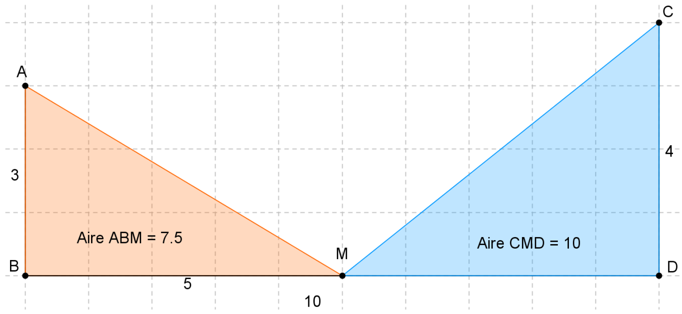
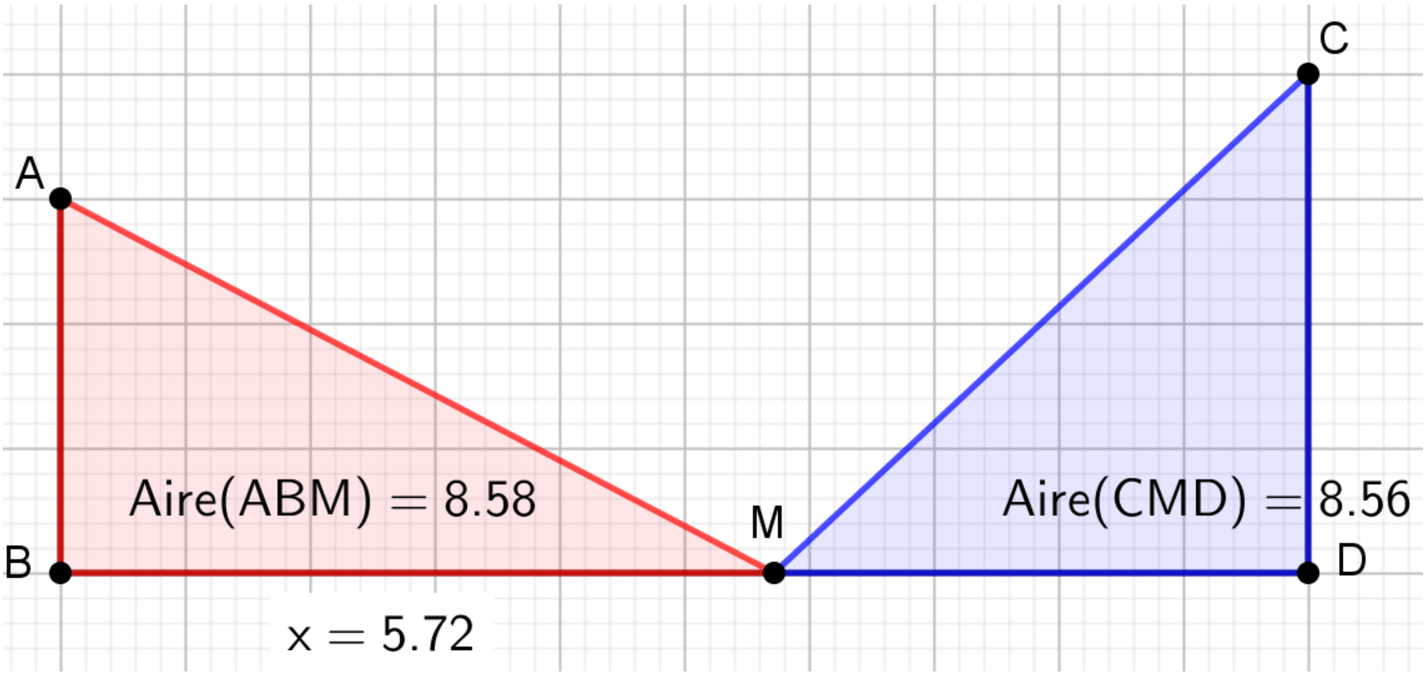
CORRECTION

