Chapitre 9	Equations, Inéquations et Systèmes

I] Equations

a) Rappels sur les équations du 1er degré à 1 inconnue :

Définitions : une *équation* est une égalité qui contient un nombre inconnu, noté souvent x (mais ce n'est pas une obligation, ce pourrait être y, z, t, n, a, etc.). Lorsqu'on remplace l'inconnu x par un nombre et que l'égalité est vraie, on dit que cette valeur est une solution (ou racine) de l'équation.

Par exemple, dans l'équation $5(x-2) = -1$ l'inconnue est x. Pour la valeur $x = 1$ l'égalité devient $-5 = -1$ ce qui est faux, donc 1 n'est pas une solution de l'équation. Par contre, pour $x = 1{,}8$ l'égalité devient $-1 = -1$ ce qui est vrai, donc 1,8 est une solution de l'équation.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les solutions de l'équation. Il s'agit d'utiliser des méthodes qui transforment l'égalité de départ en d'autres égalités, sans changer les solutions de l'équation. Nous disposons de 4 méthodes :

I. Développement, pour enlever des parenthèses (exemple : $5(x - 2) = 5x - 10$).
II. Factorisation, même partielle, pour réduire (par exemple $5x - 2x = 3x$).
III. Ajout/retrait d'une même quantité aux 2 membres de l'égalité
IV. Multiplication/division des 2 membres par un même nombre différent de zéro.

D'une façon générale, après développements et réductions, une équation du 1er degré se ramène toujours à quelque chose de la forme $ax + b = 0$, comme : $5x - 9 = 0$ dans le cas de notre exemple. Il faut d'abord utiliser la méthode III pour isoler l'inconnu x : on ajouterai 9 des 2 côtés pour trouver $5x = 9$. Ensuite pour conclure, on divise par le coefficient de x des 2 côtés : on diviserai par 5 pour trouver $x = 9 \div 5 = 1{,}8$.

Voici un dernier exemple qui utilise les 4 méthodes :
>Résolvons l'équation : $2x - 5 = 3(5x - 1) - 9$.
>>Tout d'abord développons : $2x - 5 = 15x - 3 - 9 = 15x - 12$.
>>>Maintenant regroupons tout ce qui contient x à gauche : $2x - 15x = 5 - 12 = -7$.
>>>>Factorisons : $(2 - 15)x = -13x = -7$.
>>>>>Divisons par -13 les 2 membres de l'égalité : $x = -7 \div (-13) = 7 \div 13 = \dfrac{7}{13}$.

Pour conclure, précisons que les équations du 1er degré à 1 inconnue ont généralement une solution unique. Parfois, il peut se trouver qu'il n'y ait aucune solution ou qu'il y en ait une infinité. Les 2 exemples suivants illustrent ces derniers cas :

- $15x - 12 = 15x - 11$. Cette égalité revient à $12 = 11$ ou $1 = 0$, ce qui est toujours faux, l'équation de départ n'a aucune solution.
- $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Cette équation semble du second degré (car l'inconnu apparaît sous la forme x^2), mais en réalité, après développement et regroupement dans un même membre, elle revient à $0 = 0$ ce qui est toujours vrai, et donc toutes les valeurs conviennent pour x. L'équation a une infinité de solutions.

b) Equations « produit nul »

Tout d'abord, une remarque : un produit $a \times b$ est nul si l'un des facteurs a ou b est nul. Cette remarque est fondamentale. Pour que $a \times b = 0$, il faut que $a = 0$ ou $b = 0$ (ou les deux). La contraposée de cet énoncé est : si les deux nombres a et b sont différents de 0 alors le produit $a \times b$ est différent de 0.

