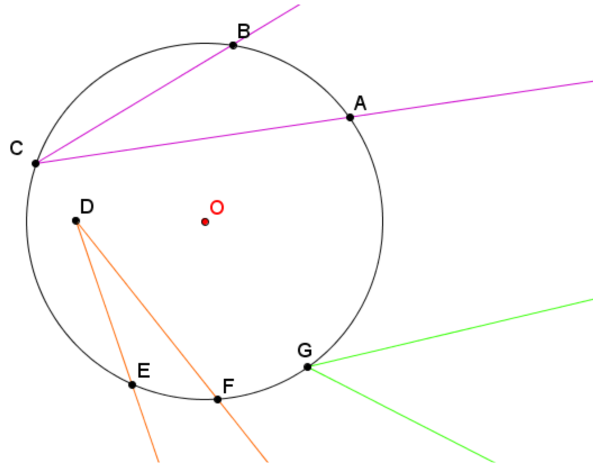
I] Propriété de l'angle inscrit dans un cercle

a) Définitions :

Définition1 : Un angle est dit « inscrit dans un cercle » lorsque son sommet appartient au cercle, et que ses côtés coupent le cercle (on dit que les côtés *interceptent* le cercle).

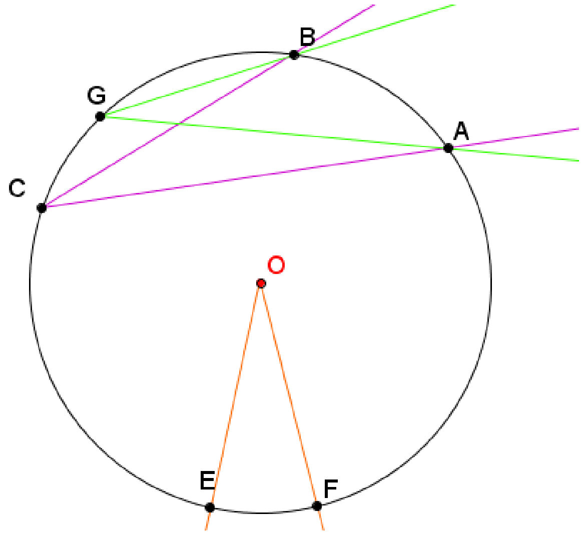
Par exemple, l'angle $\widehat{ACB}$ est inscrit dans le cercle de centre O passant par A, les côtés de cet angle interceptent le cercle en a et B. Par contre les angles de sommet D et G ne sont pas inscrits dans ce cercle : l'angle $\widehat{FDE}$ car le point D (le sommet) n'est pas un point du cercle ; l'angle $\widehat{G}$ car ses côtés n'interceptent pas le cercle.



Lorsqu'un angle est inscrit dans un cercle, il découpe une portion de ce cercle qu'on dit *intercepté* par l'angle. Sur notre exemple, l'angle $\widehat{ACB}$, inscrit dans le cercle, intercepte celui-ci selon l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Définition2 : Un angle est dit « au centre » d'un cercle, lorsque son sommet est le centre du cercle.

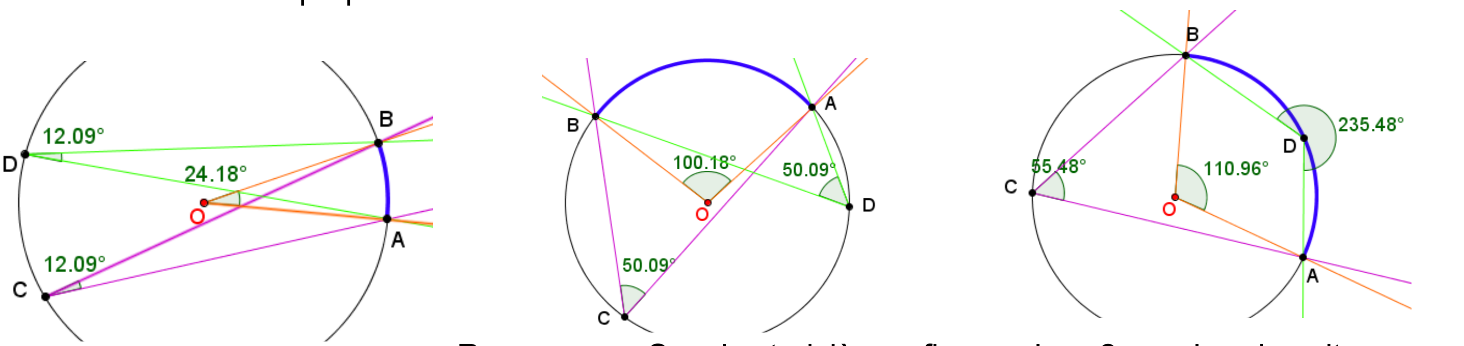
Remarque : Sur la figure ci-contre, l'angle $\widehat{EOF}$ est un « angle au centre » pour le cercle. Cet angle au centre intercepte l'arc $\overset{\frown}{EF}$. Ainsi n'importe quel angle qui coupe le cercle en 2 points intercepte un arc du cercle.
Autre remarque : Les deux angles inscrits $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AGB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$.



Pourquoi toutes ces définitions et remarque ? Parce qu'il y a une propriété qu'il vous est demandé de connaître

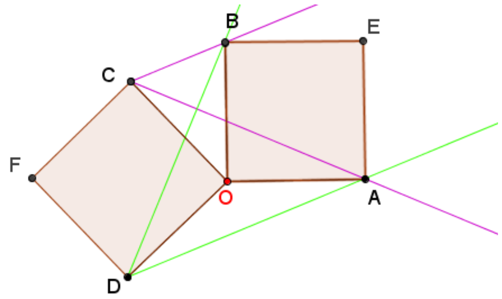
Propriété : lorsqu'un angle inscrit et un angle au centre interceptent <u>le même arc</u>, la mesure de l'angle inscrit est *la moitié* de celle de l'angle au centre.

