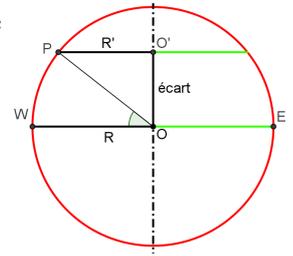


I. La sphère

1) La Terre est assimilée à une sphère de centre O et de rayon 6370 km. Le cercle de centre O passant par W représente l'équateur. Le point P représente la ville de Paris. P est un point de la sphère situé sur le cercle de centre O' tel que l'écart $OO' = 4880$ km. Calculer O'P au km près. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{O'OP}$ au degré près. En déduire la latitude Nord de Paris par rapport à l'équateur, c'est-à-dire l'angle \widehat{POW} .



OPO' est un triangle rectangle, donc d'après le théorème de Pythagore, $O'P^2 = OP^2 - OO'^2$ et donc

$$O'P^2 = 6370^2 - 4880^2 = 16\,762\,500, \text{ d'où } O'P = \sqrt{16\,762\,500} \approx 4094 \text{ km.}$$

$$\cos(\widehat{O'OP}) = \frac{OO'}{OP} = \frac{4880}{6370} \approx 0,766, \text{ d'où } \widehat{O'OP} = \cos^{-1}\left(\frac{4880}{6370}\right) \approx 40^\circ.$$

La latitude Nord de Paris par rapport à l'équateur, \widehat{POW} , est égale au complément à 90° de $\widehat{O'OP}$ car cet angle et \widehat{POW} sont adjacents et complémentaires. Donc $\widehat{POW} \approx 90 - 40 = 50^\circ$.

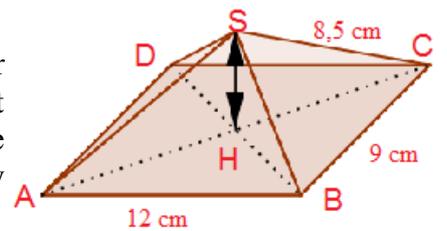
2) Une petite sphère a pour rayon r. Une grande sphère a pour rayon R tel que $R = 3r$. Si on note v le volume de la petite sphère et V le volume de la grande sphère.

Quelle égalité est vraie? $V = 3v$ $V = 9v$ $V = 27v$

NB : cela vient du fait que le coefficient d'augmentation des volumes est k^3 , lorsque les longueurs sont multipliées par k...

II. Autres aires et volumes

1) La pyramide ci-dessus a pour sommet S, pour hauteur [SH] et pour base le rectangle ABCD. Placer S, H, A, B, C et D sur la figure. Sachant que $SA=SB=SC=SD=8,5$ cm, $CD=12$ cm et $BC = 9$ cm, vérifier par le calcul que $HD = 7,5$ cm. Tracer en vraie grandeur le triangle SBD et y placer H. Calculer SH, puis le volume de la pyramide SABCD.



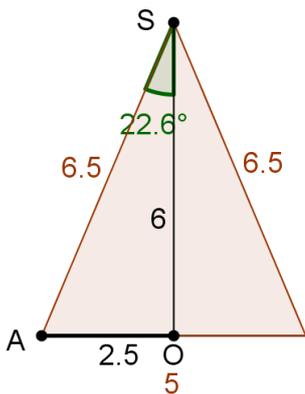
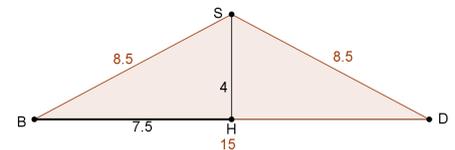
ABD est un triangle rectangle, donc d'après le théorème de Pythagore,

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \text{ et donc } BD^2 = 12^2 + 9^2 = 225, \text{ d'où } BD = \sqrt{225} = 15 \text{ cm.}$$

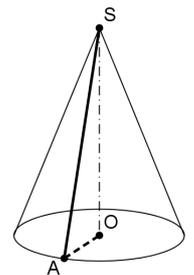
Comme H est le milieu de [BD], $HD = BD \div 2 = 15 \div 2 = 7,5$ cm.

