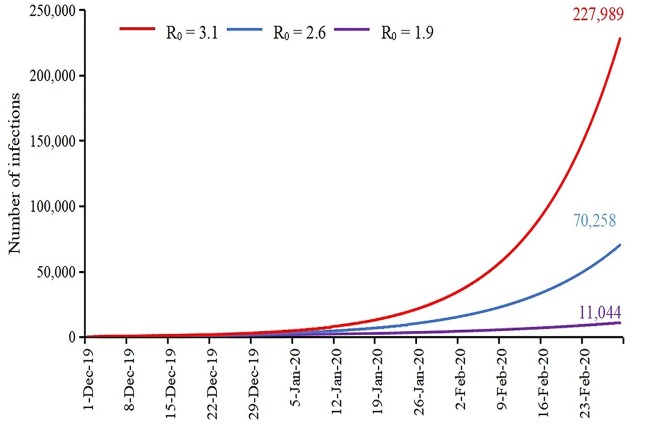
CORRECTION

On parle d'un phénomène à croissance exponentielle lorsque la croissance en valeur absolue de la population est proportionnelle à la population existante. Une croissance de 10 % par an signifie qu'une population initiale de P individus est multipliée par 1,1 en un an (car $P+\frac{10}{100}\times P=\left(1+\frac{10}{100}\right)\times P=1{,}1\times P$).

Ainsi, une population initiale de 100 individus passe :

- au bout de 1 an à $100\times1{,}1=110$ individus.
- au bout de 2 ans à $110\times1{,}1=100\times1{,}1^2=121$ individus.
- au bout de n ans à $100\times1{,}1^n$ individus.

Les phénomènes à croissance exponentielle font parfois peur et on parle d'*explosion exponentielle* car la taille de la population augmente de plus en plus vite. Le nombre de malades du covid-19 lors de la phase d'expansion de la pandémie de 2020 suivait ce type de croissance car le R_0[1] était supérieur à 1. L'illustration montre la croissance de la population infectée à Wuhan (Chine) selon diverses hypothèses sur le R_0.



1) Croissance exponentielle

a) Calculer le nombre d'individus d'une population initiale de 100 individus qui a une croissance de 10 % par an au bout de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ans.

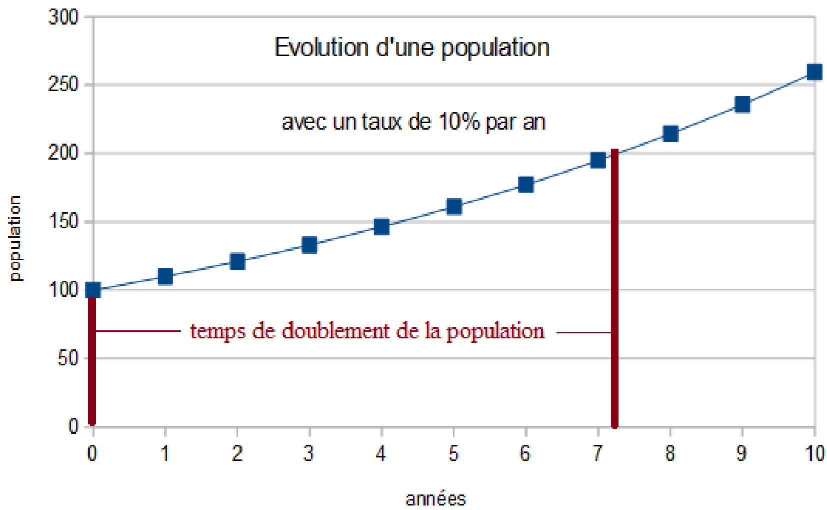
La formule de l'énoncé permet de répondre : on a $P(n)=P(0)\times1{,}1^n$ où $P(n)$ et $P(0)$ sont les populations au bout de, respectivement, n années et 0 années. La population $P(0)$ est appelée *population initiale* et vaut ici 100. Mais le plus simple ici est d'utiliser le tableur avec la formule simplifiée : $P(n+1)=P(n)\times1{,}1$

n	P(n)
0	100
1	110
2	121
3	133
4	146
5	161
6	177
7	195
8	214
9	236
10	259

Pour obtenir ce résultat avec un tableur, il suffit de multiplier la population d'une ligne par 1,1 pour trouver la population de la ligne suivante. Bien sûr, il faut arrondir le résultat car dès la 3ème année (car 10% de 121 cela fait 12,1 individus), on voit apparaître des fractions d'individus, ce qui ne se peut pas. J'ai donc arrondi les résultat du calcul à l'entier le plus proche.

