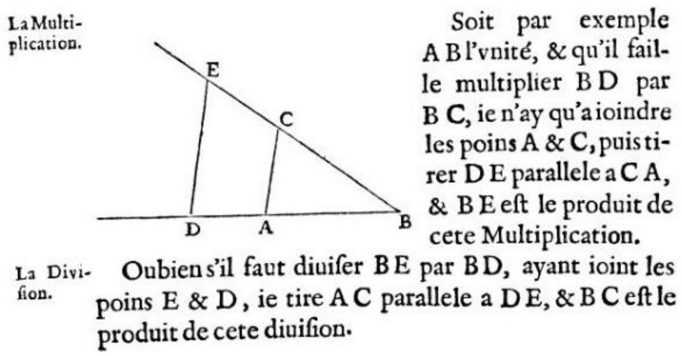
CORRECTION

1] Calculette géométrique

Dans cet ouvrage, publié en 1637, Descartes explique la multiplication et la division en termes de longueurs.

a) Transcrire ce texte, écrit en vieux français, dans notre langue moderne.


La Multiplication.

Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

Voici une traduction où j'ai un peu modifié la forme, mais pas le fond :

Soit BCD un triangle quelconque et A le point de $[BD]$ tel que $AB=1$.

Tracer la parallèle à (AC) passant par D ; cette droite coupe $[BC]$ au point E qui est tel que $BE=BD\times BC$.

Soit BED un triangle quelconque et A le point de $[BD]$ tel que $AB=1$.

Tracer la parallèle à (DE) passant par A ; cette droite coupe $[BE]$ au point C qui est tel que $BC=BE\div BD$.

b) Expliquer ce qu'a voulu dire Descartes à la lumière du théorème de Thalès.

La configuration est une « configuration de Thalès », puisque (DA) coupe (CE) en B et $(DE)//(AC)$.

On a donc $\dfrac{BA}{BD}=\dfrac{BC}{BE}$ (je ne mentionne pas le $3^{ème}$ rapport qui n'a pas d'utilité ici).

En remplaçant AB par 1 puisque telle est sa valeur, cette égalité s'écrit $\dfrac{1}{BD}=\dfrac{BC}{BE}$.

Les produits croisés égaux s'écrivent $1\times BE=BD\times BC$, soit $BE=BD\times BC$.

C'est l'égalité qui justifie la $1^{ère}$ partie du texte où il est question de produit.

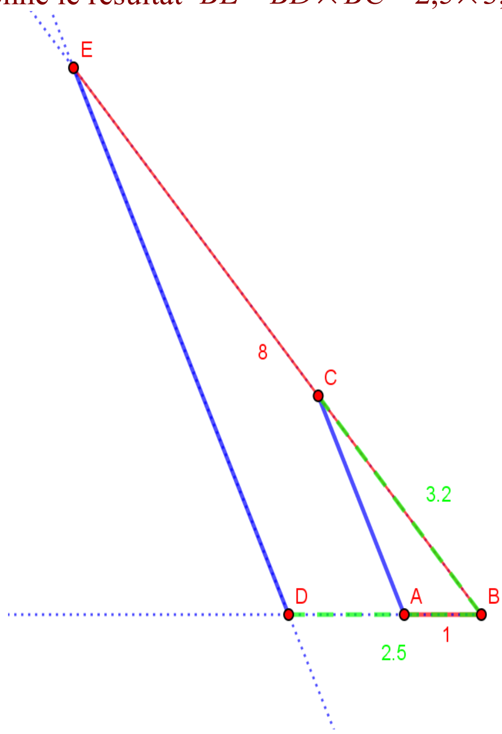
En divisant par BD cette égalité, on obtient $BC=\dfrac{BE}{BD}$ qui justifie la partie où il est question de quotient.