1) Égalité d'aires



Les points A, B, C et D sont disposés comme sur la figure ci-contre, avec $AB = 3$, $CD = 4$ et $BD = 10$. Le point M est mobile sur le segment $[BD]$ et on note $BM = x$. Où doit être placé M pour que les aires des triangles ABM et CDM soient égales ? La valeur de x réalisant cette égalité sera notée x_0.

a) Réaliser la figure sur GeoGebra ou un logiciel équivalent, en veillant à bien définir M sur $[BD]$.
Afficher la longueur BM et les aires des triangles CDM et ABM. Déterminer une valeur approchée de x_0 aussi précise que possible (GeoGebra peut afficher jusqu'à 15 chiffres) en ajustant la position de M.



J'ai essayé d'être aussi précis que possible : je n'arrive pas à une égalité stricte des deux aires.
Il semble que pour $x \approx 5{,}72$ on soit assez proche de la solution x_0 cherchée.

b) Écrire l'équation qui permet de répondre à la question posée. Résoudre cette équation et conclure.
La valeur exacte obtenue ici pour x_0 était-elle accessible par la méthode du a) ?
Donner alors une valeur approchée de x_0 plus précise que celle obtenue au a).
L'équation qui permet de déterminer x_0 est *Aire(CDM)=Aire(ABM)* soit $\frac{1}{2}CD \times DM = \frac{1}{2}AB \times BM$ soit,
en multipliant par 2 cette égalité : $CD \times DM = AB \times BM$
Comme $BD=10$ et $BM=x$, on en déduit que $DM=BD-BM=10-x$ et donc, en remplaçant aussi $AB = 3$ et $CD = 4$, l'égalité devient : $4(10-x) = 3x$.
Développons cette égalité : $40-4x = 3x$.
Regroupons d'un même côté ce qui contient l'inconnue x : $40 = 3x+4x = 7x$.
Divisons par 7 cette égalité, cela nous donne la valeur exacte de x_0 cherchée : $x=\frac{40}{7}\approx 5{,}7142857142857...$
Cette valeur exacte est fractionnaire et n'a pas d'écriture décimale exacte.
GeoGebra aurait pu afficher 1000 décimales que cette valeur exacte n'aurait pas été obtenue.
Il y a 6 chiffres qui se répètent. On peut noter ce nombre $5{,}\overline{714285}$.

c) Prenons deux nombres positifs quelconques a et b ; supposons que $AB = a$ et $CD = b$ tandis que BD reste invariablement égal à 10. Le problème restant le même, déterminer sa solution x_0 en fonction de a et b.
Compléter ensuite ce tableau donnant x_0 (arrondi éventuellement au millième) pour différentes valeurs de a et b.
Reprenons l'égalité : $CD \times DM = AB \times BM$ en remplaçant $AB = a$, $CD = b$, $DM=10-x$ et $BM=x$:
L'égalité devient : $b(10-x) = ax$.
Développons : $10b-bx = ax$.

Regroupons d'un même côté : $10b = ax+bx = (a+b)x$.

Divisons par $(a+b)$: $x_0=\dfrac{10b}{a+b}$.

Voilà notre solution x_0 dans ce cas plus général.

On peut maintenant compléter le tableau :

a	1	2	3	4	5	1	1	1	1
b	4	4	4	4	10	2	3	4	5
x_0	8	6,666667	5,714286	5	6,666667	6,666667	7,5	8	8,333333

Que remarque t-on dans le cas où $a=\frac{b}{2}$?

Il y a trois colonnes où $a=\frac{b}{2}$: $a=2$ et $b=4$; $a=5$ et $b=10$; $a=1$ et $b=2$.

Dans ces trois cas, on remarque que $x_0\approx 6{,}666667$.

On peut supposer que ce sera toujours la valeur de x_0 dans ce cas.

Prouver votre remarque par un calcul littéral.

