ÉPREUVE BLANCHE du BREVET : MATHÉMATIQUES : CORRECTION

I Partie Numérique (12 points)

I.1

On considère les expressions suivantes :

$$A = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{16 \times 10^{-1} \times 2}{\left(10^3\right)^2 \times 10^{-8} \times 80}$$

I.1.1) Calculer A et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

$$A = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{5}{2} = \left(\frac{6}{10} - \frac{5}{10}\right) \times \frac{5}{2} = \left(\frac{6-5}{10}\right) \times \frac{5}{2} = \frac{1}{10} \times \frac{5}{2} = \frac{1 \times 5}{10 \times 2} = \frac{1 \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times 2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

I.1.2) Vérifier, en écrivant les étapes intermédiaires, que B est un nombre entier.

$$B = \frac{16 \times 10^{-1} \times 2}{\left(10^3\right)^2 \times 10^{-8} \times 80} = \frac{16 \times 2}{80} \times \frac{10^{-1}}{\left(10^3\right)^2 \times 10^{-8}} = \frac{\cancel{16} \times 2}{\cancel{16} \times 5} \times \frac{10^{-1}}{10^{3 \times 2} \times 10^{-8}} = \frac{2}{5} \times \frac{10^{-1}}{10^6 \times 10^{-8}} = \frac{2}{5} \times 10^{-1-6+8} = \frac{2}{5} \times 10^1 = \frac{20}{5} = 4$$

I.1.3) William affirme que « A est l'opposé de B ». Est-ce vrai ? Justifier.

A n'est pas l'opposé de B (c'est -4 l'opposé de B) mais son inverse. William a tort.

I.2

On considère les expressions suivantes :

$$C = 2\sqrt{24} + \sqrt{96} - \sqrt{600} \quad \text{et} \quad D = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + 5\sqrt{2}\right)$$

I.2.1) Mettre C sous la forme $a\sqrt{6}$, avec a entier relatif.

$$C = 2\sqrt{24} + \sqrt{96} - \sqrt{600} = 2\sqrt{4 \times 6} + \sqrt{16 \times 6} - \sqrt{100 \times 6} = 2\sqrt{4} \times \sqrt{6} + \sqrt{16} \times \sqrt{6} - \sqrt{100} \times \sqrt{6}$$

$$= \left(2\sqrt{4} + \sqrt{16} - \sqrt{100}\right) \times \sqrt{6} = (2 \times 2 + 4 - 10) \times \sqrt{6} = -2\sqrt{6}$$

I.2.2) Développer et réduire D.

$$D = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + 5\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{2} \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 5\sqrt{2} - \sqrt{2} \times 5\sqrt{2} =$$

$$3 - \sqrt{2 \times 3} + 5 \times \sqrt{3 \times 2} - 5 \times 2 = 3 + (-1 + 5) \times \sqrt{6} - 10 = -7 + 4 \times \sqrt{6}$$

I.3

Soit $E = (4x+1)^2 - 25$.

I.3.1) Développer et réduire l'expression E.

$$E = (4x+1)^2 - 25 = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 1 + 1^2 - 25 = 16x^2 + 8x + 1 - 25 = 16x^2 + 8x - 24$$

I.3.2) Factoriser l'expression E.

$$E = (4x+1)^2 - 25 = (4x+1)^2 - 5^2 = (4x+1-5)(4x+1+5) = (4x-4)(4x+6) = 8(x-1)(2x+3)$$

I.3.3) Calculer E pour $x = -\frac{3}{2}$ et pour $x = \sqrt{3}$.

$$E = 8\left(\frac{-3}{2} - 1\right)\left(2 \times \frac{-3}{2} + 3\right) = 8\left(\frac{-3}{2} - 1\right)\left(\cancel{2} \times \frac{-3}{\cancel{2}} + 3\right) = 8\left(\frac{-3}{2} - 1\right)(-3+3) = 8\left(\frac{-3}{2} - 1\right) \times 0 = 0$$

$$E = 16\left(\sqrt{3}\right)^2 + 8\left(\sqrt{3}\right) - 24 = 16 \times 3 + 8\sqrt{3} - 24 = 48 - 24 + 8\sqrt{3} = 24 + 8\sqrt{3}$$

I.3.4) Résoudre l'équation $(4x+1)^2 = 25$.