Illustrations de cette propriété :



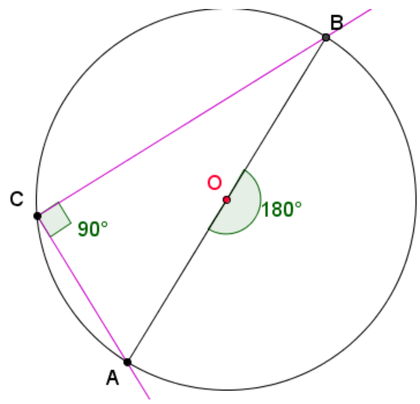
Remarque : Sur la troisième figure, les 2 angles inscrits ne semblent pas avoir la même mesure… Comme les sommets sont de part et d'autre de la corde [AB] les angles interceptés ne sont pas les mêmes : $\widehat{ACB}$ intercepte le *petit arc* de cercle $\overset{\frown}{AB}$ alors que $\widehat{ADB}$ intercepte le *grand arc* de cercle $\overset{\frown}{AB}$. L'angle au centre qui intercepte le *petit arc* mesure bien le double de $\widehat{ACB}$ (110,96=2×55,48) et celui qui intercepte le *grand arc* mesure bien le double de $\widehat{ADB}$, mais il s'agit ici de l'angle rentrant (360-110,96=249,04 et 2×(360-235,48)=2×124,52=249,04). Dans ce type de configuration, la propriété reste vraie quoiqu'il faille chercher quel angle intercepte quel arc.

Une conséquence importante de cette propriété est : si 2 angles inscrits interceptent le même arc alors ils sont égaux (ils ont la même mesure : la moitié de l'angle au centre interceptant cet arc). C'est souvent sous cette forme qu'on utilisera cette propriété : en remarquant que 2 angles interceptent un même arc de cercle, on pourra en déduire qu'ils ont même mesure (qu'ils sont égaux).

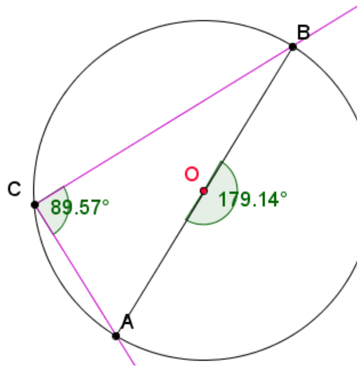


Exemple : OCFD et OAEB sont 2 carrés d'aire égale. Si l'on demande de prouver que les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ sont égaux, il faut penser à cette propriété. Car il est facile de montrer que A, B, C et D sont 4 points d'un même cercle de centre O. Et donc, les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ sont 2 angles inscrits dans un même cercle et qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$. D'après la propriété mentionnée, ils sont donc égaux. De plus, les angles inscrits interceptent le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$ qui mesure 90°. Ces angles mesurent donc 45° (la moitié de 90°).

Un cas particulier de cette propriété a déjà été mentionné dans le cours (chapitre sur les triangles rectangles) : lorsque l'angle au centre mesure 180°, l'angle inscrit interceptant le même arc est un angle droit. Nous avons déjà énoncé et utilisé cette propriété pour montre qu'un angle est droit : C étant sur le cercle de diamètre [AB] l'angle $\widehat{ACB}$ est un angle droit.

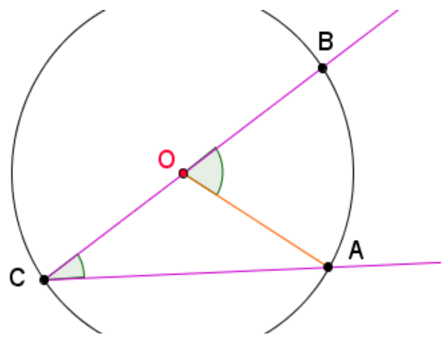


Règle : Si A, B et C sont 3 points d'un cercle, et si [AB] est le diamètre de ce cercle alors le triangle ABC est un triangle rectangle en C.



Remarque : la propriété réciproque est vrai également, su A, B et C sont 3 points d'un cercle, et si le triangle ABC est un triangle rectangle en C alors [AB] est le diamètre de ce cercle. Autrement dit, un angle droit inscrit dans un cercle intercepte nécessairement un demi-cercle.

1] Montrons cette propriété dans un cas particulier, lorsque [CB] est un diamètre du cercle :



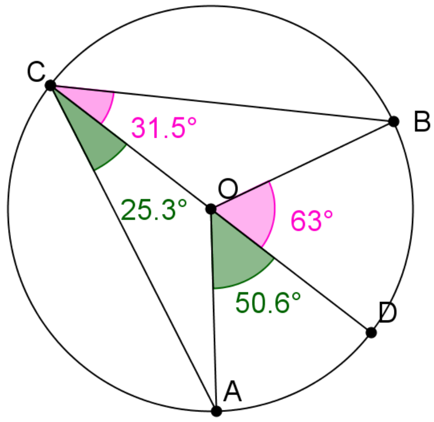
a) A et C étant 2 points d'un cercle de centre O, le triangle OAC est isocèle en O. Les angles $\widehat{OCA}$ et $\widehat{OAC}$ sont donc égaux et, comme la somme des 3 angles du triangle fait 180° on a : 180=2 $\widehat{OCA}$ + $\widehat{OAC}$ d'où 2 $\widehat{OCA}$ =180- $\widehat{AOC}$.
b) Comme [CB] est un diamètre du cercle, les points B, O et C sont alignés et donc $\widehat{BOC}$ =180°. On en déduit, d'une part que $\widehat{OCA}$ =, $\widehat{BCA}$ et d'autre part que les angles adjacents $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ sont supplémentaires : $\widehat{AOB}$ + $\widehat{AOC}$ =180 d'où $\widehat{AOB}$ =180- $\widehat{AOC}$.
c) Des remarques précédentes on déduit que 2 $\widehat{BCA}$ =2 $\widehat{OCA}$ =180- $\widehat{AOC}$ = $\widehat{AOB}$. La propriété est donc vraie lorsque B et C sont diamétralement opposés.

2] Généralisons : Si [CD] est un diamètre du cercle, on peut découper l'angle inscrit $\widehat{BCA}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ en deux parties adjacentes : $\widehat{BCA}$ = $\widehat{BCD}$ + $\widehat{ACD}$ et $\widehat{AOB}$ = $\widehat{AOD}$ + $\widehat{BOD}$. On applique ce qui vient d'être vu précédemment aux 2 parties séparément et on en déduit simplement que 2 $\widehat{BCA}$ = $\widehat{AOB}$ c'est-à-dire qu'on montre que la propriété est vraie dans ce cas plus général.