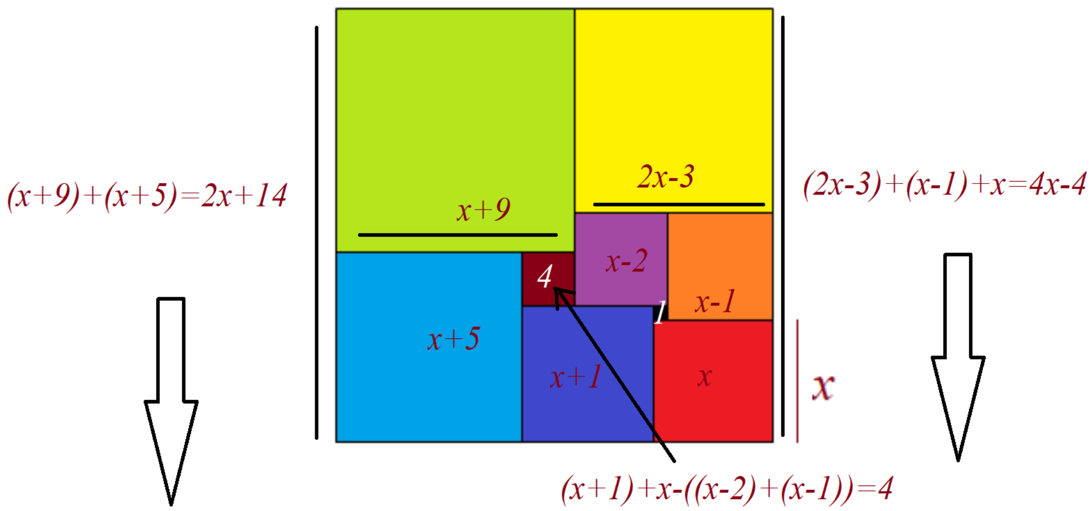
$x_0=\dfrac{10b}{a+b}$ mais, quand $a=\frac{b}{2}$, cela s'écrit : $x_0=\dfrac{10b}{\frac{b}{2}+b}=\dfrac{10b}{\frac{3b}{2}}=10b\times\dfrac{2}{3b}=\dfrac{20b}{3b}=\dfrac{20}{3}\approx 6{,}666667$

2) <u>Pavage d'un rectangle avec des carrés</u>

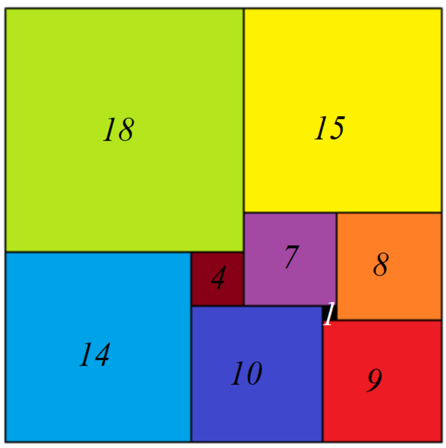
a) Le rectangle ci-contre a été découpé très habilement en neuf carrés.

En considérant que le petit carré noir mesure 1 unité de côté et en notant x le côté du carré rouge, exprimer les côtés des différents carrés en fonction de x puis déterminer les dimensions du rectangle.

J'ai commencé par résoudre ce problème sur le schéma :