Représenter cette croissance sur un graphique avec le temps en abscisse et la population en ordonnée.

Voir ci-contre. Ce graphique ayant été fait avec les données du tableur (cliquer sur l'assistant graphique après avoir sélectionné les deux colonnes de données).



D'après votre graphique, déterminer le temps T de doublement : le nombre approximatif d'années (un nombre pas forcément entier) pour que la population double.

On lit sur ce graphique qu'il faut un peu plus

1 R_0 : TAUX DE REPRODUCTION DE BASE (d'une maladie) : nombre moyen de cas secondaires provoqués par un sujet atteint d'une maladie transmissible au sein d'une population entièrement réceptive (R_0=2 pour la grippe, 15 pour la rougeole).

de 7 années pour que la population double.

Que deviendrait cette population au bout de 100 ans, de 1000 ans, de 10000 ans, si rien ne s'oppose à cette croissance exponentielle ?

Plutôt que d'étirer ma formule sur le tableur jusqu'à 10000 (trop long) je vais, ici, directement calculer :

$P(100)=100\times 1{,}1^{100}=1378061$

$P(1000)=100\times 1{,}1^{1000}=2{,}46993291800603\times 10^{43}$

J'ai fait ce calcul avec le tableur (voir ci-dessous) mais on peut utiliser une calculatrice. Le résultat pour 1000 ans est trop grand pour être affiché sous la forme décimale sur la calculatrice mais le tableur accepte cette valeur.

100	1378061
1000	24699329180060300000000000000000000000000000
10000	#NUM !

Par contre, pour 10000 ans ni la calculatrice ni le tableur n'acceptent de donner un résultat qui dépasse la capacité de calcul de ces outils. Pourtant, ce nombre est calculable :

$P(10000)=100\times 1{,}1^{10000}=100\times (1{,}1^{1000})^{10}\approx 100\times (2{,}47\times 10^{41})^{10}=100\times 2{,}47^{10}\times 10^{410}=845219{,}5\times 10^{410}$.

C'est un nombre à 416 chiffres. Donc un très grand nombre. Ce résultat mathématique n'a bien sûr aucun intérêt pratique car la population infectée par le virus ne va pas croitre de 10% par an pendant 10 000 ans, cela n'a pas de sens.

Le seul intérêt de ma question était de faire observer qu'une croissance exponentielle dépasse toute mesure très rapidement. Même une croissance avec un taux faible. 10% par an, c'est relativement important, on a vu que la population double tous les 7 ans environ. Examinons maintenant le cas d'une population qui croit avec un taux 10 fois plus faible.

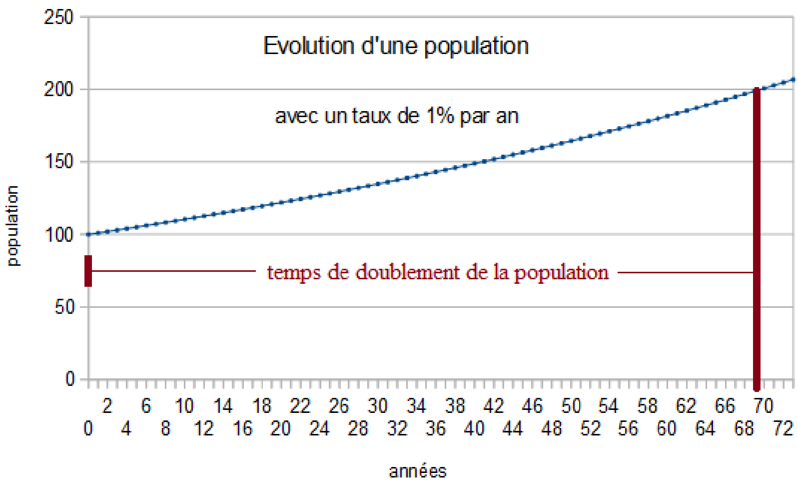
b) Reprendre les questions précédentes pour une population qui a une croissance de 1 % par an.

NB : cette question n'était pas donnée dans le DM.

La formule de l'énoncé devient $P(n)=P(0)\times 1{,}01^n$ car une augmentation de 1% par an donne, pour une population P au bout de 1 an : $P+\frac{1}{100}\times P=(1+\frac{1}{100})\times P=1{,}01\times P$.