$8(x-1)(2x+3) = 0$ pour $(x-1) = 0$ ou bien $(2x+3) = 0$

Cela donne $x = 1$ ou bien $2x = -3$; $x = 1$ ou bien $x = \frac{-3}{2} = -1,5$.

II Partie Géométrique (12 points)

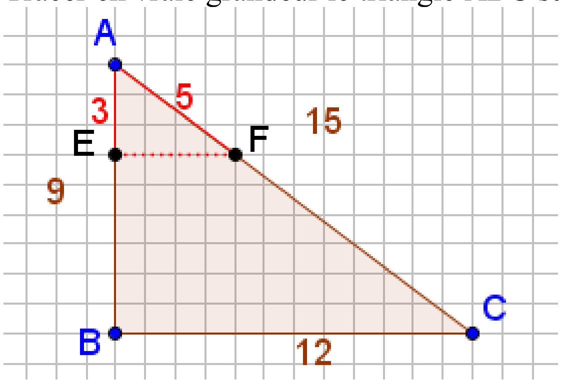
II.1

L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que AB = 9 ; AC = 15 ; BC = 12.

II.1.a) Démontrer que ABC est rectangle en B.

$AC^2 = 15^2 = 225$ et $AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$. D'où $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est donc rectangle en B.

II.1.b) Tracer en vraie grandeur le triangle ABC sur la copie.



II.2 E est le point du segment [AB] tel que AE = 3.
F est le point du segment [AC] tel que AF = 5.

II.2.a) Placer les points E et F sur la figure.

II.2.b) Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (BC)

$\frac{AE}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} ; \frac{AF}{AC} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ d'où $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$; d'autre part les points A, E, B d'une part, et A, F, C d'autre part, **sont alignés dans cet ordre**. D'après la réciproque du théorème de Thalès, la droite (EF) est donc parallèle à la droite (BC).

II.3 Calculer l'aire du triangle AEF.

$\mathscr{A}$ = AE×EF÷2 et l'on calcule EF à l'aide du théorème de Thalès, car (EF)// (BC) et donc on a :

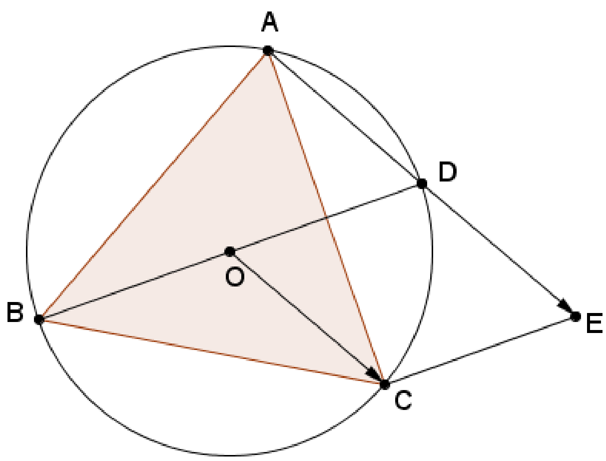
$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ ce qui donne : EF = $BC \times \frac{AE}{AB} = 12 \times \frac{1}{3} = 4$. D'où $\mathscr{A}$ = 3×4÷2 = 12÷2 = 6.

NB : On peut aussi calculer l'aire du triangle ABC (=9×12÷2=54), puis multiplier cette aire par le coefficient de réduction des aires, dans la réduction de coefficient 1/3, soit par $(1/3)^2 = 1/9$.

Et donc, $\mathscr{A} = 54 \times \frac{1}{9} = \frac{54}{9} = 6$.

II.2

Sur la figure ci-contre,
- ABC est un triangle équilatéral,
- le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC,
- le point D est le point diamétralement opposé au point B sur ce cercle.