$2x+14=4x-4 \iff 18=2x \iff x=9$

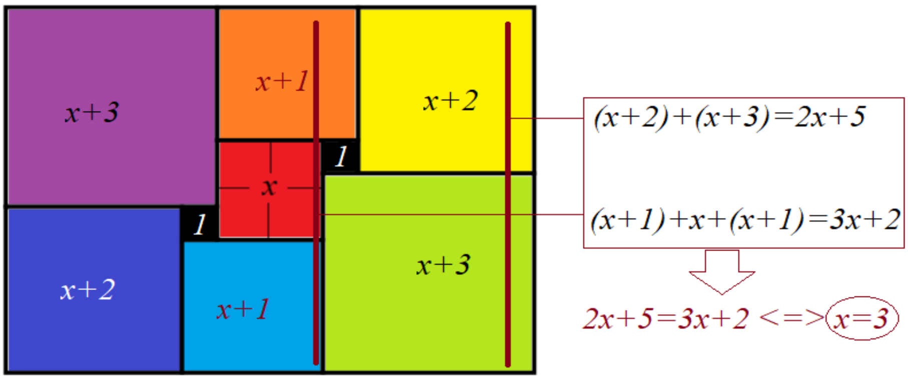


Le carré orange : son côté mesure $x-1$ car on enlève au carré rouge le côté du carré noir.
Le carré bleu foncé : son côté mesure $x+1$ car on ajoute au carré rouge le côté du carré noir.
Le carré violet : son côté mesure $x-2$ car on enlève au carré orange le côté du carré noir.
Le carré jaune : son côté mesure $2x-3$ car on ajoute au carré violet le côté du carré orange.
Le carré marron : son côté mesure 4 car, ajouté aux carrés violet et orange, cela fait la somme du carré bleu et du carré rouge, soit en effectuant la différence $x+1+x-((x-2)+(x-1))=4$.
Le carré bleu turquoise : son côté mesure $x+5$, car il est la somme des côtés des carrés bleu et marron.
Le carré vert clair : son côté mesure $x+9$, car il est la somme des côtés des carrés bleu turquoise et marron.
C'est là que ça devient intéressant, pour conclure, il faut écrire une équation. Je l'obtiens en calculant de deux façons le côté vertical de mon rectangle :
En ajoutant les carrés bleu turquoise et vert clair : $(x+5)+(x+9)=2x+14$.
En ajoutant les carrés rouge, orange et jaune : $(x-1)+(2x-3)+x=4x-4$.
Voilà notre équation : $2x+14=4x-4$.
Cette égalité se transforme en $2x = 18$ d'où $\underline{\underline{x = 9}}$.
Voici donc les côtés des carrés :
rouge=9, jaune=15, violet=7, bleu=10, vert clair=18, orange=8, noir=1, bleu turquoise=14 et vert clair=18.
Le rectangle mesure donc 32 sur 33 car :

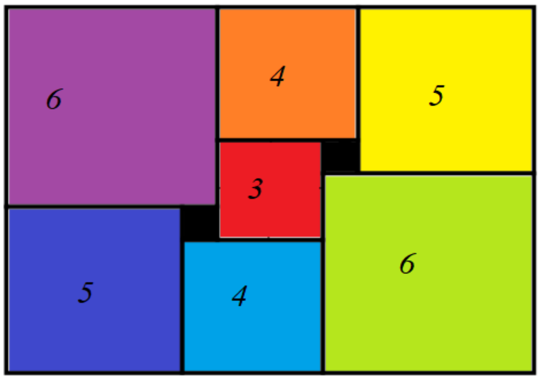
- verticalement : 9+8+15=32 (ou 14+18=32).
- Horizontalement : 9+10+14=33 (ou 15+18=33).

Cet assemblage de carrés a été trouvé par le mathématicien polonais Zbigniew Moroń (1904-1971) en 1925. Outre ce rectangle de 32 sur 33 découpé en 9 carrés, Moroń en a trouvé un autre de 65 sur 47 découpé en 10 carrés. Le premier, celui de notre DM, est le plus petit rectangle divisible en carrés tous différents, sans formation d'un rectangle interne. C'est aussi le plus petit rectangle carrelé, et il est *presque* carré.

b) Même question avec le rectangle ci-contre (au-dessous du premier) qui contient deux petits carrés identiques (en noir) dont on peut estimer le côté à 1. Le carré rouge est toujours celui dont le côté est noté x.