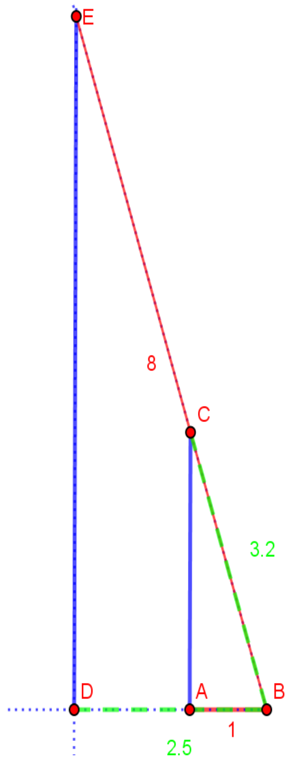
c) Appliquer cette méthode pour :

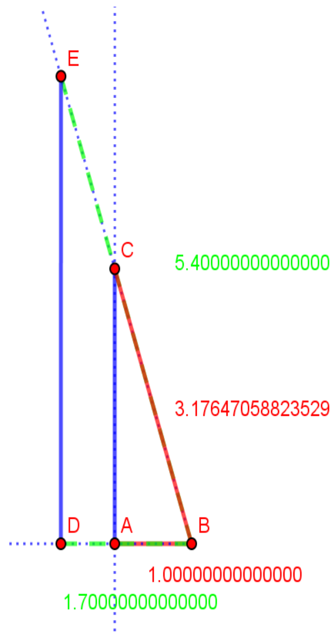
- construire le produit 2,5 par 3,2
- construire le quotient de 5,4 par 1,7

Pour construire le produit 2,5 par 3,2 on utilise la construction décrite avec BD=2,5 et BC=3,2.

Cela donne le résultat $BE=BD\times BC=2{,}5\times 3{,}2=8$, voir les deux figures correspondantes (à gauche).







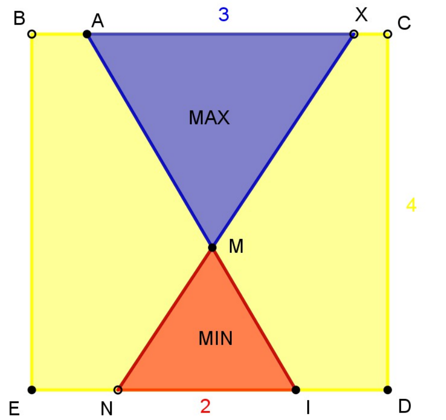
Pour construire le quotient de 5,4 par 1,7 on utilise la construction décrite avec BE=5,4 et BD=1,7.

Cela donne le résultat $BC=\frac{BE}{BD}=\frac{5,4}{1,7}\approx 3,1764705882353$

(je prends tous les chiffres donnés par la calculatrice pour montrer que le résultat avec Geogebra est aussi précis), voir la figure correspondante (à droite)

NB : J'ai mis 2 figures pour illustrer le produit pour montrer que l'angle formé par les 2 droites n'avait aucune importance : seuls comptent le parallélisme et l'alignement (dans le bon ordre).

2] Carré



La figure ci-contre montre un *carré BCDE* de côté $c=4$, les points mobiles A et X sur $[BC]$ et les points mobiles I et N sur $[DE]$ tels que :

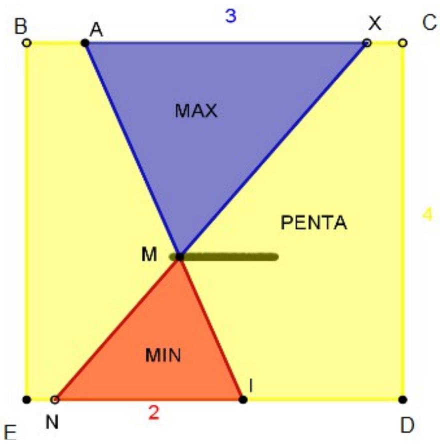
- $[AI]$ et $[NX]$ se coupent en M
- $AX=a$ et $IN=b$ où a et b sont invariables (mon illustration montre un cas où $a=3$ et $b=2$)