II] Rotations et polygones réguliers

NB: les rotations ne sont plus au programme de 3ème mais l'étude des polygones réguliers y est toujours

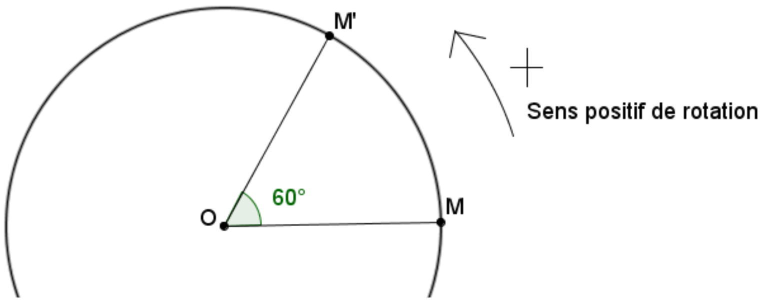
a) Définition :



Définition préliminaire : On a besoin dans cette partie « d'orienter le plan », c'est-à-dire de décider que lorsqu'on tourne dans un sens, on tourne dans le sens positif. L'autre sens sera alors le sens négatif. Par exemple, on décide que le sens inverse des aiguilles d'une montre est le sens positif : c'est la convention trigonométrique, aussi appelé sens contrahoraire. Notez bien qu'on peut définir l'autre sens comme sens positif (le sens horaire, celui qu'on utilise pour visser). La convention prise ici, généralement ne vaut pas pour la suite. Il faudra préciser la convention utilisée à chaque fois.

O et M étant deux points, α étant un nombre entier et un sens positif de rotation ayant été défini, la **rotation de centre O et d'angle α** transforme le point M en un point M' tel que :

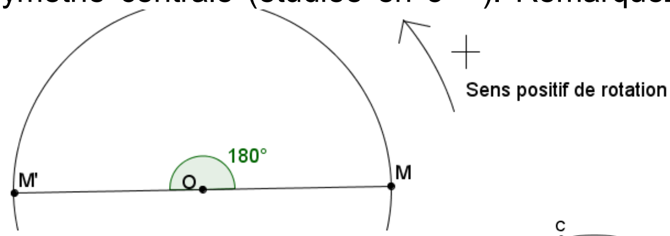
- OM = OM' (M' est sur le cercle de centre O passant par M)
- $\widehat{MOM'}$ = α (si α>0 on tourne dans le sens positif pour aller de M vers M', sinon on tourne dans le sens contraire).



Ici par exemple, nous voyons un point M' qui est l'image d'un point M par la rotation de centre O et d'angle 60°. Avec la notation fonctionnelle, si on note r cette rotation, alors M' = r(M).

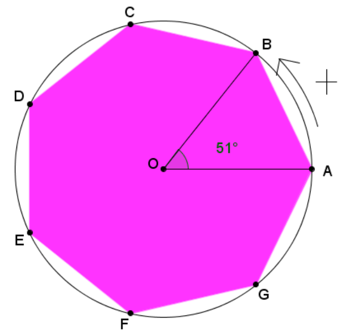
Le point M par contre, serait l'image du point M' par la rotation de centre O et d'angle -60°.

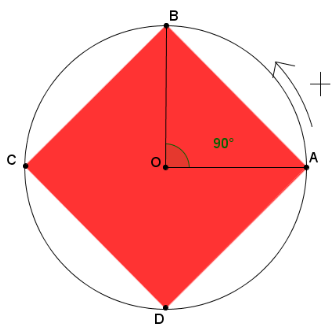
Les rotations font partie de la famille des transformations géométriques dont vous connaissez déjà : la symétrie axiale (étudiée en 6ème) et la symétrie centrale (étudiée en 5ème). Remarquez que *la symétrie centrale n'est rien d'autre qu'une rotation*. L'angle de la symétrie centrale, considérée comme une rotation est 180°. on peut se passer de définir un sens de rotation car tourner dans un sens ou l'autre revient au même...



Ici, positif dans

b) Quelques propriétés des rotations



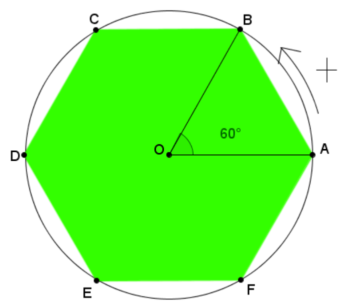


Le centre d'une rotation est le seul point invariant (n'étant pas déplacé) par cette rotation. Pour qu'une figure soit invariante par une rotation, il faut que tous les points de la figure aient pour image des points de la figure.

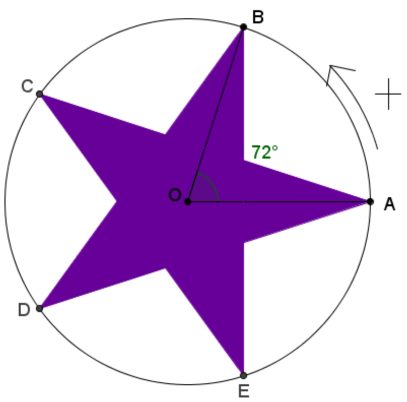
> Définition : Les polygones réguliers sont des polygones ayant des côtés et des angles égaux.

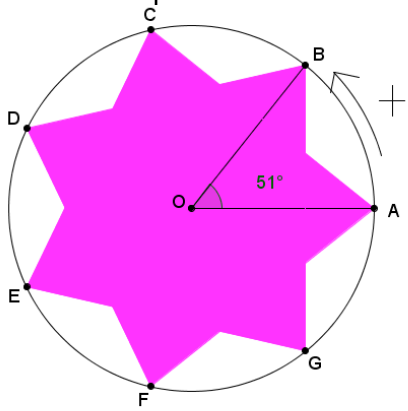
Les polygones réguliers a 3 côtés sont les triangles équilatéraux ; ceux à côtés sont les carrés. Un polygone régulier est inscriptible dans un cercle, ses sommets étant équidistants d'un même point appelé *centre* du polygone régulier.

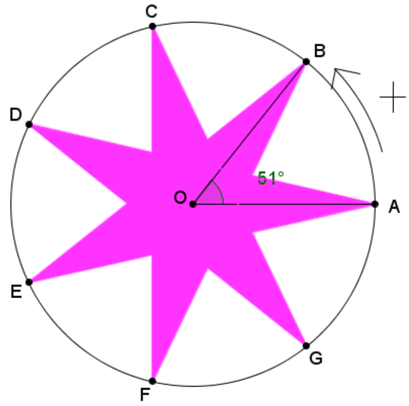
Un polygone régulier à n côtés ayant pour centre O est invariant par une rotation de centre O et d'angle $\frac{360°}{n}$ (voir les figures) : le carré rouge