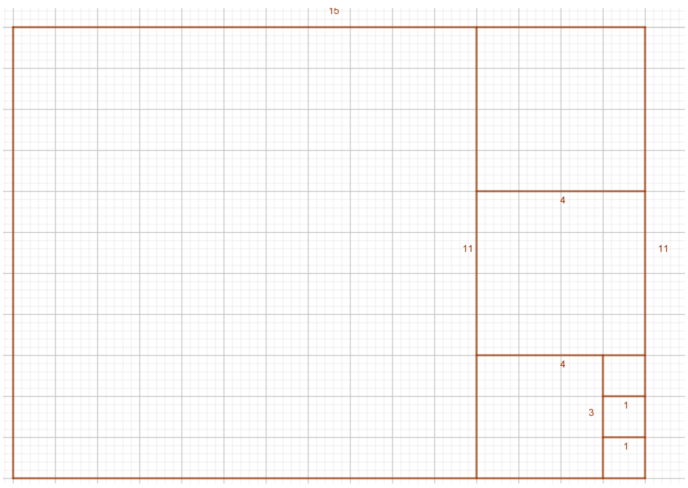


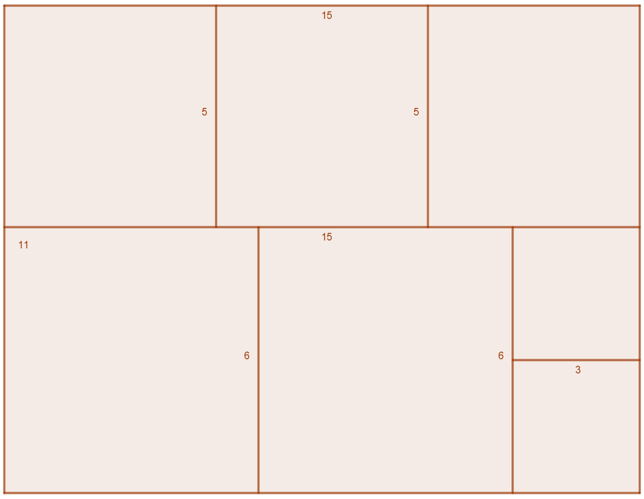
Ce pavage est plus simple, et il a un centre de symétrie. J'ai commencé par écrire les dimensions de chaque carrés en partant du côté du rouge (x) et du noir (1). Je trouve une équation à résoudre en écrivant de deux façons la hauteur du rectangle : $2x+5$ ou $3x+2$. Comme ces deux expressions doivent être égales on obtient $x=3$ (voir à droite).
On en déduit les dimensions des carrés : 1, 3, 4, 5 et 6 (seul le carré de côté 3 est en un seul exemplaire, les 4 autres dimensions sont représentées deux fois).
Le rectangle mesure donc 11 (en hauteur) sur 15 (en largeur).



c) Ces pavages ont été proposés dans le cadre du problème : « paver un rectangle avec un minimum de carrés ». Avec les dimensions déterminées du dernier rectangle, proposer un autre pavage avec des carrés (pas forcément tous différents) de façon à avoir moins de neuf carrés.
On peut essayer la méthode de la division euclidienne : on enlève le plus grand carré possible (son côté est 11), ensuite, dans le restant, on enlève 2 carrés de 4 de côtés. Il reste un rectangle de 4 sur 3 : on enlève un carré de côté 3 et il reste 3 carrés de côtés 1. Cela fait 7 carrés en tout, de 4 dimensions différentes (voir ci-dessous à gauche).
Peut-on trouver mieux, c'est à dire découper le rectangle 15 sur 11 en moins de 7 carrés ?
Il y a peu de chance... mais c'est difficile de prouver qu'on n'y arrivera pas.

On peut aussi proposer d'autre solution comme cette 2ème dissection, à droite, qui conduit aussi à 7 carrés, de 3 dimensions différentes. La méthode ici est plus arbitraire mais elle est correcte.





3) <u>Sommes de l'année</u>

a) Trouver sept nombres entiers consécutifs (entiers qui se suivent) dont la somme est 2023.

