CORRECTION

## 1) Encadrements

Déterminer les valeurs approchées les plus précises possibles pour les nombres A, B, C et D suivants à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur puis donner les encadrements de ces nombres :

- par deux entiers consécutifs
- par deux millièmes consécutifs
- par deux millionièmes consécutifs

$$A=\frac{3-\pi}{2}\ ;\ B=(\sqrt{2}-1)\times(-2)\ ;\ C=23\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{3}\right)\ ;\ D=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$$

(*Indication* : Le nombre √2[1] vaut environ 1,414213562. Si j'écris des *encadrements*, je peux affirmer que : $-2<-\sqrt{2}<-1$ ; $-1{,}415<-\sqrt{2}<-1{,}414$ ; $-1{,}414214<-\sqrt{2}<-1{,}414213$)

Ma calculatrice me donne les valeurs approchées suivantes :

$A=\frac{3-\pi}{2}\approx--0{,}07079632679$ (A est irrationnel du fait de la présence de $\pi$)

$B=(\sqrt{2}-1)\times(-2)\approx-0{,}8284271247$ (B est irrationnel du fait de la présence de $\sqrt{2}$ )

$C=23\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{3}\right)=\frac{-322}{51}\approx-6{,}31372549$ (C est rationnel, son écriture contient une séquence de 16 chiffres qui se répète 3137254901960784, cela n'étant pas donné par la calculatrice)

$D=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{-533}{840}\approx-0{,}6345238095$ (D est rationnel, son écriture contient une séquence de 6 chiffres seulement qui se répète 523809 mais qui ne commence pas juste après la virgule)

J'en déduis les encadrements demandés :

| par deux entiers consécutifs | par deux millièmes consécutifs | par deux millionièmes consécutifs |
|---|---|---|
| $-1<A<0$ | $-0{,}071<A<-0{,}070$ | $-0{,}070797<A<-0{,}070796$ |
| $-1<B<0$ | $-0{,}829<B<-0{,}828$ | $-0{,}828428<B<-0{,}828427$ |
| $-7<C<-6$ | $-6{,}314<C<-6{,}313$ | $-6{,}313726<C<-6{,}313725$ |
| $-1<D<0$ | $-0{,}635<D<-0{,}634$ | $-0{,}634524<D<-0{,}634523$ |

## 2) Division euclidienne

On peut étendre la division euclidienne aux nombres négatifs. Le dividende $a$ peut être un négatif, de même que le diviseur $b$. Dans tous les cas, il existe un couple *unique* d'entiers $(q\ ;\ r)$ tels que :

$a = bq + r$ et $0 \le r < b$ (le reste $r$ dans la division euclidienne de $a$ par $b$ est toujours positif)

Effectuer les divisions euclidiennes de −57 par 5, de −1789 par 123 puis de −57 par −5, de −1789 par −123.
(*Indication* : pour la première, effectuer la division euclidienne de 57 par 5 puis changer les signes des deux membres, et enfin écrire le reste négatif sous la forme $r = r'-5$ puis mettre 5 en facteur)

Division euclidienne de −57 par 5 :

Commençons par la division euclidienne de 57 par 5 : $57 = 5\times11+2$
(le reste 2 est bien inférieur au diviseur $0 \le 2 < 5$)
Changeons les signes des deux membres : $-57 = -(5\times11+2) = 5\times(-11)-2$
Le reste négatif est −2 ; on va l'écrire sous la forme $-2 = 3 - 5$
Metons alors 5 en facteur : $-57 = 5\times(-11)+3 - 5 = 5\times(-11-1)+3 = 5\times(-12)+3$
Finalement le quotient $q$ est −12 et le reste $r$ est 3.