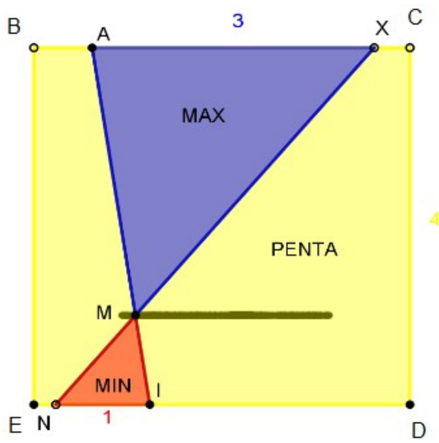
a) Faire une figure avec Geogebra dans le cas où $a=3$ et $b=1$ (si on déplace A, mobile sur $[BC]$, X doit se déplacer automatiquement pour que AX reste constant). Comment se déplace le point M quand on déplace le point A ?

La figure étant réalisée sur Geogebra, on peut, normalement déplacer certains points. Sur la mienne j'ai mis un rond creux pour les points déplaçables : il y a N et X, notamment et si je déplace l'un de ces points, le point M construit se déplace aussi.

*Pour visualiser les emplacements successifs pris par M quand je déplace N ou X, j'ai activé la **trace** du point (clic droit sur le point>trace activée).*

Je constate que M se déplace sur un segment parallèle au côté horizontal du carré.





b) Notons *MAX* l'aire du triangle *MAX* et *MIN* celle du triangle *MIN*.

En utilisant le théorème de Thalès, montrer que $\frac{MAX}{MIN}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$.

On sait que pour calculer l'aire d'un triangle, on utilise la formule $Aire=\frac{Base\times hauteur}{2}$.

Ici, on connait bien les bases $AX=a$ et $IN=b$ qui sont invariables.

La hauteur relative à la base $[AX]$ mesure $MM'=h$, M' étant le projeté orthogonal de M sur $[AX]$.

La hauteur relative à la base $[IN]$ mesure $MM''=c-h$, M'' étant le projeté orthogonal de M sur $[IN]$, car $M'M''=M'M+MM''=c$ (c étant le côté du carré).

Sur ma figure j'ai pris $c=4$ (comme dans l'énoncé).

On a donc $MAX=\frac{AX\times MM'}{2}=\frac{a\,h}{2}$ et $MIN=\frac{I\,N\times MM''}{2}=\frac{b(c-h)}{2}$

Le rapport *MAX/MIN* vaut donc $\frac{MAX}{MIN}=\frac{\frac{a\,h}{2}}{\frac{b(4-h)}{2}}=\frac{a\,h}{b(c-h)}=\frac{a}{b}\times\frac{h}{c-h}$.

Mais nous sommes dans une situation de réduction : le théorème de Thalès se dissimule dans la configuration de l'énoncé où (AI) coupe (NX) en M et $(AX)//(IN)$ et donc $\frac{AM}{I\,M}=\frac{AX}{I\,N}=\frac{a}{b}$.

De même le théorème de Thalès s'applique dans la configuration des triangles AMM' et IMM'' où (AI) coupe $(M'M'')$ en M et $(AM')//(IM'')$ et donc $\frac{AM}{I\,M}=\frac{MM'}{MM''}$.

Des deux égalités précédentes je tire $\frac{MM'}{MM''}=\frac{a}{b}$, soit, avec les lettres $\frac{h}{c-h}=\frac{a}{b}$.

Je peux donc remplacer ce rapport dans l'expression du rapport *MAX/MIN* : $\frac{MAX}{MIN}=\frac{a}{b}\times\frac{h}{c-h}=(\frac{a}{b})^2$.