En notant x le plus petit de ces entiers, le suivant est $x+1$, celui d'après $x+2$, etc.
La somme s'écrit $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)=2023$.
En réduisant le membre de gauche on obtient : $7x+1+2+3+4+5+6=2023$.
On arrive à l'équation $7x+21=2023$ qui équivaut à $7x=2023-21=2002$ d'où le résultat $x=2002\div 7=286$. Les sept entiers consécutifs cherchés sont donc 286, 287, 288, 289, 290, 291 et 292.

b) Trouver sept nombres impairs consécutifs comme 1, 3, 5, … (nombres qui peuvent s'écrire $2k+1$ où k est un entier quelconque) dont la somme est 2023.

En notant x le plus petit de ces entiers, le suivant est $x+2$, celui d'après $x+4$, etc.
La somme s'écrit $x+(x+2)+(x+4)+(x+6)+(x+8)+(x+10)+(x+12)=2023$.
En réduisant le membre de gauche on obtient : $7x+2+4+6+8+10+12=2023$.
On arrive à l'équation $7x+42=2023$ qui équivaut à $7x=2023-42=1981$ d'où le résultat $x=1981\div 7=283$.
Les sept entiers consécutifs cherchés sont donc 283, 285, 287, 289, 291, 293 et 295.
Vérifions que ces nombres sont impairs, consécutifs et que leur somme fait 2023 :

- $283=2\times141+1$ est impair, les suivants aussi $285=2\times142+1$, $287=2\times143+1$, $289=2\times144+1$, etc.
- $283+285+287+289+291+293+295=2023$; la somme est correcte.

c) Trouver sept multiples de 3 plus 1 consécutifs comme 1, 4, 7, … (nombres qui peuvent s'écrire $3k+1$ où k est un entier quelconque) dont la somme est 2023.

En notant x le plus petit de ces entiers, le suivant est $x+3$, celui d'après $x+6$, etc.
La somme s'écrit $x+(x+3)+(x+6)+(x+9)+(x+12)+(x+15)+(x+18)=2023$.
En réduisant le membre de gauche on obtient : $7x+3+6+9+12+15+18=2023$.
On arrive à l'équation $7x+63=2023$ qui équivaut à $7x=2023-63=1960$ d'où le résultat $x=1960\div 7=280$.
Les sept entiers consécutifs cherchés sont donc 280, 283, 286, 289, 292, 295 et 298.
Vérifions que ces nombres sont des multiples de 3 plus 1, consécutifs et que leur somme fait 2023 :

- $280=3\times93+1$ est multiple de 3 plus 1, les suivants aussi $285=3\times94+1$, $287=3\times95+1$, $289=3\times96+1$, etc.
- $280+283+286+289+292+295+298=2023$; la somme est correcte.

d) Trouver sept multiples de 4 plus 1 consécutifs comme 1, 5, 9, … (nombres qui peuvent s'écrire $4k+1$ où k est un entier quelconque) dont la somme est 2023.

En notant x le plus petit de ces entiers, le suivant est $x+4$, celui d'après $x+8$, etc.
La somme s'écrit $x+(x+4)+(x+8)+(x+12)+(x+16)+(x+20)+(x+24)=2023$.
En réduisant le membre de gauche on obtient : $7x+4+8+12+16+20+24=2023$.
On arrive à l'équation $7x+84=2023$ qui équivaut à $7x=2023-84=1939$ d'où le résultat $x=1939\div 7=277$.
Les sept entiers consécutifs cherchés sont donc 277, 281, 285, 289, 293, 298 et 302.
Vérifions que ces nombres sont des multiples de 4 plus 1, consécutifs et que leur somme fait 2023 :

- $277=4\times69+1$ est multiple de 4 plus 1, les suivants aussi $281=4\times70+1$, $285=4\times71+1$, $289=4\times72+1$, etc.
- $277+281+285+289+293+298+302=2023$; la somme est correcte.

e) Sur le même modèle, trouver sept multiples de $a>4$ plus 1 consécutifs comme 1, $1+a$, $1+2a$, … (nombres qui peuvent s'écrire $ak+1$ où k est un entier quelconque et a un entier invariable supérieur à 4) dont la somme est 2023.