Je modifie en conséquence ma feuille de calcul sur le tableur :

n	P(n)
0	100
1	101
2	102
3	103
4	104
5	105
6	106
7	107
8	108
9	109
10	110



Pour le graphique, si je veux qu'il me donne le temps de doublement, je dois pousser les calculs beaucoup plus loin, car après 10 ans, la population n'a augmenté que de 10% (on cherche quand elle a augmenté de 100%).

Il me faut aller jusqu'à environ 70 ans pour obtenir le doublement car :

$$P(69)\approx 198{,}69<200 \quad \text{et} \quad P(70)\approx 200{,}68>200$$

Pour 100,1000 et 10000 ans, on trouve des valeurs calculables (par contre pour 100000 ans, cela ne l'est plus) :

100	270
1000	2,10E+006
10000	1,64E+045
100000	#NUM !

100

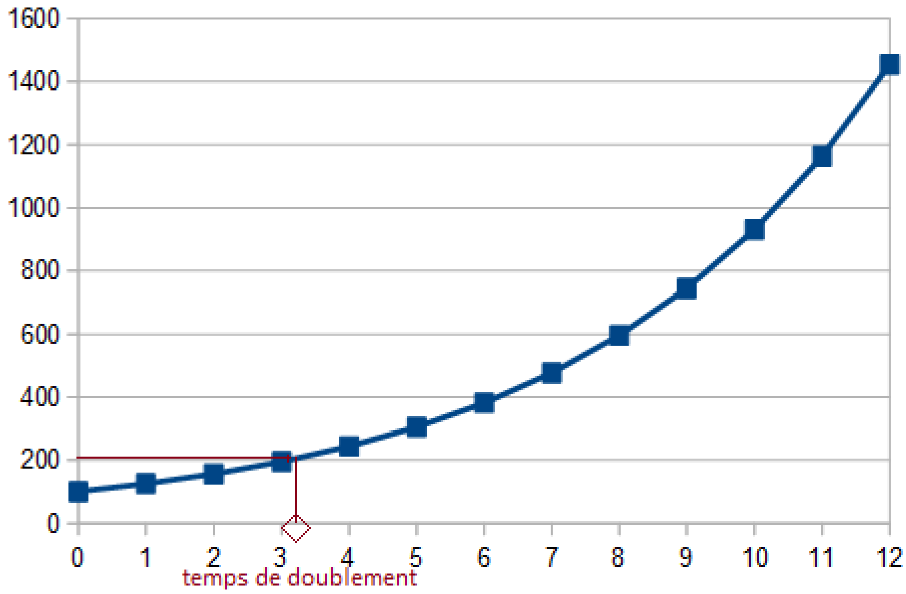
La conclusion de cet essai : lors d'un phénomène à croissance exponentielle, même avec un taux faible, on arrive toujours à dépasser toute limite raisonnable. On pourrait refaire la série de calculs précédents avec un taux de 0,1% ou même 0,001%, les chiffres deviennent toujours trop grand au bout d'une certaine période.

Par contre, il fallait traiter le cas d'une croissance avec un taux de 25%.

Reprendre les questions précédentes pour une population qui a une croissance de 25 % par an.

La formule de l'énoncé devient $P(n)=P(0)\times 1{,}25^n$ car une augmentation de 25% par an donne, pour une population P au bout de 1 an : $P+\frac{25}{100}\times P=\left(1+\frac{25}{100}\right)\times P=1{,}25\times P$.
Je modifie en conséquence ma feuille de calcul sur le tableur :

n	P(n)
0	100
1	125
2	156
3	195
4	244
5	305
6	381
7	477
8	596
9	745
10	931
11	1164
12	1455



Graphiquement, le temps de doublementest un peu supérieur à 3,1 ans.

$P(3)=195<200$ et $P(4)=244>200$

$P(3{,}1)\approx 199{,}7197622194<200$ (vous allez me dire, et vous auriez raison que l'on ne sait pas comment calculer $1{,}25^{3,1}$ mais la calculatrice, elle, sait!)

Pour 100 et 1000 ans, on trouve des valeurs calculables à la calculatrice :

100	4,9091E+011
1000	8,13E+098
10000	#NUM !
100000	#NUM !