Remarque :
On pouvait ne pas écrire tout ça en remarquant que la situation était une situation d'agrandissement/réduction (voir le cours) : *MIN* étant une réduction de *AXM* de coefficient $k=\frac{b}{a}$, toutes les longueurs sont multipliées par ce coefficient (même la hauteur) et toutes les aires sont multipliées par le coefficient $k^2=(\frac{b}{a})^2$, d'où l'égalité de l'énoncé.

c) En utilisant les aires des trapèzes *BENX* et *BAIE* et celle du pentagone *DIMXC*, montrer que : $MAX-MIN=\frac{c(a-b)}{2}$.

Les deux trapèzes en question sont

- *CAID* dont l'aire vaut *DIMXC*+*MAX* qui peut aussi s'écrire $c\frac{AC+ID}{2}$
- *CXND* dont l'aire vaut *DIMXC*+*MIN* qui peut aussi s'écrire $c\frac{XC+ND}{2}$

En faisant intervenir les longueur *a* et *b*, et en faisant passer *MAX* (dans la 1ère) ou *MIN* (dans la 2de) dans le membre de droite, j'obtiens de deux façons différentes l'aire du pentagone *DIMXC* :

- $DIMXC=c\frac{AC+ID}{2}-MAX=c\frac{(a+XC)+ID}{2}-MAX$
- $DIMXC=c\frac{XC+ND}{2}-MIN=c\frac{XC+(b+ID)}{2}-MIN$

Par identification, j'en déduis $c\frac{(a+XC)+ID}{2}-MAX=c\frac{XC+(b+ID)}{2}-MIN$.

En regroupant différemment les termes de cette égalité, j'obtiens :

$MAX-MIN=c\frac{(a+XC)+ID}{2}-c\frac{XC+(b+ID)}{2}=\frac{c}{2}\times[(a+XC+ID)-(XC+b+ID)]=\frac{c}{2}\times[a-b]$.

d) Déduire des deux questions précédentes les aires *MAX* et *MIN* en fonction de *a, b* et *c*.

On sait que $\frac{MAX}{MIN}=(\frac{a}{b})^2$ d'une part et $MAX-MIN=c\frac{a-b}{2}$ d'autre part.

La dernière égalité s'écrit $MAX=MIN+c\frac{a-b}{2}$ et, en remplaçant dans la première, on a

$\frac{MIN+c\frac{a-b}{2}}{MIN}=(\frac{a}{b})^2$ soit $b^2(MIN+c\frac{a-b}{2})=a^2 MIN$ (égalité des produits en croix).

Je résous cette équation en MIN : $MIN(b^2-a^2)=-b^2c\frac{a-b}{2}\Leftrightarrow MIN=\frac{-c}{2}\times\frac{b^2(a-b)}{b^2-a^2}=\frac{c}{2}\times\frac{b^2(b-a)}{b^2-a^2}$.

On peut laisser comme ça, mais c'est mieux simplifié : $MIN=\frac{c}{2}\frac{b^2(b-a)}{(b-a)(b+a)}=\frac{b^2c}{2(a+b)}$.

remarque : J'ai utilisé l'égalité $b^2-a^2=(b-a)(b+a)$ qui figure au programme de 3ème... (développer le membre de droite pour vérifier).

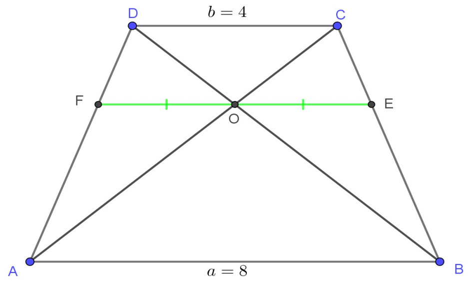
De là, on tire $MAX=MIN+c\frac{a-b}{2}=\frac{b^2c}{2(a+b)}+c\frac{a-b}{2}=\frac{c}{2}\times(\frac{b^2}{a+b}+a-b)=\frac{c}{2}\times(\frac{b^2+(a-b)(a+b)}{a+b})$.