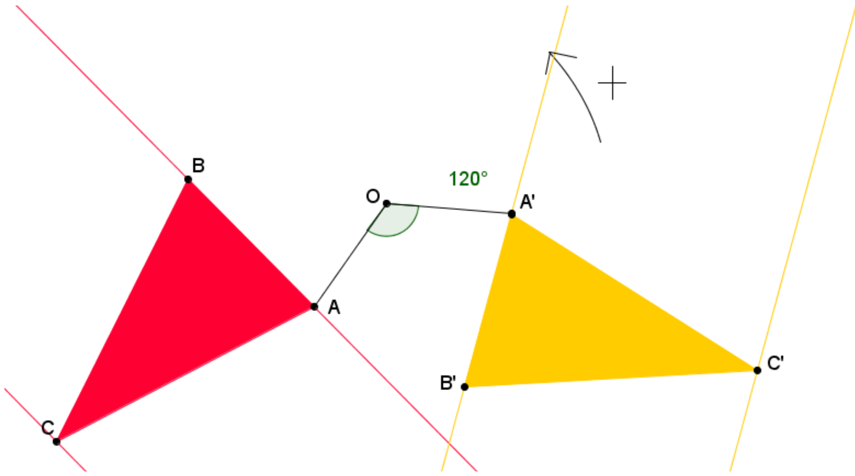
ABCD est invariant par une rotation de centre O et d'angle 90° (quart de tour contrahoraire), 180° (demi-tour ou symétrie de centre O) et -90°(quart de tour horaire). Avec le quart de tour contrahoraire par exemple, les sommets A, B, C et D ont pour images B, C, D et A. L'hexagone régulier vert ABCDEF est invariant par les rotations de centre O et d'angles 60°, 120°, 180°, -60° et -120°. L'heptagone rose ABCDEFG est invariant par les rotations de centre O et d'angles α°, 2 α °, 3 α °, - α °, -2 α ° et -3 α°, l'angle α étant égal à 360÷7 soit environ 51° (la calculatrice donne 51,42857143°).
A propos de polygones réguliers, n'oublions pas de mentionner ceux qui sont étoilés :



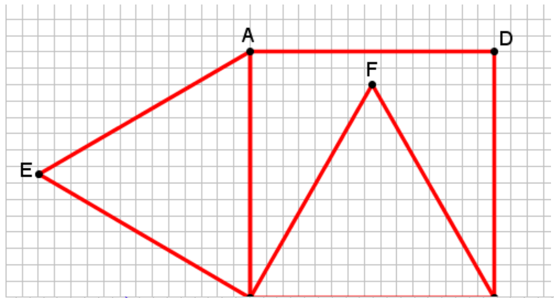




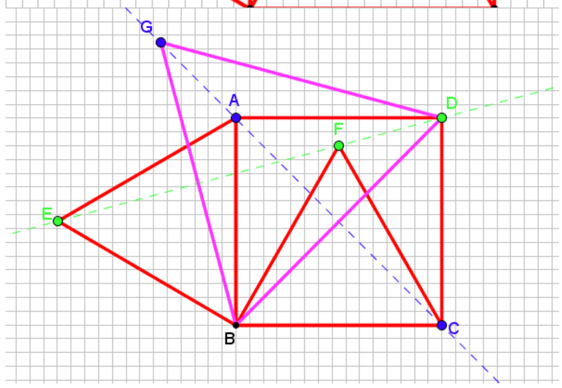
Celui qui a le moins de côté parmi les réguliers étoilés est le pentagone. Vient ensuite deux heptagones étoilés différents. Utilisez l'applet du site Mathadomicile (option « étoiles ») pour davantage d'exemples.



Autres propriétés : Si A' et B' sont les images de A et B par une même rotation, alors les points du segment [AB] ont pour images les points du segment [A'B'] ; le segment [A'B'] est donc l'image de [AB] et AB = A'B'. De même la droite (A'B') est l'image de (AB), le cercle de centre A passant par B a pour image le cercle de centre A' passant par B'.
La rotation conserve les longueurs et les angles d'une figure, en particulier des segments parallèles ont pour image des segments parallèles.



Application des propriétés de la rotation pour résoudre un problème de géométrie :
ABCD est un carré sur les côtés duquel on construit deux triangles équilatéraux ABE et BCF comme le montre la figure ci-contre. La question est de montrer que les points E, F et D sont alignés.
Bien sûr vous pouvez procéder de différentes façon, la plus élémentaire étant sans doute de calculer des angles.
Mais, moyennant un peu de gymnastique, vous admettrez que 2 de ces 3 points, E et F sont les images de 2 points de la figure par une même rotation d'angle 60° et de centre B : E est l'image de A, F est l'image de C. L'idée est donc de voir si, par hasard, les 3 points ne sont pas les images de points alignés. D est l'image d'un point qu'on peut nommer G et qui est le 3ème sommet du grand triangle équilatéral DBG de la figure suivante. Vous déduisez



naturellement de l'énoncé que A et C sont sur la médiatrice de [BD], et également G (car GD = GB). Les points A, C et G sont donc alignés. Comme *une rotation transforme 3 points alignés en 3* *points alignés* (elle conserve l'alignement), les images de ces points sont alignées. E, F et D sont donc alignés car ils sont les images des points alignés A, C et G.

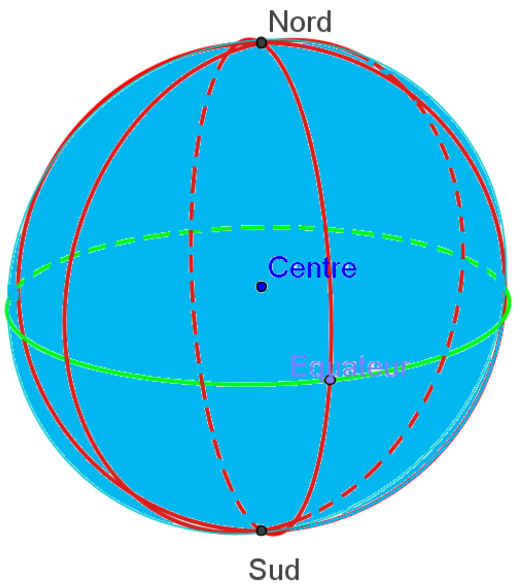
III] Sphères

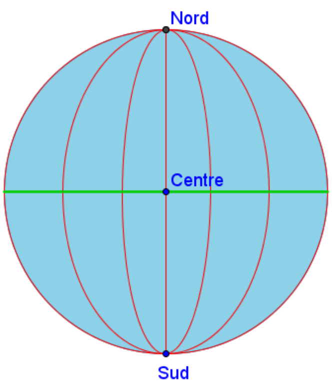
a) Définitions :

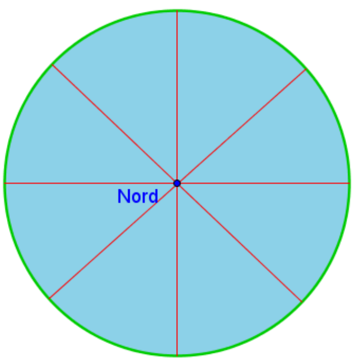
On appelle *sphère* de centre O et de rayon r l'ensemble des points M tels que OM = r, c'est-à-dire l'ensemble des points équidistants de O. Un *grand cercle* d'une sphère contient tous les points de la sphère contenus dans un plan passant par le centre de la sphère.