Utilisons cette remarque pour résoudre une équation « produit nul » :

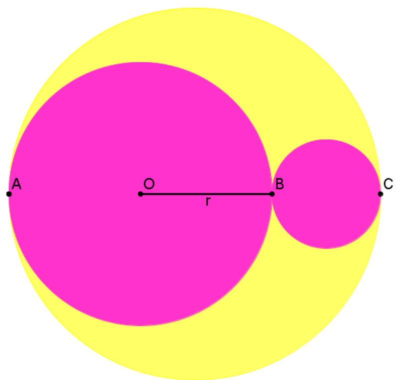
$(15x - 12)(x + 1) = 0$ si $15x - 12 = 0$ ou si $x + 1 = 0$, c'est-à-dire si $x = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$ ou $x = -1$.

C'est extrêmement facile, mais bien sûr, les équations ne sont pas toujours posées sous cette forme. Il va falloir *factoriser* au préalable pour obtenir le produit.

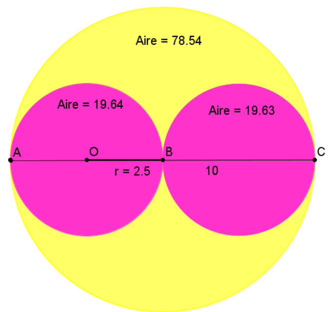
>Supposons que nous ayons à résoudre l'équation : $(5x - 2)^2 = 16$.
>>Dans un premier temps on regroupe tout à gauche : $(5x - 2)^2 - 16 = 0$.
>>>Maintenant factorisons le membre de gauche en reconnaissant l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$: $(5x - 2)^2 - 16 = (5x - 2 - 4)(5x - 2 + 4) = (5x - 6)(5x + 2) = 0$.
>>>>Il ne reste plus alors qu'à résoudre séparément les 2 équations du 1er degré : $5x - 6 = 0$ ou $5x + 2 = 0$, qui reviennent à $x = 6 \div 5 = 1{,}2$ ou $x = -2 \div 5 = -0{,}4$.
Il y a donc 2 solutions à l'équation de départ : 1,2 et -0,4.

Equations du 2d ou du 3ème degré : Généralement on ne sait pas les résoudre en 3ème, mais si l'on arrive à factoriser pour obtenir un produit nul alors c'est gagné !
Par exemple, voici une équation du 3ème degré : $(x - 2)^3 + 4x(x - 2)^2 = 0$. Cela vous inspire ? Il suffit de mettre $(x - 2)^2$ en facteur : $(x - 2)^2((x - 2) + 4x) = 0$ ce qui s'arrange en : $(x - 2)^2(5x - 2) = 0$ et donc il doit y avoir $(x - 2)^2 = 0$ ou alors $5x - 2 = 0$. La première équation n'a qu'une solution car on doit avoir $x - 2 = 0$ et donc $x = 2$; l'autre équation revient à $x = 2 \div 5 = 0{,}4$. Donc finalement, notre équation de départ n'a que 2 solutions qui sont 2 et 0,4.

c) Application à la résolution de problèmes et prolongement:



Voici un disque de diamètre [AC] égal à 10 cm, qu' on recouvre par 2 disques roses de diamètres [AB] (égal à r) et [BC]. On se demande comment choisir r pour que l'aire de la partie rose égale celle de la partie jaune. Ou, en d'autres termes pour que l'aire de la partie rose fasse la moitié du disque de diamètre [AC].
L'aire du disque de diamètre [AC] est $\pi \times 5^2 = 25\,\pi$ cm².
La somme des aires des 2 disques roses est, en cm² :
$\pi \times r^2 + \pi \times ((10 - 2r) \div 2)^2 = \pi \times (r^2 + (5 - r)^2) = \pi \times (2r^2 - 10r + 25)$.
On voudrait donc avoir $\pi \times (2r^2 - 10r + 25) = 25\,\pi \div 2 = 12{,}5\,\pi$.
Ce qui donne après simplification par π :
$2r^2 - 10r + 25 = 12{,}5$.
En enlevant 25 des 2 côtés et en doublant (pour travailler avec des entiers) on obtient : $4r^2 - 20r + 25 = 0$. Il ne reste plus qu'à factoriser en reconnaissant l'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$: $(2r - 5)^2 = 0$. Il n'y a donc qu'une solution au problème : $r = 5 \div 2 = 2{,}5$. Remarquons qu'alors B est le milieu de [AC] et que les 2 disques roses ont le même rayon.