Cela se simplifie selon l'égalité précédemment citée $MAX=\frac{c}{2}\times(\frac{b^2+a^2-b^2}{a+b})=\frac{a^2c}{2(a+b)}$.

Calculer les valeurs exactes de ces aires pour le cas : *a*=3, *b*=2 et *c*=4.

Avec *c*=4 on a $MAX=\frac{2a^2}{a+b}$ et $MIN=\frac{2b^2}{a+b}$, on a donc $MAX=\frac{2\times9}{3+2}=\frac{18}{5}=3{,}6$ et $MIN=\frac{2\times4}{3+2}=\frac{8}{5}=1{,}6$

Justifier alors l'observation de la question *a*.
Pourquoi *M* reste sur une droite horizontale ?
On vient de calculer l'aire des triangles de bases *AX* et *IN*.
Ces bases sont invariables quand on déplace les points qui le peuvent (*X* ou *N* sur ma figure) et les aires des triangles sont également invariables d'après ces calculs qui ne font jamais intervenir la position exacte des points variables.
Comme les aires ne dépendent que de la base et de la hauteur, et comme les aires et les bases sont invariables, on en déduit que les hauteurs sont invariables aussi : le point *M* se déplace en restant toujours à la même distance des deux bases, soit parallèlement à celles-ci.

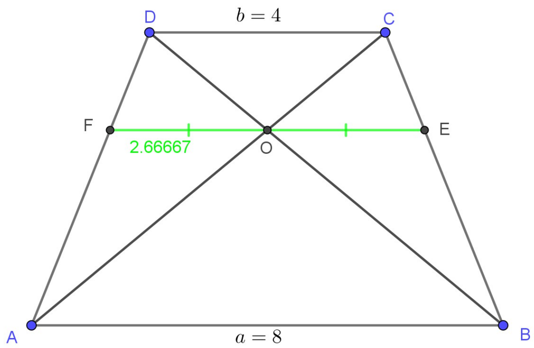


3] Trapèze isocèle

ABCD est un trapèze *isocèle* de bases $AB=a$ et $DC=b$
(pour la figure et l'application numérique j'ai pris a=8 et b=4).
Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O.
Un segment $[FE]$, parallèle aux bases, joint les côtés non parallèles du trapèze en passant par O (voir figure).
a) Exprimer la longueur EO en fonction de a et b.
Calculer EF lorsque a=8 et b=4.
Les triangles *OAB* et *OCD* forment une configuration « papillon » de Thalès :
$(AB)//(EF)$ et (CA) coupe (BD) en O, on a donc $\frac{OC}{OA}=\frac{CD}{AB}=\frac{b}{a}$ (0)
De l'égalité (0) on déduit $a\,OC=b\,OA$ et, en ajoutant aOA des deux côtés de l'égalité :

$$(a+b)\,OA=a\,AC \Leftrightarrow \frac{OA}{AC}=\frac{a}{a+b} \quad (1)$$

Le segment médian $[EF]$, paralléle aux bases et passant par le point O d'intersection des diagonales, définit une configuration de Thalès avec les triangles *BCD* et *BEO*.
Dans cette configuration, on a $\frac{OF}{CD}=\frac{AO}{AC} \Leftrightarrow \frac{OF}{b}=\frac{AO}{AC}$
En utilisant l'égalité (1), on obtient $\frac{OF}{b}=\frac{a}{a+b} \Leftrightarrow OF=\frac{a\,b}{a+b}$
On en déduit que $EF=2\,OF=\frac{2\,a\,b}{a+b}$.
Avec les valeurs numériques de la figure (a=8 et b=4), on obtient $EF=\frac{2\times4\times8}{4+8}=\frac{64}{12}=\frac{16}{3}\approx5{,}333$



b) En déduire *EF* puis expliquer cette phrase « *EF* est la moyenne harmonique[1] des deux bases »
La moyenne harmonique $m_{harm.}$ des deux bases est définie par la relation fournie en bas de page :

$$\frac{1}{m_{harm.}}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$

En mettant la somme des fractions du numérateur au même dénominateur, on obtient :

