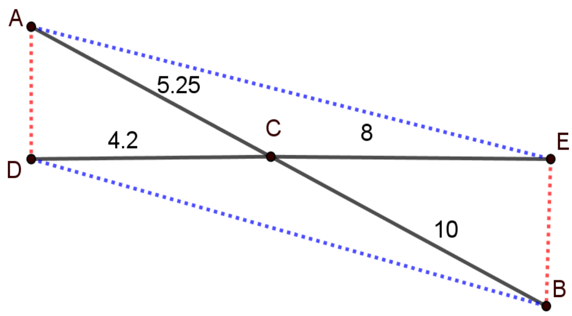
Ici, on ne peut pas mesurer AB, mais avec le premier dispositif on sait que : $\frac{6,2}{6,2+AB}=\frac{1,8}{AE}$

On en déduit $\frac{6,2}{6,2+AB}=\frac{1,8}{AE}\Leftrightarrow 6,2+AB=\frac{6,2\times AE}{1,8}\Leftrightarrow AB=\frac{6,2\times AE}{1,8}-6,2$

d'où $\frac{7,8}{14+\frac{6,2\times AE}{1,8}-6,2}=\frac{1,8}{AE}\Leftrightarrow 7,8\,AE=1,8\times 7,8+6,2\times AE\Leftrightarrow(7,8-6,2)AE=14,04\Leftrightarrow AE=\frac{14,04}{1,6}=8,775$.

L'arbre mesure donc environ 8,8 m de haut.

2) <u>Papillon</u>



Sur la figure ci-contre (qui est fausse),

on sait que les droites (AB) et (DE) se coupent en C de telle manière que : AC = 5,25 ; BC= 10 ; DC = 4,2 ; CE = 8 .

a) Les droites (AE) et (BD) sont-elles parallèles ? (*justifier*)

$\frac{CE}{CD}=\frac{8}{4,2}=\frac{40}{21}$ et $\frac{CA}{CB}=\frac{5,25}{10}=\frac{21}{40}$.

On a donc $\frac{CE}{CD}\neq\frac{CA}{CB}$.

Les points E,C,D et A,C,B ont beau être alignés dans le bon ordre, d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (AE) et (BD) ne sont pas parallèles.

b) Les droites (AD) et (BE) sont-elles parallèles ? (*justifier*)

$\frac{CD}{CE}=\frac{4{,}2}{8}=\frac{20}{41}$ et $\frac{CA}{CB}=\frac{5{,}25}{10}=\frac{21}{40}$.

On a donc $\frac{CE}{CD}=\frac{CA}{CB}$.

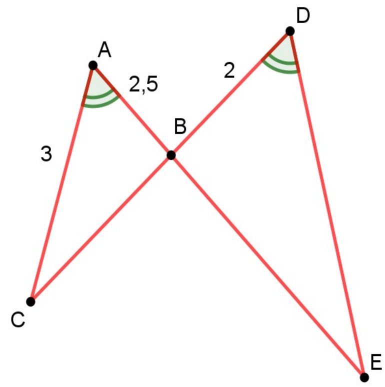
Les points D,C,E et A,C,B sont alignés dans le bon ordre, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AD) et (BE) sont parallèles.

3) <u>Angles égaux</u>

Les droites (AE) et (DC) se coupent en B, les angles $\widehat{EAC}$ et $\widehat{EDC}$ sont égaux et AB = 2,5 cm, DB=2 cm et AC = 3 cm.

a) Mettre les noms des sommets sur la figure ci-contre et les longueurs de l'énoncé (*la figure tracée ne respecte pas les longueurs*).

Fait ci-contre (on accepte l'autre disposition, obtenue en inversant A et D)



b) Montrer que les triangles ABC et BDE sont semblables.

Préciser les sommets homologues (*homologues=se correspondant*).

Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DBE}$ sont égaux car opposés par le sommet.

Du coup, les triangles ABC et BDE ont deux angles égaux, ce qui suffit pour prouver qu'ils sont semblables.

Les sommets homologues sont :

- A et D (même angle d'après l'énoncé)
- B et B (angles opposés par construction)
- C et E (3ème angle égal par déduction)

c) En déduire la longueur DE (*justifier*).