Ce problème vient de la géométrie mais on peut rencontrer ce type de situation partout. La seule difficulté est la factorisation. Car en 3ème, si on tombe sur une équation du 2d degré qui ne se factorise pas facilement, on est bloqué. Que penseriez-vous de cette équation : $4x^2 - 20x + 1 = 0$? L'idée qui sera exploitée en 2de est de se ramener au cas précédent, en remarquant que $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$ et que l'on a $4x^2 - 20x + 25 - 25 + 1$ soit $(2x - 5)^2 - 24$. Cette dernière expression peut, à son tour, être factorisée avec l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$…

Rassurez-vous, au Brevet des Collèges, les seules questions sur ce sujet sont du genre : « On considère l'expression $E = (x - 5)^2 - (x - 5)(7x - 2)$. Développer et réduire G. Factoriser G. Calculer G pour $x = -3$. Résoudre l'équation $(x - 5)(2x + 1)$. » Vous n'omettrez pas de remarquer qu'on donne dans la dernière question, la réponse à la 2ème question (le facteur $(2x + 1)$)…Ils sont trop gentils tout de même ces profs de maths, non ? Il faut dire que nombreux sont les étourdis qui s'embrouillent les signes avec le facteur $(x - 5) - (7x - 2) = x - 5 - 7x \mathbf{+} 2 = -6x - 3 = -3(2x + 1)$.

II] Inéquations

a) Inéquations du 1er degré à 1 inconnue :

Une inégalité est une comparaison entre 2 nombres.
Par exemple $1 < 2$, $1 > 0$, $1 \leq 2$, $1 \geq -1$ sont des inégalités vraies ; $1 \leq -2$, $2 \geq 3$, $0 < -1$, $3 > \pi$ sont des inégalités fausses.

Remarque : les symboles $\leq$ et $\geq$ sont des « inégalités au sens large », on les emploie lorsqu'on accepte que les 2 membres soient égaux (par exemple $1 \leq 1$ est vrai alors que 1<1 est faux).

Définition : une *inéquation* est une inégalité qui contient un nombre inconnu, noté souvent x (mais pas toujours). L'inégalité doit être vérifiée par le nombre x, on dit alors avoir une solution de l'inéquation.

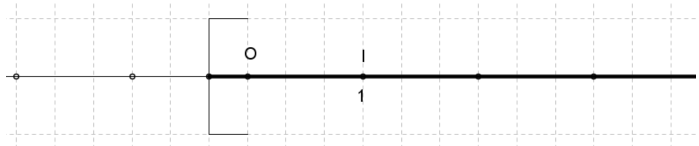
Par exemple, dans l'inégalité $3x + 1 \geq 0$ on cherche à savoir pour quelles valeurs de l'inconnue x la somme $3x + 1$ est positive ou nulle. On peut essayer plusieurs valeurs et trouver plusieurs solutions : pour $x = 1$ on trouve $4 \geq 0$ ce qui est vrai, donc 1 est une solution de l'inéquation. Mais pour $x = 0$ on trouve $1 \geq 0$ ce qui est aussi vrai, donc 0 est une autre solution de l'inéquation. De même 2, 3, 4 sont des solutions de cette inéquation. Il y a une infinité de solutions, mais tous les nombres ne sont pas des solutions, par exemple -1 n'est pas solution car $-2 \geq 0$ est faux. -2 et -3 ne sont pas non plus des solutions. Est-ce à dire que tous les nombres négatifs ne sont pas solutions ? Non car -0,1 est une solution (car $0{,}7 \geq 0$). Pour caractériser les solutions, il faut transformer l'inégalité de départ, comme on l'a fait pour les équations, à l'aide des 4 méthodes précédemment citées. Une seule de ces méthodes doit être précisée dans le cas des inéquations.