1 La moyenne harmonique m de a et de b est telle que l'inverse de m est la moyenne arithmétique des inverses de a et de b.

$$\frac{1}{m_{harm.}}=\frac{\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}}{2}=\frac{\frac{a+b}{ab}}{2}=\frac{a+b}{2ab}$$

Il ne reste plus qu'à inverser ces deux fractions pour obtenir $m_{harm.}$: $m_{harm.}=\frac{2ab}{a+b}$

Ainsi, on constate bien que $EF = m_{harm.}$

Pour ceux que ça intéresse, on retrouve la *moyenne harmonique* dans de nombreuses autres situations :
On fait un trajet aller et retour parcourant une distance d (en km) à l'aller comme au retour.
La vitesse à l'aller est de v_1 =4 km/h (on marche) et celle au retour est de v_2 =8 km/h (pressé de rentré, on court).
Montrons que la vitesse moyenne v sur l'ensemble du parcours est la moyenne harmonique de 20 et 30 :

Soit t_1 le temps (en h) correspondant au trajet de l'aller : $v_1=\frac{d}{t_1}\Leftrightarrow t_1=\frac{d}{v_1}$

Soit t_2 le temps (en h) correspondant au trajet du retour : $v_2=\frac{d}{t_2}\Leftrightarrow t_2=\frac{d}{v_2}$

La durée du parcours aller-retour est $t_1+t_2=\frac{d}{v_1}+\frac{d}{v_2}=\frac{d(v_1+v_2)}{v_1 v_2}$ (après mise au même dénominateur et factorisation)

Or la vitesse moyenne v sur l'ensemble du parcours est définie par $v=\frac{2d}{t_1+t_2}$ puisque la distance parcourue est $2d$ et le temps de parcours t_1+t_2. Ainsi $v=\frac{2d}{t_1+t_2}=\frac{2d}{\frac{d(v_1+v_2)}{v_1 v_2}}=\frac{2v_1 v_2}{v_1+v_2}$, v est la moyenne harmonique de v_1 et v_2.

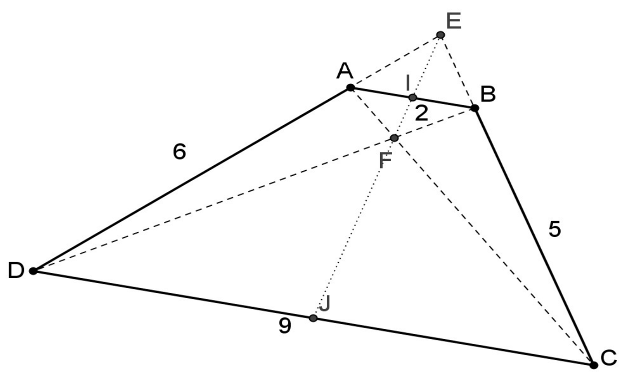
Numériquement, $v=\frac{2\times 4\times 8}{4+8}=\frac{64}{12}=\frac{16}{3}=5+\frac{1}{3}$

Un autre problème, légèrement différent, qui conduit à la même solution :
Monsieur Vite effectue une tâche en 4 minutes. Monsieur Bien effectue la même tâche en 8 minutes.
Combien de temps faut-il à Mrs Vite et Bien pour effectuer la tâche ensemble ?
En y travaillant la même durée l'un après l'autre, combien de temps faut-il à Mrs Vite et Bien pour effectuer la tâche ?
En 1 minute, 1 minute étant la quart de 4 minutes, Monsieur Vite a cultivé le quart du champ.
En 1 minute, 1 minute étant le huitième de 8 minutes, Monsieur Vite a cultivé le huitième du champ.
Si Messieurs Vite et Bien cultivent un champ ensemble, en 1 minute ils auront cultivé $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ du champ.
Un tiers de ce temps, donc 20 secondes, suffit pour Messieurs Vite et Bien, cultivant ensemble un champ, pour en cultiver le tiers de $\frac{3}{8}$, c'est-à-dire $\frac{1}{8}$.
Il faut donc 20×8=160 secondes à Messieurs Vite et Bien cultivant ensemble un champ pour le cultiver en entier.
Chacun aura donc travaillé 160 secondes.
S'ils travaillent l'un après l'autre, ils travailleront 320 secondes, soit 5 minutes $\frac{1}{3}$, la moyenne harmonique de 4 et 8.