Division euclidienne de −1789 par 123 :

Commençons par la division euclidienne de 1789 par 123 : $1789 = 123\times14+67$
(le reste 67 est bien inférieur au diviseur $0 \le 67 < 123$)
Changeons les signes des deux membres : $-1789 = -(123\times14+67) = 123\times(-14)-67$
Le reste négatif est −67 ; on va l'écrire sous la forme $-67 = 56 - 123$
Metons alors 123 en facteur : $-1789 = 123\times(-14)+56 - 123 = 123\times(-14-1)+56 = 123\times(-15)+56$
Finalement le quotient $q$ est −15 et le reste $r$ est 56.

1 Le nombre noté √2 est la racine carrée de 2, c'est-à-dire le nombre qui, multiplié par lui-même, donne 2.
Pour en trouver la valeur décimale sur certaines calculatrices de collège, on tape : « seconde », $x^2$, EXE puis S⇔D.

Division euclidienne de $-57$ par $-5$ :

Commençons par la division euclidienne de 57 par 5 : $57 = 5\times11+2$

Changeons les signes des deux membres : $-57 = -(5\times11+2) = (-5)\times11-2$

Le reste négatif est $-2$ ; on va l'écrire sous la forme $-2 = 3 - 5$

Metons alors $(-5)$ en facteur : $-57 = (-5)\times11+3 - 5 = (-5)\times(11+1)+3 = (-5)\times(12)+3$

Finalement le quotient $q$ est 12 et le reste $r$ est 3.

Division euclidienne de $-1789$ par $-123$ :

Commençons par la division euclidienne de 1789 par 123 : $1789 = 123\times14+67$

Changeons les signes des deux membres : $-1789 = -(123\times14+67) = (-123)\times14-67$

Le reste négatif est $-67$ ; on va l'écrire sous la forme $-67 = 56 - 123$

Metons alors $(-123)$ en facteur : $-1789 = (-123)\times(14+1)+56 = (-123)\times15+56$

Finalement le quotient $q$ est 15 et le reste $r$ est 56.

## 3) Approximations rationnelles de φ (lettre grecque qui se prononce *phi*)

a) Transformer successivement les nombres *a, b, c, d* et *e* suivants pour les mettre sous la forme de fractions irréductibles :

$$a=1+\frac{1}{1} \quad b=1+\frac{1}{a} \quad c=1+\frac{1}{b} \quad d=1+\frac{1}{c} \quad e=1+\frac{1}{d}$$

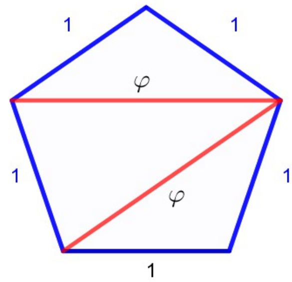
En continuant selon le même principe, on s'approche de plus en plus d'un nombre irrationnel célèbre : le *nombre d'or* dont la valeur est $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\sqrt{5}$ est la *racine carrée* de 5).

Ce nombre mesure, en particulier, la diagonale d'un pentagone régulier de côté 1.

$$a=1+\frac{1}{1}=1+1=2 \qquad b=1+\frac{1}{a}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$c=1+\frac{1}{b}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3} \qquad d=1+\frac{1}{c}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$$

$$e=1+\frac{1}{d}=1+\frac{1}{\frac{8}{5}}=1+\frac{5}{8}=\frac{13}{8}$$




b) Avec la calculatrice, donner la valeur décimale approchée au millionième de φ .

$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}6180339887498948482 04$ (j'ai une très bonne calculatrice puisque j'ai pu écrire 21 chiffres de la partie décimale mais il y en a une infinité, sans répétition, ce qui est le propre des nombres irrationnels)

La valeur décimale approchée au millionième le plus proche de φ est 1,618 034.

Tracer un tableau sur le modèle ci-dessous (une ligne par nombre), puis compléter ce tableau avec :

- les valeurs rationnelles exactes des nombres *a*, *b*, *c*, *d* et *e*.
- les valeurs décimales approchées au millionième le plus proche des nombres *a*, *b*, *c*, *d* et *e*.
- les différences au millionième le plus proche, entre, respectivement *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et φ.