Logiquement, on pense à des multiples de 5 plus 1 consécutifs.
En notant x le plus petit de ces entiers, le suivant est $x+5$, celui d'après $x+10$, etc.
La somme s'écrit $x+(x+5)+(x+10)+(x+15)+(x+20)+(x+25)+(x+30)=2023$.
En réduisant le membre de gauche on obtient : $7x+5+10+15+20+25+30=2023$.
On arrive à l'équation $7x+105=2023$ qui équivaut à $7x=2023-105=1918$ d'où le résultat $x=1918\div 7=274$. Les sept entiers consécutifs cherchés sont donc 274, 279, 284, 289, 294, 299 et 304.
Vérifions que ces nombres sont des multiples de 5 plus 1, consécutifs et que leur somme fait 2023 :

- $274=5\times 54+4$ est multiple de 5 plus **4**, les suivants aussi $279=5\times 55+4$, $284=5\times 56+4$, $289=5\times 57+4$, etc.
- $274+279+284+289+294+299+304=2023$; la somme est correcte.

Conclusion : sept multiples de 5 plus 4 consécutifs ont pour somme 2023 (274, 279, 284, 289, 294, 299 et 304) mais on voulait des nombres de la forme $ak+1$. Pour répondre à la question de l'énoncé, il faut prendre $a=6$ et non 5 car sept multiples de 6 plus 1 consécutifs ont pour somme 2023 (271, 277, 283, 289, 295, 301 et 307).

Noter que deux multiples de 5 plus 4 consécutifs ont également pour somme 2023 (1009 et 1014).
De même, deux multiples de 4 plus 2 consécutifs ont également pour somme 2023 (1010 et 1013).
On peut résumer :

- sept entiers consécutifs ont pour somme 2023 (286, 287, 288, 289, 290, 291 et 292)
- sept multiples de 2 plus 1 consécutifs ont pour somme 2023 (283, 285, 287, 289, 291, 293 et 295)
- sept multiples de 3 plus 1 consécutifs ont pour somme 2023 (280, 283, 286, 289, 292, 295 et 298)
- sept multiples de 4 plus 1 consécutifs ont pour somme 2023 (277, 281, 285, 289, 293, 298 et 302)
- sept multiples de 5 plus **4** consécutifs ont pour somme 2023 (274, 279, 284, 289, 294, 299 et 304)
- sept multiples de 6 plus 1 consécutifs ont pour somme 2023 (271, 277, 283, 289, 295, 301 et 307)
- sept multiples de 7 plus **2** consécutifs ont pour somme 2023 (268, 275, 282, 289, 296, 303 et 310)
- sept multiples de 8 plus 1 consécutifs ont pour somme 2023 (265, 273, 281, 289, 297, 305 et 313)

Dans ces huit sommes on constate le nombre 289 ; les trois nombres supérieurs à 289 sont, en quelques sortes, symétriques des trois qui lui sont inférieurs, avec un écart constant, noté a dans l'énoncé.
Ainsi il suffit de connaître le reste de la division euclidienne de 289 par a pour savoir si les sept nombres sont du type $ak+1$ ou $ak+2$ ou $ak+3$ .... Voici les restes de la division euclidienne de 289 par les premiers entiers :

diviseur	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
reste	1	1	1	4	1	2	1	1	9	3	1	3	9	4	1	0	1	4	9	16	3	13

Pour répondre à la question, il fallait donc choisir le nombre a parmi les valeurs suivantes :

6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 72, 96, 144, etc.

Si on ne veut que des nombres positifs, il faut se limiter à $a=72$ (les nombres dont la somme est 2023 sont 73, 145, 217, 289, 361, 433, 505, 577). Il y avait donc onze possibilités : 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48 et 72.