4] Trapèze complet

ABCD est un trapèze quelconque. Les droites (*AD*) et (*BC*) se coupent en *E* ; *F* est le point d'intersection des diagonales [*AC*] et [*BD*] ; *I* est le milieu de [*AB*] et *J* le milieu de [*CD*].

a) Calculer *EA* et *EB* avec les mesures de la figure.
(*AB* = 2 cm, *BC* = 5 cm, *CD* = 9 cm et *AD* = 6 cm)



(*AB*)//(*CD*) et (*AD*) coupe (*BC*) en *E*, donc le théorème de Thalès s'applique et l'on a :

$\frac{DE}{AE}=\frac{CE}{BE}=\frac{DC}{AB}$ soit, avec les valeurs de l'énoncé

$\frac{6+EA}{EA}=\frac{5+EB}{EB}=\frac{9}{2}=4{,}5$

donc $6+EA=4{,}5\,EA$ soit $6=3{,}5\,EA$ et $EA=\frac{6}{3{,}5}=\frac{12}{7}\approx 1{,}714$.

De même, $5+EB=4{,}5\,EB$ soit $5=3{,}5\,EB$ et $EB=\frac{5}{3{,}5}=\frac{10}{7}\approx 1{,}429$.

b) Prouver, en utilisant l'axiome d'Euclide[2], que E, I et J sont alignés.

Appelons I' l'intersection de $[AB]$ et $[EJ]$ et montrons que $I=I'$.

$(AI')//(DJ)$ et (AD) coupe (JI') en E, donc le théorème de Thalès s'applique et l'on a : $\frac{JE}{I'E}=\frac{DE}{AE}=\frac{JD}{I'A}$.

D'après la question a) $\frac{DE}{AE}=\frac{DC}{AB}=\frac{0{,}5\,DC}{0{,}5\,AB}=\frac{DJ}{AI}$.

On en déduit que $\frac{DJ}{AI'}=\frac{DJ}{AI}$ et donc que $AI'=AI$,

Finalement $I=I'$, les points E, I et J sont alignés.

c) Prouver que F, I et J sont alignés.

Appelons I'' l'intersection de $[AB]$ et $[FJ]$ et montrons que $I=I''$.

$(AI'')//(CJ)$ et (AC) coupe (JI'') en F, donc le théorème de Thalès s'applique et l'on a : $\frac{FJ}{FI'}=\frac{FC}{FA}=\frac{JC}{I''A}$.

Mais comme $(AB)//(CD)$ et comme (AC) coupe (BD) en F, d'après Thalès, on a $\frac{FC}{FA}=\frac{FD}{FB}=\frac{DC}{AB}$ et on en déduit que $\frac{FC}{FA}=\frac{0{,}5\,DC}{0{,}5\,AB}=\frac{JC}{AI}$

On en déduit que $\frac{JC}{AI''}=\frac{JC}{AI}$ et donc que $AI''=AI$,

Finalement $I=I''$, les points F, I et J sont alignés.

En déduire que E, F, I et J sont alignés.

Comme E, I et J sont alignés et que F, I et J sont alignés, on en déduit que E et F apprtiennent tous deux à la droite (IJ) : ces quatre points sont toujours alignés (sous-entendu quelles que soient les longueurs des côtés du trapèze).

2 Le 5$^{\text{ème}}$ axiome d'Euclide affirme que par un point donné, il ne passe qu'une seule droite parallèle à une direction donnée.