Les méthodes I, II et III de transformation des équations peuvent être adaptées sans problème au cas des inéquations. La méthode IV doit être précisée :

- Dans le cas où on multiplie/divise par un nombre **positif**, il n'y a pas de changement (exemple : si $3x < 2$ alors $x < 2 \div 3$).
- Dans le cas où on multiplie/divise par un nombre **négatif**, <u>il faut changer le sens de l'inégalité</u> (exemple : si $\mathbf{-3}x \mathbf{<} 2$ alors $x \mathbf{>} 2 \div (\mathbf{-3})$ c'est-à-dire $x > -2 \div 3$.)

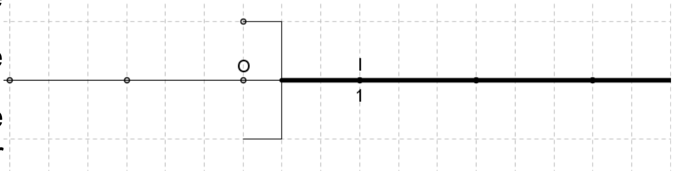
Remarque : Le changement de sens de l'inégalité peut être évité en échangeant les nombres de côté. Par exemple, $-3x < 2$ peut être échangé en $-2 < 3x$ (on utilise pour cela la méthode **III**) quitte à lire l'inégalité à l'envers : $3x > -2$ qui se résout simplement en divisant par un nombre positif (3).

Dans notre exemple, pour l'inéquation $3x + 1 \geq 0$, il faut tout d'abord « faire passer le 1 de l'autre côté ». On obtient $3x \geq -1$. Il faut ensuite diviser par 3, qui est positif (donc on ne change pas le sens de l'inégalité). On obtient $x \geq -1 \div 3$. Il faut donc que x soit plus grand ou égal à $-1 \div 3$. Les valeurs décimales -0,3 -0,33 ou -0,333 conviennent car $-1 \div 3 = -0{,}3333\ldots$ (des 3 jusqu'à l'infini). Par contre la valeur -0,4 ne convient pas car elle est trop petite. On peut représenter les valeurs qui conviennent sur un axe gradué où figure la valeur limite $-1 \div 3$ (qu'on préfèrera noter sous sa forme fractionnaire $-\frac{1}{3}$). Sur cette représentation graphique, le domaine des solutions est en trait gras :

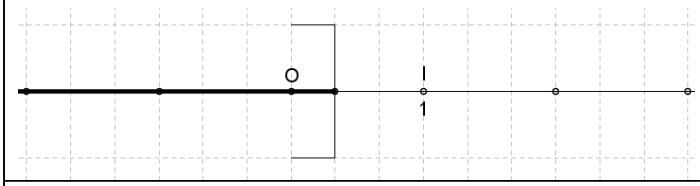
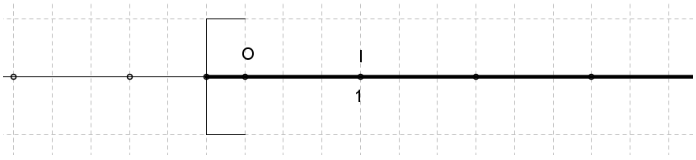
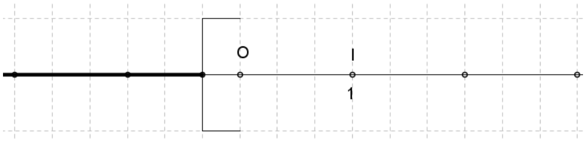
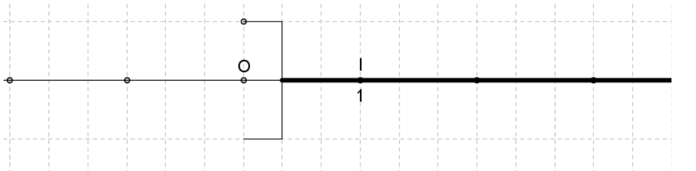


Remarque :Le crochet tracé sur la valeur limite $-\dfrac{1}{3}$ indique qu'on inclut la valeur limite dans les solutions.