(la différence entre *a* et φ est *a* − φ. Cette différence peut être positive ou négative)

| | Valeur rationnelle exacte | Valeur décimale approchée | Différence avec φ |
|---|---|---|---|
| *a* | 2 | 2 | 0,38 |
| *b* | $\frac{3}{2}$ | 1,5 | – 0,118034 |
| *c* | $\frac{5}{3}$ | 1,666666667 | 0,05 |
| *d* | $\frac{8}{5}$ | 1,6 | – 0,018034 |
| *e* | $\frac{13}{8}$ | 1,625 | 0,01 |

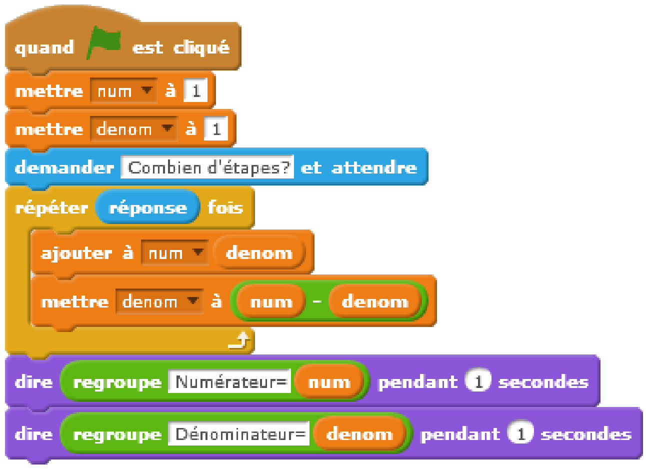
c) Le programme Scratch ci-contre permet de réaliser les calculs de la question a).

Expliquer le fonctionnement de ce programme, en particulier l'instruction :

« mettre denom à num - denom »

Dans les calculs ci-dessus, on remarque que

- le numérateur du nombre suivant est la somme du numérateur et du dénominateur précédent.
- le dénominateur du nombre suivant est le numérateur du nombre précédent.




Cela explique pourquoi on a écrit « *ajouter à num : denom* » cela donne le numérateur du nombre suivant. Pour le dénominateur, on ne peut pas reprendre le numérateur précédent car la valeur de *num* a été changée, donc on enlève à *num* la valeur de *denom* (qui elle n'a pas changée) et le résultat est l'ancien *num* qu'on attribue au nouveau *denom*.

C'est plus facile d'examiner le calcul du nombre suivant $\frac{num}{denom}$ :

$$1+\frac{1}{\frac{num}{denom}}=1+\frac{denom}{num}=\frac{num}{num}+\frac{denom}{num}=\frac{denom+num}{num}$$

Cette formule est exactement ce qu'il faudrait programmer, mais si on met $denom+num$ dans *num* (c'est ce qu'on fait), alors pour retrouver l'ancien *num*, il faut faire le calcul : $num-denom$ ...

On peut commencer par exécuter pas-à-pas ce qui se réalise dans la boucle « répéter » : que contiennent les variables « num » et « denom » après chaque instruction ?

Prenons les calculs étape par étape, pour mieux comprendre comment évolue le contenu des variables :

| | Début | | | Après ligne 1 | | | Après ligne 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | num | denom | S=num+denom | num=S | denom | D=num-denom | num | denom=D |
| Étape 1 | 2 | 1 | 2+1=3 | 3 | 1 | 3-1=2 | 3 | 2 |
| Étape 2 | 3 | 2 | 3+2=5 | 5 | 2 | 5-2=3 | 5 | 3 |
| Étape 3 | 5 | 3 | 5+3=8 | 8 | 3 | 8-3=5 | 8 | 5 |
| Étape 4 | 8 | 5 | 8+5=13 | 13 | 5 | 13-5=8 | 13 | 8 |

On constate donc bien que chaque ligne conduit au bon résultat.