Propriété des grands cercles d'une sphère : dans une sphère, il y a une infinité de grands cercles. Tous ont pour centre, le centre de la sphère et pour rayon, le rayon de la sphère. Si l'on coupe une sphère par un de ses grands cercles, on obtient deux demi-sphères.

Pour se représenter une sphère on peut observer un objet sphérique : une boule de pétanque, une orange, une bulle de savon… Depuis quelques siècles les hommes ont la certitude que notre planète, la Terre, a une forme sphérique. Les Grecs, à la suite de Platon (428-348 avant J.-C.) admettent généralement cette idée qui s'oppose à une Terre plate. Par la suite cette idée fut oubliée pour être finalement reprise au XII^{ème} siècle... Depuis, cela nous semble une évidence et nous avons pris l'habitude de représenter la sphère terrestre avec ses grandes lignes : les **méridiens** (grands cercles passant par les pôles) et l'**équateur** (grand cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe des pôles). Cela ressemble, en perspective, à la figure ci-contre où tous les grands cercles (sauf un) doivent être représentés par des ellipses. Il est beaucoup plus simple de dessiner des vues où la perspective fait apparaître l'équateur comme un cercle (vue centrée sur un pôle où les méridiens sont alors des segments) ou comme un segment (vue centrée sur un point de l'équateur), comme sur les vues ci-dessous :

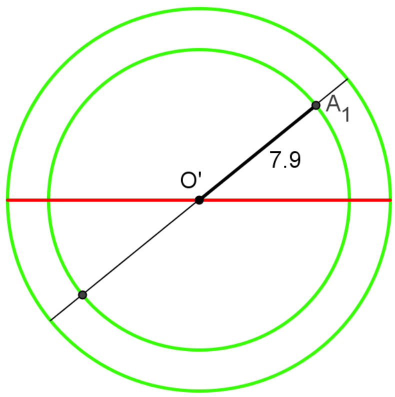


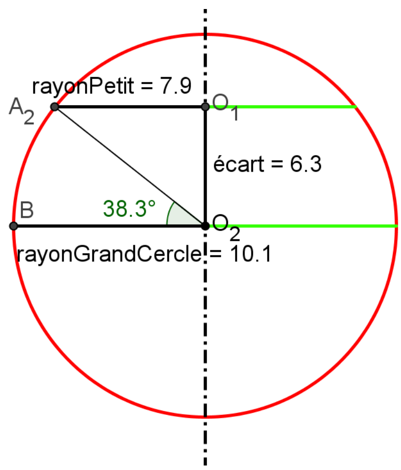




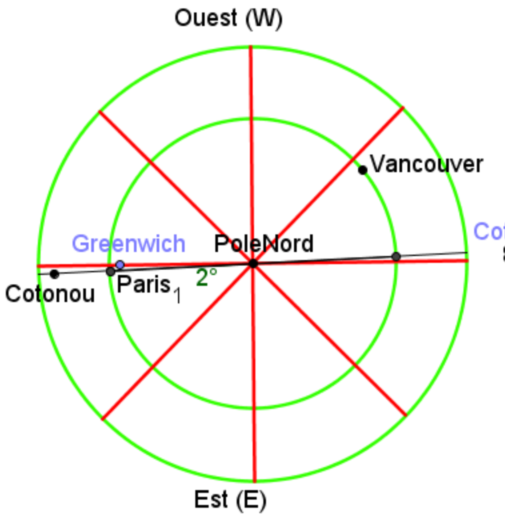
b) Coupe d'une sphère par un plan : lorsqu'on coupe une sphère selon un plan parallèle à un plan contenant un grand cercle de la sphère (donc contenant le centre de la sphère), on obtient une *section circulaire* dont le rayon est inférieur au rayon r de la sphère (compris entre 0 et r). La trace de ce plan de coupe s'appelle un **petit cercle**.

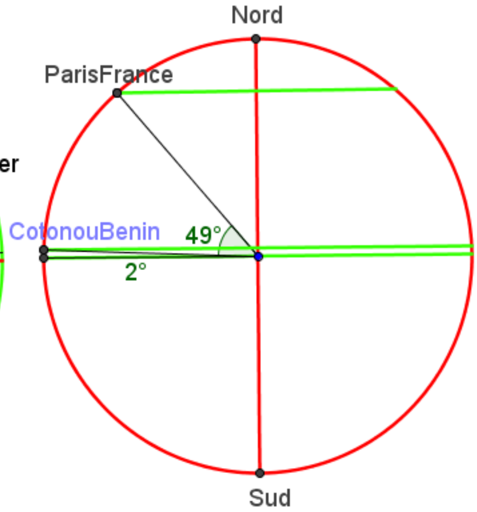
Sur la sphère terrestre, les petits cercles contenus dans des plans parallèles au plan de l'équateur s'appellent des « **parallèles** ». Les petits cercles appelés parallèles permettent de situer un point sur une surface sphérique comme la surface terrestre. Pour préciser sur quel parallèle on se place, on donne l'angle, appelé *latitude*, que forme les points P (Parallèle), C (Centre) et E (Équateur). Cet





angle varie entre -90° (on note plutôt 90°Sud) et +90° (on note 90°Nord). On peut ainsi situer Paris et Vancouver au Canada sur le parallèle 49°Nord ou encore Le Caire en Égypte et Houston au Texas sur le parallèle 30°Nord.





Pour situer complètement un point de la surface d'une sphère il faut un 2ème nombre. Ce 2ème nombre est fourni par l'angle formé par le méridien où se situe le point et un méridien de référence qui est celui de Greenwich en Angleterre. Paris est proche de Greenwich car cet angle, appelé *longitude*, est seulement de 2° vers l'Est. On donne ainsi la position de Paris : 2°E – 49°N, qui la distingue de celle de Vancouver situé plus à l'Ouest (123°W – 49°N) ou de Cotonou au Bénin situé plus au Sud (2°E – 6°N).

c) Calculs de volumes, d'aires et de longueurs concernant une sphère

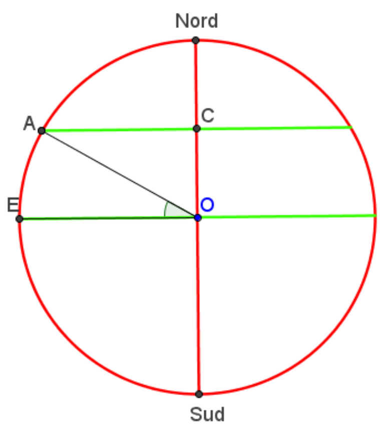
Tout d'abord précisons que la sphère est une surface : elle contient les points situés à une distance donnée (le rayon) d'un point donné (le centre). La mesure de cette surface est donnée par une formule (qui ne figure pas au programme de la classe de 3ème) : A = $4\pi r^2$, soit 4 fois exactement celle du disque équatorial.