Par contre, pour 10000 et 100000 ans, il faut recourir aux propriétés des puissances :
$P(10000)=100\times 1{,}25^{10000}=100\times(1{,}25^{1000})^{10}\approx 100\times(8{,}13\times 10^{98})^{10}=100\times 1261552870\times 10^{980}\approx 1{,}26\times 10^{991}$.
C'est un nombre à 992 chiffres. On peut faire de même pour $P(100000)$.
Lors d'un phénomène à croissance exponentielle, on arrive toujours à dépasser toute limite raisonnable.

c) Pour le Covid, la méthode d'évaluation du R_0 influence sa valeur: à partir des données de dépistage en France début décembre 2020, nous avons un R_0 de 1,24, mais selon les données d'hospitalisation Covid, il est de 1,09. À partir du moment où R_0 est supérieur à 1, nous sommes en croissance exponentielle, mais celle-ci peut être très lente. Le qualificatif « exponentiel » renvoie à la forme de la progression et non à une vitesse. Le coefficient R_0 ne capture pas la dimension temporelle de l'épidémie. Pour cela, il vaut mieux parler du temps de doublement, qui correspond au nombre de jours pour que l'épidémie double en taille et qui est très lié au R_0. Le temps de doublement en France, le 8 novembre 2020 était de 1 mois. Sachant qu'à cette date la population infectée s'élevait à environ 2 millions de personnes, déterminer le nombre de personnes infectées après 1 mois, 2 mois, 3 mois, 6 mois, 1 an, si ce temps de doublement restait constant (ce qui n'est pas le cas, heureusement).

Avec un temps de doublement de 1 mois, la population infectée $P(n)$ au bout de n mois est égale à $P(n)=P(0)\times 2^n$ où $P(0)$ est la population au bout de 0 mois, appelée *population initiale* et vaut ici 2 millions, soit $P(0)=2\times 10^6$. Voici donc la formule utilisable pour répondre à la question :

$$P(n)=2\times 10^6\times 2^n=2^{n+1}\times 10^6 .$$

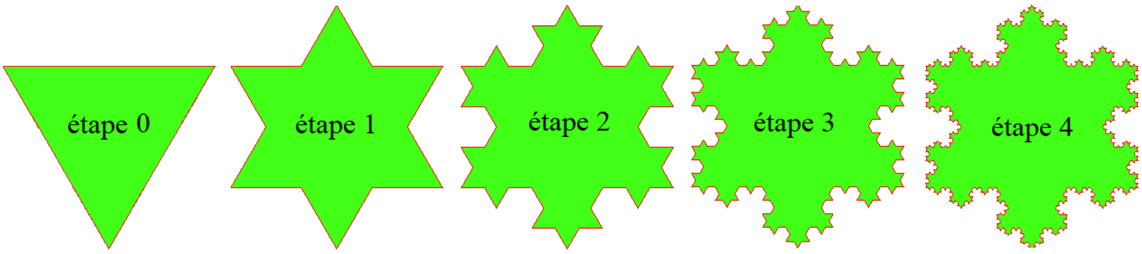
Sinon, avec un tableur, il suffit de multiplier par 2 entre deux mois successifs.
On constate donc que ce taux de croissance n'est pas possible sur un an car il conduirait à une population française infectée de 8192 millions ! Plus de 100 fois la population française ! Ces chiffres font peur à tous les décideurs car une croissance exponentielle conduit inévitablement, au bout d'un certain temps (ici très court), à dépasser la population totale.
De nombreux phénomènes s'opposent à la croissance exponentielle, même lorsque celle-ci est ponctuellement constatée. Pour prendre un autre exemple que

n	P(n)
0	2000000
1	4000000
2	8000000
3	16000000
4	32000000
5	64000000
6	128000000
7	256000000
8	512000000
9	1024000000
10	2048000000
11	4096000000
12	8192000000

la population infectée par le virus, observez la croissance d 'un jeune enfant : sa taille ou son poids peuvent augmenter de 10% en un an, passant de 100 cm à 110 cm par exemple, mais on sait bien qu'au bout de 10 ans il ne mesurera jamais 259 cm...

2) Fractale

L'étoile de l'étape 1 a été obtenue à partir d'un triangle équilatéral de côté 3 cm (étape 0). D'une étape à l'autre, on découpe chaque côté en 3 parties égales et on remplace la partie centrale par le petit triangle équilatéral tourné vers l'extérieur que l'on peut construire dessus.



a) Déterminer la longueur d'un côté de la figure à chacune des étapes de la construction (entre 0 à 4) ainsi que le nombre de côtés. En déduire la longueur totale de la courbe à chacune des cinq étapes.