Comme des triangles semblables ont des côtés proportionnels, on en déduit que $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DE}=\frac{BC}{BE}$.

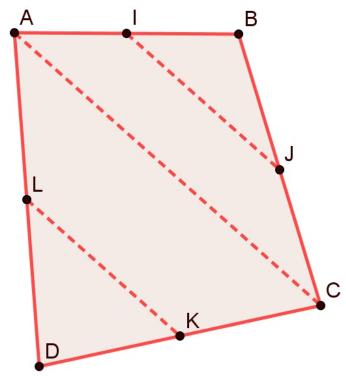
Avec les mesures de l'énoncé $\frac{2{,}5}{2}=\frac{3}{DE}$. On en tire $DE=\frac{2\times 3}{2{,}5}=\frac{6}{2{,}5}=2{,}4$ cm.

4) <u>Quadrilatère quelconque</u>

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque et I, J, K, L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DA].

a) Montrer que (IJ)//(LK) et que IJ=LK.

(*Indication : utiliser la diagonale* [AC] *du quadrilatère*)



Dans le triangle ABC : comme I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC], on a $\frac{BI}{BA}=\frac{1}{2}$ et $\frac{BJ}{BC}=\frac{1}{2}$. On a donc $\frac{BI}{BA}=\frac{BJ}{BC}$.

Or les points A, I, B et C, J, B sont alignés dans le bon ordre, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IJ) et (AC) sont parallèles et $\frac{IJ}{AC}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow AC=2\,IJ$.

De même dans le triangle ACD : comme L et K sont les milieux respectifs de [AD] et [DC], on a $\frac{DL}{DA}=\frac{DK}{DC}=\frac{1}{2}$. Or les points D, L, K et D, K, C sont alignés dans le bon ordre, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (LK) et (AC) sont parallèles et $\frac{LK}{AC}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow AC=2\,LK$.

Conclusion : (IJ)//(AC)//(LK) et 2IJ=AC=2LK donc (IJ)//(LK) et que IJ=LK.

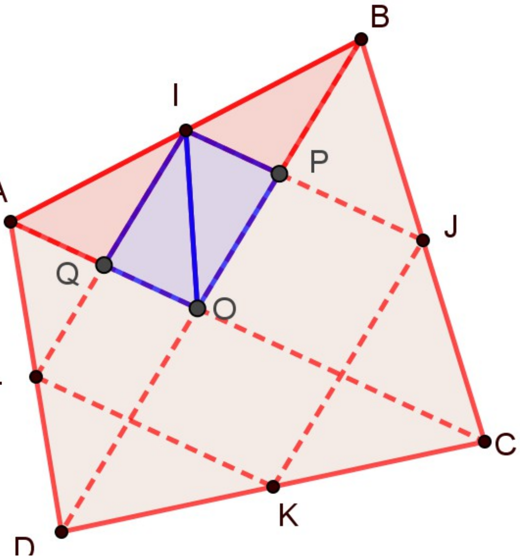
b) Expliquer pourquoi on peut obtenir de même que (IL)//(JK) et que IL=JK. En déduire que $IJKL$ est un parallélogramme.

En utilisant la diagonale [BD] du quadrilatère, au lieu de [AC], et en résonnant de la même façon dans les triangles ABD d'une part et CBD d'autre part, on obtiendra des résultats semblables, à savoir :

(IL)//(BD)//(JK) et 2IL=BD=2JK donc (IL)//(JK) et que IL=JK.

On retient que *IJKL* a des côtés opposés parallèles deux à deux ((*IJ*)//(*LK*) et (*IL*)//(*JK*)), c'est donc un parallélogramme. On aurait pu se contenter de remarquer après la question *a* que *IJKL* a deux côtés opposés parallèles et égaux, cela aurait suffit pour en conclure que *IJKL* est un parallélogramme.

<u>BONUS</u> (2 points) :
Montrer que l'aire du parallélogramme *IJKL* est la moitié de celle du quadrilatère *ABCD* (*Indication : utiliser les diagonales* [*AC*] *et* [*BD*] *ainsi que leur intersection que l'on nommera O*).