II.2.a) Quelle est la nature du triangle ABD ? Justifier.

Comme A est un point du cercle de diamètre [BD], le triangle ABD est un triangle rectangle en A.

II.2.b) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ADB}$? Justifier.

$\widehat{ADB}$ et $\widehat{ACB}$ sont deux angles qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$, ils sont donc égaux. Comme ACB est un triangle équilatéral, l'angle $\widehat{ACB}$ mesure 60° et donc $\widehat{ADB}$=60°.

Une autre manière qui n'utilise pas ce résultat (vu à la fin de l'année) : ABC est un triangle équilatéral. Il a donc 3 axes de symétrie qui sont à la fois les médiatrices des côtés, les hauteurs, les médianes et les bissectrices du triangle. La droite (AO) par exemple, étant une bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, partage cet angle en 2 angles de même mesure. Donc $\widehat{BAO}$ mesure 30° (la moitié de 60). Comme BAO est isocèle (car B et A sont sur un cercle de centre O) en O, l'angle $\widehat{ABO}$ mesure aussi 30°. Or cet angle est complémentaire avec $\widehat{ADB}$ (car ABD est rectangle en A), donc $\widehat{ADB}$ mesure 60°.

II.2.c) On désigne par E le 4ème sommet du parallélogramme DOCE.
Démontrer que les droites (DC) et (OE) sont perpendiculaires.
Quelle est alors la nature de DOCE?

D'après l'énoncé le quadrilatère DOCE est un parallélogramme. Comme OD = OC (car D et C sont sur un même cercle de centre O) on a un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux, il s'agit donc d'un losange. Les diagonales d'un losange étant perpendiculaires, les droites (OE) et (DC) sont donc perpendiculaires.

III Problème (12 points)

La station de ski Blanche Neige propose les tarifs suivants pour la saison 2007 – 2008 :

Tarif A : chaque journée de ski coûte 20 € ;

Tarif B : en adhérant au club des sports dont la cotisation annuelle s'élève à 60 €, on bénéficie d'une réduction de 30 % sur le prix de chaque journée à 20 €.

III. 1 Yann est adhérent au club des sports de la station. Sachant qu'il a déjà payé sa cotisation annuelle, justifiez pourquoi il devra payer 14 € par journée de ski.

Yann étant adhérent au club des sports de la station, il a déjà payé sa cotisation annuelle (60 €). Il devra payer 14 € par journée de ski car avec une réduction de 30 % le prix de chaque journée (20 €) devient

$$20\times\left(1-\frac{30}{100}\right)=20\times\left(\frac{70}{100}\right)=20\times 0,7=14$$

III. 2 Vérifiez par le calcul que pour 5 jours de ski, le tarif A revient à 100 € et que le tarif B revient en tout à 130 €.

Pour 5 jours de ski, le tarif A revient à $20\times5 = 100$ € , le tarif B revient en tout à $60 + 14\times5 = 130$ €.

III. 3 Compléter le tableau suivant en y incluant vos calculs :

Nombre de jours de ski pour la saison 2007 – 2008	5	8	$220\div20 = 11$
Coût avec le tarif A en euros	100	$8\times20 = 160$	220
Coût avec le tarif B en euros	130	$60 + 14\times8 = 172$	$60 + 14\times11 = 214$

III. 4 On appelle x le nombre de journées de ski durant la saison 2007 – 2008. Exprimer en fonction de x :

a) le coût annuel C_A en euros pour un utilisateur ayant choisi le tarif A ;

le coût annuel C_A en euros pour un utilisateur ayant choisi le tarif A : $C_A = 20\times x$