Le volume contenu à l'intérieur d'une sphère de rayon *r* (volume de la boule de rayon *r*) est donné par la formule V = $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Nous disposons ici de toutes les formules permettant de calculer longueurs, aires et volumes en relation avec une sphère donnée. Rappelons que les différents cercles qui interviennent pour situer les points sur une sphère ont un rayon R et un périmètre P liés par la relation P = $2\pi R$.

Notons que ce sujet est un bon domaine pour effectuer des révisions car il mobilise différentes parties du programme de géométrie : Les calculs faisant intervenir les angles (latitude ou longitude) conduisent à utiliser la trigonométrie, tandis que les angles droits existant entre l'axe Nord-Sud et le plan équatorial ou tout plan parallèle à celui-ci conduisent à utiliser le théorème de Pythagore.

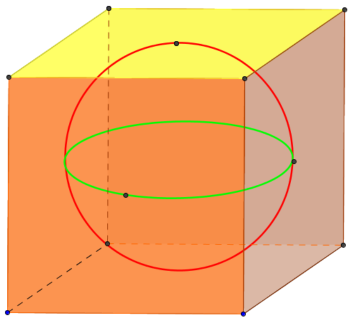
Exemple : la Terre a un rayon R égal à 6400 km approximativement. L'équateur mesure donc environ $2\pi \times 6400 \approx 40.212$ km. La surface terrestre vaut $4\pi \times 6400^2 \approx 514.718.540$ km², soit un peu plus de 514 millions de km². A titre de comparaison, la France a une aire mille fois plus petite (549 000 km²). Le volume de la Terre est, quant à lui, égal à $\frac{4}{3}\pi \times 6400^3 \approx 1.098.066.210.000$ km³, soit un peu moins de 1100 milliards de km³.



Tout cela est fort simple, nous nous sommes contentés d'appliquer des formules. Effectuons un calcul plus élaboré : Le petit cercle, appelé « parallèle » de Paris, a un rayon r vérifiant l'égalité $\frac{r}{R} = \cos 49°$, ce qui conduit à la valeur r = 6400×cos49 ≈ 4200 km. Par conséquent, ce petit cercle (sur lequel est aussi situé Vancouver) a une longueur de 26 000 km environ. Quelle est la distance $d = OC$ entre le centre C de ce petit cercle et le centre O de la Terre ? On peut répondre à cette question aussi bien par la trigonométrie ($\sin 49° = \frac{d}{R}$ et donc d =6400×sin49 ≈ 4830 km) qu'avec le théorème de Pythagore ($d^2 + r^2 = R^2$ et donc $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{6400^2 - 4200^2} \approx 4830$ km.

Un dernier calcul concernant la Terre : quelle est la latitude d'un point situé sur le parallèle ayant son centre au milieu du segment joignant le centre de la Terre et un de ses Pôles ? La situation est mieux compréhensible avec un schéma, il s'agit de calculer l'angle marqué $\widehat{AOE}$. Comme (AC) et (EO) sont parallèles, les angles $\widehat{AOE}$ et $\widehat{OAC}$ sont égaux aussi, car en position alternes internes. Le triangle ACO étant rectangle en C, on peut écrire que $\sin\widehat{OAC}=\frac{OC}{OA}=\frac{r\div 2}{r}=\frac{1}{2}$ d'où $\widehat{OAC}=\sin^{-1}(\frac{1}{2})=30°$.

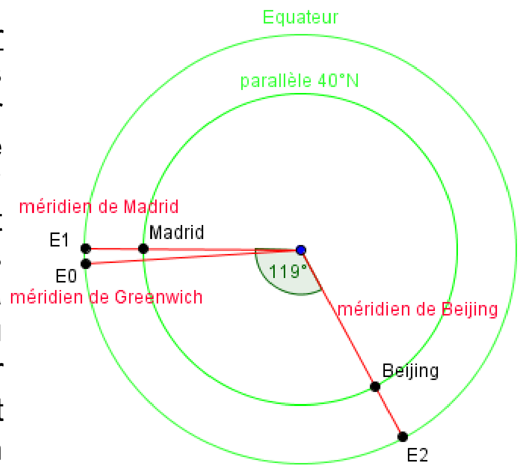
<u>Autre exemple mobilisant d'autres connaissances du cours de géométrie</u> :



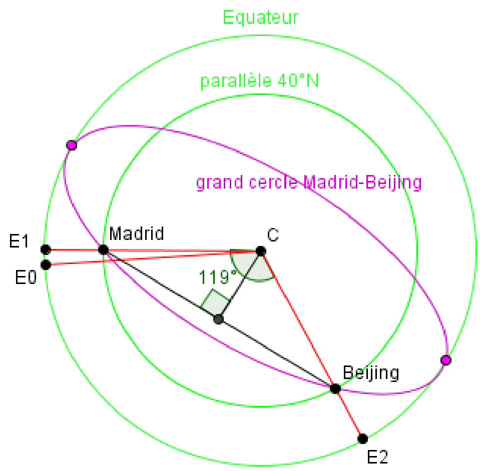
Une boule de rayon 10 cm est enfermée dans une caisse cubique remplie d'huile. Quel est le volume d'huile que peut contenir l'espace libre entre la boule et les parois de la caisse ?
Ce volume est obtenu simplement en effectuant la différence du volume du cube et de celui de la boule : $20^3-\frac{4}{3}\pi 10^3$ ≈3811 cm³.
Si l'on effectue une maquette de cette situation à l'échelle ¼, quel sera le volume de l'huile ? Il suffit de multiplier le volume trouvé par le cube du coefficient de réduction soit environ 3811×(¼)³ ≈ 60 cm³.

<u>Un problème plus complexe encore mais pratique</u> : quelle est la longueur du chemin le plus court à la surface d'une sphère qui joint 2 points donnés par leurs coordonnées (latitude et longitude) ? Si on veut traiter cela par un exemple : quelle est la distance la plus courte entre Madrid (3°W – 40°N) et Pékin (116°E – 40° N) ?