Un autre exemple, histoire de montrer comment on indique sur la représentation graphique des solutions que l'on souhaite exclure la valeur limite des solutions. Résolvons l'inéquation $4 < 3(x + 1)$. D'abord développons : $4 < 3x + 3$. Ensuite regroupons : $4 - 3 < 3x$, soit $1 < 3x$. Divisons maintenant par 3 et renversons l'inégalité pour la lire dans le bon sens $x > 1 \div 3$ ou $x > \frac{1}{3}$. Les solutions de cette inéquation peuvent être représentées par le domaine en gras, limité par un crochet ouvert, pour montrer qu'on exclut la valeur limite $\frac{1}{3}$.



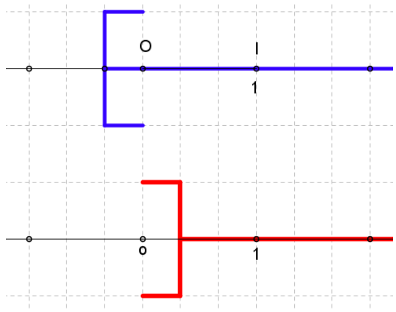
Remarque : Bien sûr vous rencontrerez les autres configurations, correspondant aux signes < et ≤ (les solutions sont « à gauche » de la valeur limite). Pour ces configurations les crochets seront tournés de manière symétrique, pour indiquer l'inclusion ou l'exclusion de la valeur limite dans les solutions.

$x \leq \frac{1}{3}$ 	$x \geq \frac{1}{3}$ 
$x < \frac{1}{3}$ 	$x > \frac{1}{3}$ 

b) Système d'inéquations du 1er degré à 1 inconnue :

Cette partie est traitée ici juste pour montrer l'utilité de la représentation graphique, et pour faire office de transition avec les systèmes d'équations. Supposons donc que nous ayons à résoudre *simultanément* 2, ou plus de 2, inéquations de la même variable inconnue x. Le principe est de résoudre séparément chacune des inéquations et de conclure en prenant les solutions qui satisfassent toutes les inéquations.

Exemple : Résolvons le système suivant $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 4 < 3(x+1) \end{cases}$. Nous avons vu comment chacune de ces inéquations été résolues, et donc nous obtenons le système solution suivant $\begin{cases} x \geq \dfrac{-1}{3} \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases}$ qui peut se résumer par le graphique ci-contre.



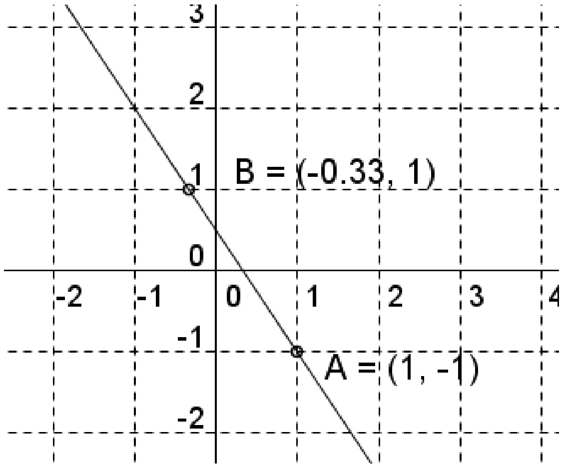
Nous voyons que pour satisfaire les 2 inéquations simultanément, il suffit que le nombre x satisfasse le 2de, c'est-à-dire $x > \frac{1}{3}$.