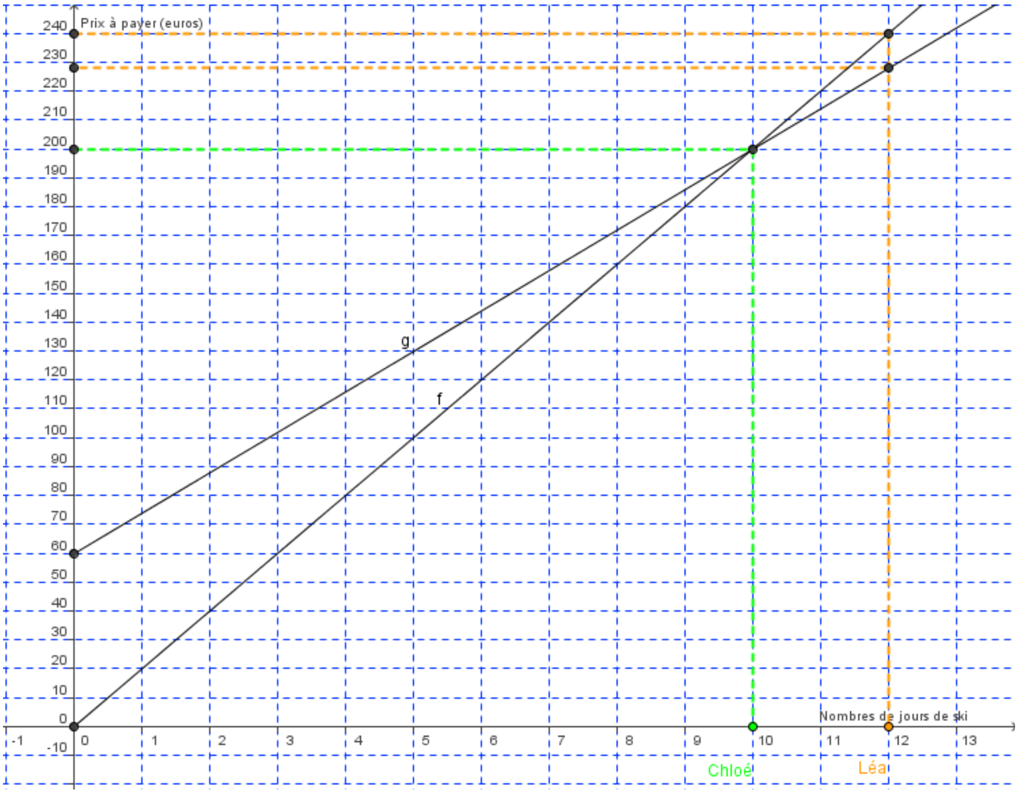
b) le coût annuel C_B en euros pour un utilisateur ayant choisi le tarif B.

le coût annuel C_B en euros pour un utilisateur ayant choisi le tarif B : $C_B = 14\times x + 60$

III. 5 Sachant que Yann, adhérent au club des sports, a dépensé au total 242 €, combien de jours a-t-il skié ?

$14\times x + 60 = 242$. Cela revient à $14\times x = 242 - 60 = 182$, et en divisant par 14, on trouve $x = 182\div 14 = 13$. Yann a donc skié 13 jours.

III. 6 Sur du papier millimétré, prendre 1 cm pour une journée de ski et 1 cm pour 10 €. On placera l'origine du repère en bas à gauche de la feuille, l'axe des abscisses étant placé sur le petit côté de la feuille.
Tracer dans ce repère les représentations graphiques des fonctions affines définies, pour tout nombre x, par



$f(x) = 20x$ et $g(x) = 14x + 60$

III. 7 Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique et en y faisant apparaître les traits nécessaires.

a) Léa doit venir skier douze journées pendant la saison 2007 – 2008. Quel est pour elle le tarif le plus intéressant ? Quel est le prix correspondant ?

Le tarif le plus intéressant pour elle est le tarif B (courbe de la fonction g). On lit et on vérifie par le calcul que g(12) = 228. Léa devra donc payer 228 €.

b) En étudiant les tarifs de la saison, Chloé constate que, pour son séjour, les tarifs A et B sont égaux. Combien de journées de ski prévoit-elle ? Quel est le prix correspondant ?

Elle aura donc skié 10 jours (en effet
$20x = 14x + 60$ équivaut à $20x - 14x = 60$, soit $6x = 60$. Donc $x = 60 \div 6 = 10$. Le prix correspondant est 200 €.