SBH est un triangle rectangle, donc d'après le théorème de Pythagore,

$$SH^2 = SB^2 - BH^2 \text{ et donc } SH^2 = 8,5^2 - 7,5^2 = 16, \text{ d'où } SH = \sqrt{16} = 4 \text{ cm.}$$



2) On considère une bougie conique. Le rayon OA de sa base est 2,5 cm et le segment [SA] mesure 6,5 cm. Quelle est la nature du triangle SAO? Tracer ce triangle, puis montrer que $SO = 6$ cm. Calculer le volume de cire nécessaire pour fabriquer cette bougie, arrondir au dixième de cm^3 . Calculer l'angle \widehat{ASO} au degré près.



Le triangle SAO est un triangle rectangle (car le cône est un cône de révolution). SAO est un triangle rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore, $SO^2 = SA^2 - AO^2$ et donc $SO^2 = 6,5^2 - 2,5^2$

$$= 36, \text{ d'où } SH = \sqrt{36} = 6 \text{ cm. Le volume de la cire nécessaire est égal à}$$

$$\frac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\pi \times AO^2 \times SO}{3} = \frac{\pi \times 2,5^2 \times 6}{3} = 6,25\pi \approx 19,6 \text{ cm}^3.$$

$$\sin(\widehat{ASO}) = \frac{AO}{AS} = \frac{2,5}{6,5} = \frac{5}{13} \approx 0,385 \text{ d'où } \widehat{ASO} = \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) \approx 23^\circ.$$

III. Section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à sa base

1) SABC est une pyramide ayant pour base le triangle ABC et pour hauteur SA.

$AB = 6$ cm ; $BC = SA = 8$ cm ; $AC = 10$ cm. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B. Calculer la longueur BS. Calculer le volume de la pyramide SABC. On appelle I, J et K les milieux respectifs des arêtes [SA], [SB] et [SC]. Calculer le volume de la pyramide SIJK.

$AC^2 = 10^2 = 100$. $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$. Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Pour calculer SB, on va se placer dans le triangle SAB qui est rectangle en A (car SA est une hauteur de la pyramide). SAB étant un triangle rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, $SB^2 = SA^2 + AB^2$ et donc $SB^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, d'où $SB = \sqrt{100} = 10$ cm.

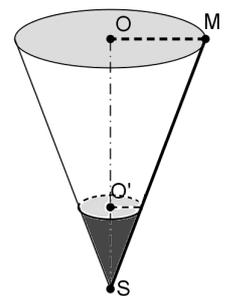
Le volume de la pyramide SABC est égal à $\frac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{(AB \times AC) \times SA}{3} = \frac{6 \times 10 \times 8}{3} = 160 \text{ cm}^3$.

SIJK est une réduction de la pyramide SABC de coefficient $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SB} = \frac{SK}{SC} = \frac{IJ}{AB} = \dots = \frac{1}{2} = 0,5$.

Le volume de SIJK est donc égal à $0,5^3 \times S_{ABC} = 0,125 \times 160 = 20 \text{ cm}^3$.

NB: Ici nous avons fait une figure pour illustrer notre travail, mais dans le sujet de brevet, la figure était donnée... Cela peut être intéressant ici, parce que cette figure n'est pas simple, de dessiner un patron de la pyramide et de la construire.

2) Un cône a pour rayon de base OM = 3 cm et pour hauteur OS = 14 cm. On appelle V, le volume du cône. Montrer que $V = 42\pi \text{ cm}^3$. Dans ce cône, on verse d'abord du chocolat fondu jusqu'au point O', puis on complète avec de la crème glacée à la pistache jusqu'au point O. Le cône formé par le chocolat fondu, de volume V', est une réduction du cône de volume V. Sachant que O'S vaut 3,5 cm, par quel calcul simple passe t'on de OS à O'S? de V à V'? En déduire la valeur de V' en fonction de π . Quel est le pourcentage de chocolat fondu dans ce cône?



Le volume V du cône est égal à $\frac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\pi \times OM^2 \times SO}{3} = \frac{\pi \times 3^2 \times 14}{3} = 42\pi \text{ cm}^3$.

Le cône de chocolat est une réduction du grand cône rempli de glace (de volume V). Le coefficient de réduction des longueurs est $\frac{SO'}{SO} = \frac{O'M'(?)}{OM} = \frac{SM'(?)}{SM} = \frac{3,5}{14} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Le volume V' du petit cône est donc égal à $0,25^3 \times V = 0,015625 \times 42\pi = 0,65625\pi \approx 2 \text{ cm}^3$.

Le pourcentage de chocolat fondu est $\frac{V'}{V} \times 100 = \frac{0,65625\pi}{42\pi} \times 100 = \frac{6562500}{4200000} = 1,5625\%$.