La distance "à vol d'oiseau", c'est-à-dire la plus courte, appelée aussi distance *orthodromique*, <u>n'est pas mesurée sur un petit cercle</u>. Ici, vous aurez remarqué que nous avons choisi 2 villes situées sur un même parallèle (40°N), donc sur un même petit cercle parallèle à l'Équateur dont il est facile de calculer la longueur. La différence de longitude vaut 119° (116−(−3)=116+3=119). Par conséquent la longueur du petit arc de cercle nous donnera la distance entre ces deux villes car il y a proportionnalité entre l'angle au centre et la longueur de l'arc de cercle intercepté. Avec les notations du 1er exemple, on trouve r=Rcos $\widehat{OAC}$ ≈4886km. La longueur du 40ème parallèle est 2πr, donc 2πRcos $\widehat{OAC}$, soit 2π6378cos40≈30698km. La distance entre Madrid et Pékin sur le 40ème parallèle est donc égale à 119÷360×30698≈10147km.

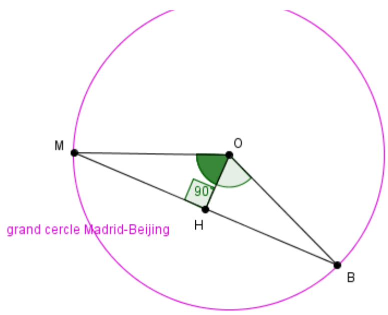


La distance *orthodromique* (la plus courte), en réalité, <u>est mesurée sur le grand cercle</u> passant par les deux villes, un cercle dont le centre est le centre de la sphère. Pour se représenter ce grand cercle, nous l'avons tracé en perspective sur la vue équatoriale. Le rayon de ce cercle est R (le rayon de la Terre) et donc la longueur de ce grand cercle est connue, c'est 2πR. La difficulté va être de calculer l'angle entre les deux villes sur le plan de ce grand cercle (ce n'est plus 119°).



Nous allons pour cela examiner la vue non déformée de ce grand cercle, sur laquelle nous faisons figurer le milieu H du segment [MB] qui joint les deux villes (B pour Beijing, le nom chinois de Pékin). La distance MH peut être calculée de deux façons:

- sur le petit cercle, dans le triangle MCH rectangle en H (C est le centre du petit cercle), on a sin $\widehat{MCH}$ =MH÷MC et donc MH=MCsin $\widehat{MCH}$ ≈4886sin(119÷2)≈4210km.



- sur le grand cercle, dans le triangle MOH rectangle en H (O est le centre de la sphère), on a $\sin \widehat{MOH} = MH \div MO$ et donc $MH = MO \sin \widehat{MOH}$ d'où $\sin \widehat{MOH} = MH \div MO = MC \sin \widehat{MCH} \div MO$ (on remplace MH par la valeur qui a été trouvée sur le petit cercle) et donc $\widehat{MOH} = \sin^{-1}(MC \div MO \sin \widehat{MCH}) \approx \sin^{-1}(4886 \div 6378 \sin(119 \div 2)) \approx 41°$.

Remarque: notre rapport 4886÷6378 vaut en fait $R\cos \widehat{OAC} \div R$, c'est à dire $\cos \widehat{OAC}$, ici cos40.

L'angle $\widehat{MOB}$ mesure donc environ 82° (le double de 41°). Il ne reste plus qu'à effectuer notre calcul de proportionnalité : la distance la plus courte entre les deux villes est de $82 \div 360 \times 40074 \approx 9128$km.

La distance orthodromique (sur un grand cercle) est plus courte ici de plus de 1000km! On peut montrer que cette distance calculée sur un grand cercle est toujours le plus court trajet pour aller d'un point à un autre sur une sphère.

Dans nos calculs, nous avons été aidé par le fait que les 2 villes étaient sur un même parallèle (car ainsi les calculs de MH, et donc de MB la distance entre les 2 points en ligne droite, ont été facilités). Avec un peu de réflexion on se sortira de tous les cas de figure, mais ce n'est pas toujours évident de tracer les figures qui accompagnent ce genre de raisonnement.

Le trajet orthodromique (plus courte distance), lorsqu'il est tracé sur une carte en projection de Mercator n'est pas une droite car la projection de Mercator ne respecte pas les distances. Le trajet qui est droit sur ce type de carte est appelé trajet *loxodromique*, ce qui correspond à un trajet qui garde toujours la même direction (le même cap). Pour réaliser une route en empruntant le trajet orthodromique, les navires ou les avions doivent changer continuellement de cap. Aujourd'hui cela est aisé grâce aux ordinateurs de bord qui calculent le cap à prendre à chaque instant. On voit sur l'illustration que pour aller de Paris à New York par la route orthodromique (arc rouge sur la carte), il faudra d'abord viser une direction plus au nord du parcours loxodromique (segment bleu), et progressivement plus au sud.

Certains sites proposent de calculer directement le trajet orthodromique. Ici, le résultat pour Madrid Pékin est un peu différent du notre car le rayon de la Terre utilisé est plus précis 6367 km. Pour preuve regardez le résultat que l'on obtient pour un demi grand cercle : 20002 km. En divisant par π, on trouvera la valeur employée pour R.

	Latitude			Longitude		
Origine	40	00	Nord	3	00	Ouest
Destination	40	00	Nord	116	00	Est
Unité Kilomètres	Distance 9179			Rte vraie 43		

	Latitude			Longitude		
Origine	0	00	Nord	0	00	Ouest
Destination	0	00	Nord	180	00	Est
Unité Kilomètres	Distance 20002			Rte vraie 90		

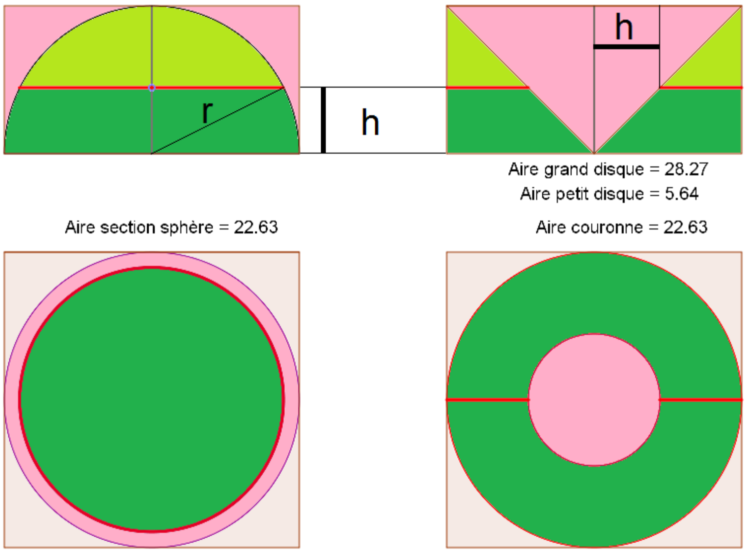
d) Justifications des propriétés de la sphère

Volume de la sphère

La formule donnant le volume d'une sphère de rayon *r* peut être justifiée assez simplement si l'on considère le schéma ci-contre, où sont représentés une demi-sphère (à gauche) et un cône (à droite) à l'intérieur d'un cylindre de même rayon. La sphère et le cône sont coupés par un plan parallèle au plan de base, situé à une distance *h* de ce plan. Dans le cas du cône, on s'intéresse au solide formé par le cylindre sans le cône (on fait un trou conique dans le cylindre). Les représentations du bas montrent le plan de coupe en vraies grandeurs, tandis que dans celles du haut, la trace du plan de coupe est un segment (2 segments dans le cas du cylindre ayant un trou conique).