Longueur et nombre des côtés de la figure :

étape 0 : le côté mesure 3 cm (dans l'énoncé : triangle équilatéral de côté 3 cm) ; il y a 3 côtés dans un triangle.

étape 1 : le côté mesure $3\div3=1$ cm (dans l'énoncé : on découpe chaque côté en 3 parties égales) ; il y a 4 nouveaux côtés à la place d'un ancien côté, donc il y a $3\times4=12$ côtés dans la figure.

étape 2 : le côté mesure $1\div3=\frac{1}{3}$ cm (on découpe toujours chaque côté en 3 parties égales) ; il y a toujours 4 nouveaux côtés à la place d'un ancien côté, donc il y a $12\times4=48$ côtés dans la figure.

étape 3 : le côté mesure $\frac{1}{3}\div3=\frac{1}{9}$ cm ; il y a $48\times4=192$ côtés dans la figure.

étape 4 : le côté mesure $\frac{1}{9}\div3=\frac{1}{27}$ cm ; il y a $192\times4=768$ côtés dans la figure.

Remarquez le côté répétitif de ces opérations : on divise par 3 la longueur d'un côté à chaque étape et on multiplie par 4 le nombre de côtés. On a donc intérêt à utiliser un tableur pour faire ces calculs.

La longueur de la courbe est le produit du nombre de côtés par leur longueur, on obtient donc :
Longueur totale de la courbe à l'étape 0 = 3×3 = 9cm.
Longueur totale de la courbe à l'étape 1 = 1×12 = 12cm.
Longueur totale de la courbe à l'étape 2 = $\frac{1}{3}\times48=\frac{48}{3}=16$ cm.
Longueur totale de la courbe à l'étape 3 = $\frac{1}{9}\times192=\frac{192}{9}=\frac{64}{3}\approx21{,}3$ cm.
Longueur totale de la courbe à l'étape 4 = $\frac{1}{27}\times768=\frac{768}{27}=\frac{256}{9}\approx28{,}4$ cm.

b) Déterminer le facteur multiplicatif à appliquer à la longueur de la courbe entre une étape et la suivante.
En déduire la longueur totale de la courbe aux étapes 5, 10, 100 et 1000. Combien d'étapes faut-il pour que la courbe double de longueur ? Représenter graphiquement l'évolution de la longueur selon le nombre d'étapes.

Comme on divise par 3 la longueur d'un côté et qu'on multiplie par 4 le nombre de côtés, la longueur totale est multipliée à chaque étape par $\frac{4}{3}$.

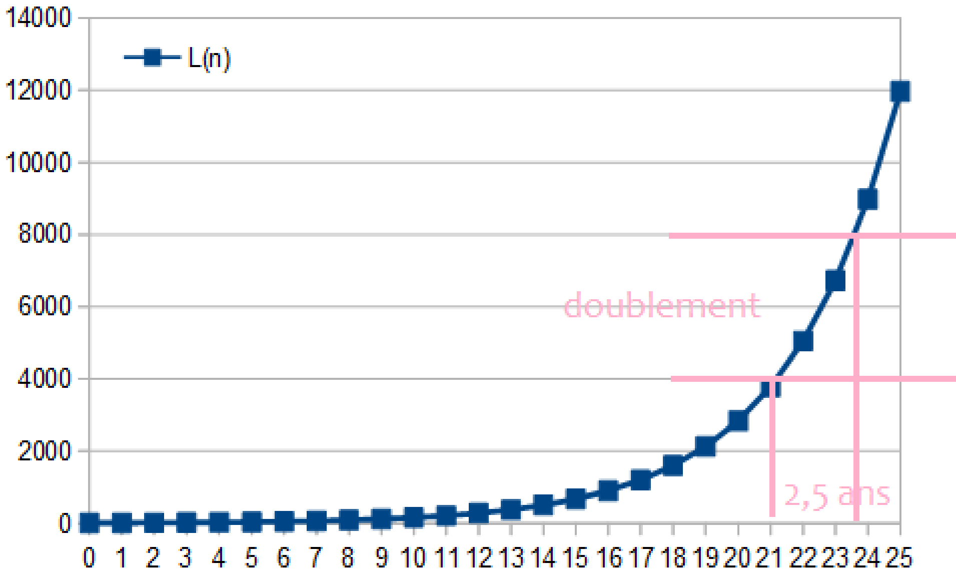
Je reprends ma feuille de calcul en mettant ce coefficient multiplicatif entre chaque ligne (voir ci-contre).