Le programme ne va pas plus loin, mais un lecteur soucieux d'envisager toutes les possibilités peut, avec profit, chercher à résoudre les systèmes suivants : $S_1 \begin{cases} 2(x-2) \leq x-1 \\ x(x+1) < x^2-1 \end{cases}$ et $S2 \begin{cases} 6+x(\pi-1) > x(\pi+1) \\ 2\pi\sqrt{2}(x-\pi) > 0 \end{cases}$. Ces systèmes conduisent aux solutions suivantes : $-1 < x \leq 3$ (encadrement) pour S_1 et Ø (aucune solution) pour S_2.

III] Systèmes d'équations

a) Equations du 1er degré à 2 inconnues : Une égalité contenant 2 inconnues, notées ici x et y, est appelée équation du 1er degré à 2 inconnues. Par exemple $3x + 2y - 1 = 0$ est une équation du 1er degré à 2 inconnues. On peut essayer quelques valeurs de x et calculer la valeur de y correspondante. Par exemple, si $x = 1$ alors $2y - 1 = 0$ et donc $y = 1 \div 2 = 0,5$. On peut faire le contraire, choisir y et calculer x : si $y = 1$ alors $3x + 2 - 1 = 0$ et donc $x = -1 \div 3$. Mais on comprendra vite qu'il y a une infinité de solutions. Si l'on place dans un graphique les points de coordonnées (x ; y) qui satisfont l'équation, on se trouve face à des points alignés ! Voici ce que l'on obtient pour l'équation $3x + 2y - 1 = 0$: cette droite qui contient les points

A(1 ;-1) et B($\frac{-1}{3}$;1) a une équation qu'on peut écrire 2y -1 = -3x ou, ce qui revient au même y = $-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$. Vous reconnaîtrez sans peine ici l'équation de la droite représentant la fonction affine $x \mapsto -\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$. Et pour cause, toutes les équations du 1^er^ degré à 2 inconnues ont pour solutions les couples (x ; $f(x)$) issus d'une même fonction affine f.



b) Système de 2 équations du 1^er^ degré à 2 inconnues :

Un tel système demande qu'on satisfasse *simultanément* les 2 équations. Si on a bien compris la remarque précédente, cela signifie qu'un couple solution (x ; y) doit être simultanément sur deux droites représentant 2 fonctions affines f et g. Il ne peut s'agir que d'un couple unique (les coordonnées du point d'intersection des 2 droites) si les droites se coupent. Il se pourra qu'il n'y ait pas de solution (droites parallèles et disjointes) ou qu'il y en ait une infinité (droites confondues).

Exemple : Supposons qu'on doive résoudre le système $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x+y=2 \end{cases}$. Utilisons une méthode simple à comprendre, la **méthode de substitution**, où il s'agit de remplacer la valeur d'une inconnue (mettons y dans la 2^ème^ équation) d'une équation dans l'autre. Cela donne successivement, $\begin{cases} 2x+3(2+3x)=1 \\ y=2+3x \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+6+9x=1 \\ y=2+3x \end{cases}$; $\begin{cases} 11x=-5 \\ y=2+3x \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{-5}{11} \\ y=2+3\frac{-5}{11} \end{cases}$;