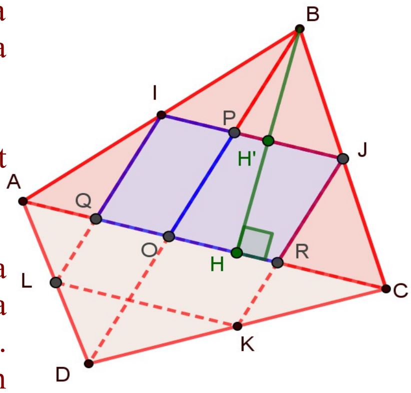
NB : Il s'agit de démontrer dans cette question 4 le bien connu théorème de Pierre Varignon (1654-1722) ; pour être tout-à-fait complet on énonce également les deux propriétés supplémentaires suivantes : le périmètre de *IJKL* est la somme des diagonales du quadrilatère et les médianes de celui-ci ont le même milieu.
La dernière propriété, qui nous occupe dans ce bonus, est la moins évidente. Reprenons notre quadrilatère avec ses deux systèmes de segments parallèles.
Je vais d'abord montrer que dans le triangle *ABO*, la portion de *IJKL* qui y est contenue occupe la moitié de l'aire du triangle. Il suffira ensuite de permuter les noms des points pour réaliser qu'il se passe la même chose dans tous les trois autres triangles.

J'ai nommé *P* l'intersection de [*IJ*] et [*BO*] et *Q* l'intersection de [*IL*] et [*AO*]. J'ai aussi tracé le segment [*IO*]. *IPOQ* est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
Les triangles *IPO* et *IQO* (en bleu) partagent ce parallélogramme en deux parties superposables de même aire.
De même les triangles *IPB* et *AQI* (en rouge) ont des côtés égaux et sont donc superposables de même aire.
Cela mérite une petite démonstration :

Comme (*AO*)//(*IP*) d'après Thalès $\frac{BP}{BO}=\frac{BI}{BA}=\frac{IP}{AO}=\frac{1}{2}$.

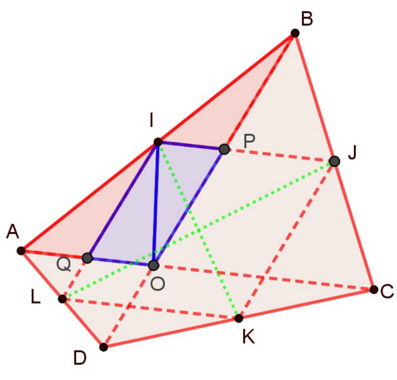
P est donc le milieu de [*BO*].
Comme *IP* =*QO* (parallélogramme *IPOQ*) et comme *AO*=2*IP* (Thalès), *Q* est le milieu de [*AO*] et *AQ*=*IP*.
De même (en inversant *A* et *B*) on a *PB*=*QI*. On a également (d'après l'énoncé) *AI*=*IB*.

Remarquons enfin que *AQI* (en rouge) et *IQO* (en bleu) ont des aires égales car ils ont des bases égales (*AQ*=*QO*) et des hauteurs égales puisque la hauteur se mesure depuis leur sommet commun *I* perpendiculairement à la droite (*AC*) qui contient leurs bases.
Du coup, les quatre triangles colorés ont la même aire.
La part de l'aire du triangle *ABC* qui appartient au parallélogramme *IJKL* est donc la moitié (2 sur 4).



Une autre idée de démonstration : Montrer que le parallélogramme *IJRQ* a une aire moitié de celle du triangle *ABC*. Sa base est *RQ*=*IJ* qui vaut la moitié de *AC* (on l'a vu) et sa hauteur se mesure perpendiculairement à (*AC*). J'ai tracé (en vert) la hauteur [*HH'*] qui passe par *B*. D'après Thalès on montre facilement que $\frac{BH'}{BH}=\frac{1}{2}$.

L'aire de *IJRQ* est $IJ\times HH'=\frac{AC}{2}\times\frac{BH}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{AC\times BH}{2}$, soit la moitié de l'aire du triangle *ABC*. Il ne reste plus qu'à faire de même pour le triangle *ADC* et le parallélogramme *RQLK*.



Ci-contre, j'ai fait figurer les diagonales de *IJKL* (les médianes de *ABCD*) pour montrer plus clairement que leur intersection n'est pas confondue en général avec l'intersection *O* des diagonales de *ABCD*.