Le calcul des aires des surfaces découpées est assez simple : dans le cas de la demi-sphère comme dans le cas du cylindre ayant un trou conique, l'aire vaut $\pi(r^2-h^2)$.

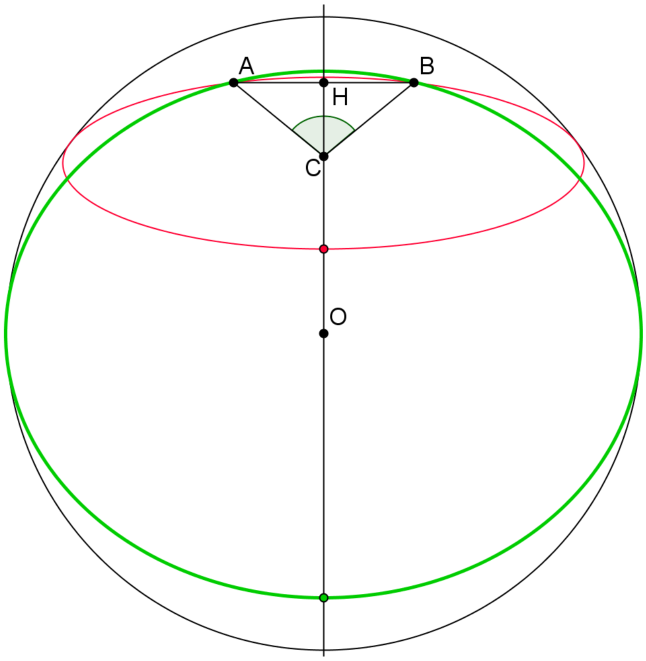
[Vérifier ceci en appliquant les formules habituelles : Pythagore, aire d'un disque]



Comme, pour toutes les valeurs de h comprises entre 0 et r, les aires de coupe de la demi-sphère et du cylindre ayant un trou conique sont égales, selon le principe de Cavalieri[1], les volumes de ces 2 solides sont égaux. Or le volume du cylindre ayant un trou conique est égal à $\pi r^2 h-\frac{\pi r^2 h}{3}=\frac{2\pi r^2 h}{3}$. Le volume de la demi-sphère vaut donc $\frac{2\pi r^2 h}{3}$, comme celui du cylindre ayant un trou conique, et finalement le volume de la sphère complète est le double, soit $\frac{4\pi r^2 h}{3}$.

<u>NB</u> : C'est Archimède (287-212 avant J.-C.) qui montra que le volume d'une sphère vaut 2 tiers de celui du plus petit cylindre la contenant. Considérant que c'était sa plus belle découverte il fit inscrire sur sa tombe le dessin d'une sphère dans un cylindre avec ce rapport caractéristique de 2:3.

<u>Trajet le plus court sur une sphère</u>



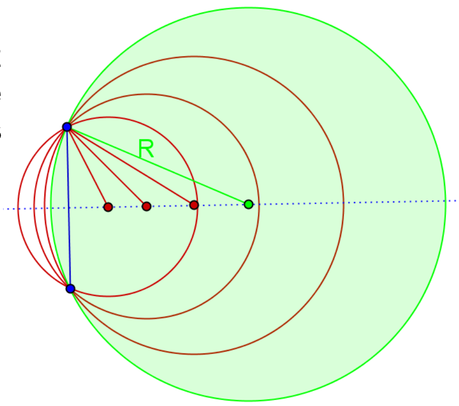
Pourquoi le trajet le plus court entre 2 points d'une sphère est-il l'arc de grand cercle passant par ces 2 points (voir figure où le grand cercle est en vert) ?

Si on considère le segment [AB] qui joint les points en ligne droite, ce segment ne change pas de longueur sur tous les plans ABC où C est le centre d'un petit cercle passant par A et B (voir figure où le petit cercle est en rouge). Notons $2a$ la longueur de ce segment, a est donc égal à AH où H est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. Notons 2α l'angle au centre $\widehat{ACB}$, α étant l'angle au centre $\widehat{ACH}$ qui varie entre 0 et 90°.

D'une part on a $\sin\alpha=\sin\widehat{ACH}=\frac{AH}{AC}=\frac{a}{r}=a\times\frac{1}{r}$ et d'autre part, la longueur λ de l'arc de cercle vaut $\lambda=2\pi r\frac{\widehat{ACB}}{360}=\frac{\pi\alpha}{90}\times r$. On en déduit que $\lambda=\frac{\pi a}{90}\times\frac{\alpha}{\sin\alpha}$.

La longueur de l'arc de cercle est minimale lorsque le rapport $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ est minimal. Il faudra attendre d'être en 1ère S pour montrer que ce rapport est minimal lorsque l'angle α est minimal (car le signe de la dérivée est le même que celui de $\tan\alpha-\alpha$ qui est positif sur [0°;90°]), et donc lorsque $\sin\alpha$ est minimal, et donc finalement lorsque le rayon r est maximal, c'est-à-dire lorsqu'il est égal à R, le rayon de la Terre.

Une autre façon de procéder pour la justification (plus intuitive) est de représenter des cercles admettant le segment [AB] comme corde. Parmi tous les cercles possibles, celui qui conduit au plus petit arc de cercle AB possible est celui qui a le plus grand rayon (cela se voit sur la figure), et justement, le plus grand rayon possible pour un petit cercle d'une sphère de rayon R est le rayon R lui-même, c'est-à-dire qu'alors le petit cercle est un grand cercle...



[1]CAVALIERI Bonaventura Francesco (1548-1647) est un mathématicien italien, élève de Galilée, qui a développé l'idée que si deux solides ont la même hauteur et des sections transversales parallèles identiques, alors ils ont le même volume.