n	L(n)
0	9
1	12
2	16
3	21
4	28
5	38
6	51
7	67
8	90
9	120
10	160
11	213
12	284
13	379
14	505
15	673
16	898
17	1197
18	1596
19	2129
20	2838
97	11838589463758
98	15784785951678
99	21046381268904
100	28061841691872
101	37415788922495
102	49887718563327
103	66516958084436
199	65622246594971400000000000
200	87496328793295200000000000
201	116661771724394000000000000

La longueur totale de la courbe :

- à l'étape 5 : 38,
- à l'étape 10 : 160
- à l'étape 100 : 28061841691872cm, environ 280 millions de km (presque 2 fois la distance Terre-Soleil !)

Nous voilà encore ici devant un processus à croissance exponentielle : la longueur totale de la courbe est multipliée par $\frac{4}{3}$ ce qui signifie qu'à chaque étape, elle augmente de 33% environ. La courbe a une longueur qui devient aussi grande que l'on veut. Mathématiquement il n'y a pas de limite à cette croissance comme dans le cas d'un phénomène naturel (population, taille ou poids). Le temps de doublement a été représenté sur la courbe ci-dessous ; mais on peut le calculer en résolvant l'équation $\left(\frac{4}{3}\right)^n=2$ ce que l'on ne sait pas faire en



4ème (il faut utiliser la fonction logarithme) mais on peut s'en approcher puisque $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}\approx 1{,}8$ et $\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}\approx 2{,}4$, on se doute que ce temps est situé entre 2 et 3 (la valeur exacte est 2,40942084...).

c) Quel est le facteur multiplicatif entre l'aire de la figure à l'étape 0 et l'aire de la figure à l'étape 1 ?
Est-ce le même facteur multiplicatif quand on passe de l'étape 1 à l'étape 2 ? La croissance de l'aire de l'étoile, d'une étape à l'autre, est-elle exponentielle (comme celle de son périmètre) ?
Aire de la figure :
<u>étape 0</u> : le côté mesurant 3 cm l'aire est égale à $\frac{9\times\sqrt{3}}{4}\approx 3{,}9$ cm², mais on va noter cette aire A_0 (on n'a pas besoin de connaître cette valeur ici).
<u>étape 1</u> : observons la figure de l'étape 1 : elle est obtenue à partir de l'étape 0 en ajoutant 3 triangles 3 fois plus petits que le triangle initial. Il y a 9 triangles 3 fois plus petits dans le triangle initial, il y en a donc 9+3=12 dans la figure 1. L'aire de la figure 1, A_1, est donc égale à $\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ de A_0.

<u>étape 2</u> : observons la figure de l'étape 2 : elle est obtenue à partir de l'étape 1 en ajoutant 12 triangles 3 fois plus petits que les petits triangles de l'étape 1. Il y a 12×9=108 triangles 3 fois plus petits que les petits triangles de l'étape 1 dans la figure de l'étape 1, il y en a donc 108+12=120 dans la figure 2. L'aire de la figure 2 est donc égale à $\frac{120}{108}=\frac{10}{9}$ de A_1, soit $\frac{4}{3}\times\frac{10}{9}=\frac{40}{27}\approx 1{,}48$ A_0.
Comme le coefficient multiplicatif n'est pas le même ($\frac{10}{9}\neq\frac{4}{3}$), la croissance de l'aire n'est pas exponentielle.
La croissance de l'aire se ralentit : le coefficient multiplicatif est toujours supérieur à 1 donc l'aire augmente toujours, mais cette augmentation est de plus en plus faible. À la limite, si on continue jusqu'à l'infini, l'aire de la figure est limitée alors que son périmètre est infini. On montre, par le calcul, que l'aire limite est égale à $\frac{9}{5}=1{,}8$ fois l'aire initiale A_0.
Cette figure est connue sous le nom de flocon de Koch, du nom du mathématicien[2] qui l'étudia, au début du 20ème siècle.

2 Niels Fabian Helge von Koch, né à Stockholm en 1870, mort en 1924, découvre et étudie cette figure en 1904.