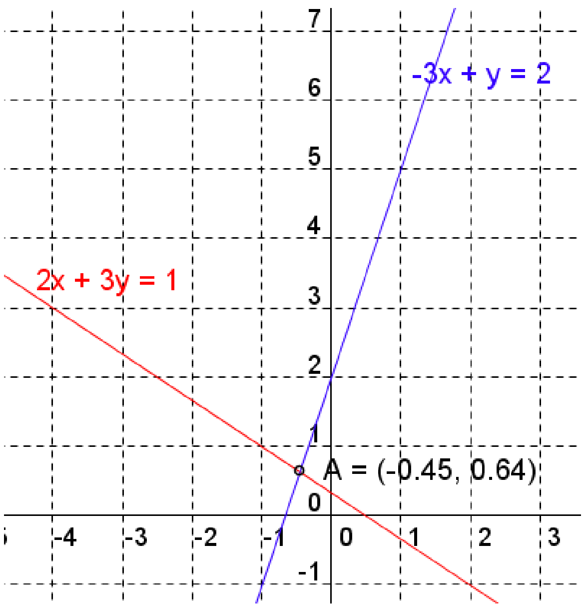
$$\begin{cases} x=\frac{-5}{11} \\ y=\frac{2\times 11+3\times(-5)}{11}=\frac{22+(-15)}{11}=\frac{7}{11} \end{cases}.$$

Et nous voyons que le système admet l'unique solution ($\frac{-5}{11}$;$\frac{7}{11}$).

Vérifions dans la 1^ère^ équation : $2\frac{-5}{11}+3\frac{7}{11}=\frac{2\times(-5)+3\times 7}{11}=\frac{-10+21}{11}=\frac{11}{11}=1$,

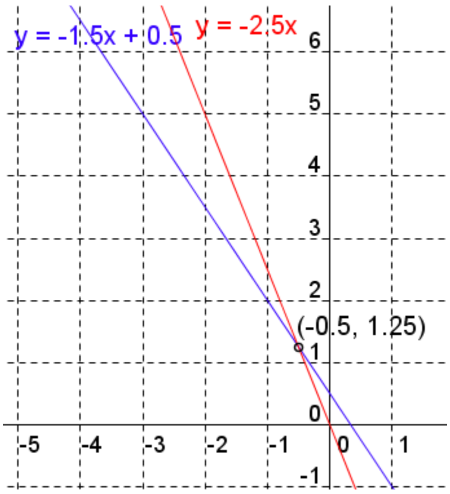
et dans la 2^de^ équation : $-3\frac{-5}{11}+\frac{7}{11}=\frac{-3\times(-5)+7}{11}=\frac{15+7}{11}=\frac{22}{11}=2$

Autre méthode : On ne change pas les solutions d'un système lorsqu'on remplace une ligne (une équation) par une **combinaison** des 2 lignes. On appelle combinaison, la somme d'une certaine de fois la 1^ère^ plus une certaine de fois la 2^de^. Dans notre exemple, si on prend 3 fois la 1^ère^ et qu'on additionne 2 fois la 2^de^, on élimine d'un coup l'inconnue x, ce qui permet de calculer y : $3(2x+3y)+2(-3x+y)=3\times 1+2\times 2$, ce qui donne $6x+9y-6x+2y=3+4=7$ soit $11y=7$.



On retrouve donc notre valeur $y = \frac{7}{11}$ qu'il suffit de réintroduire dans une des équations pour trouver l'autre inconnue, par exemple en faisant $2x + 3 \times \frac{7}{11} = 1$, ce qui donne $2x = 1 - \frac{21}{11} = \frac{11 - 21}{11} = \frac{-10}{11}$ et donc $x = \frac{-5}{11}$.

A quoi cela correspond-il sur un graphique ?
Les 2 droites tracées représentent les solutions des 2 équations, séparément. Le point A est le seul qui satisfasse simultanément les 2 équations. Les coordonnées de ce point sont donc la solution unique du système. Sur le graphique, les coordonnées du point A sont approximatives ; la solution exacte est le couple $(\frac{-5}{11};\frac{7}{11})$.



Dans un problème de Brevet des Collèges, traditionnellement, une des dernières question concerne la résolution graphique d'un système du genre $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ où f et g sont des fonctions affines (une étant souvent linéaire). Par exemple, on étudie un problème où $f : x \mapsto -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ et $g : x \mapsto -\frac{5}{2}x$. La question suivante est posée : « Donnez la valeur de x pour laquelle $f(x) = g(x)$; calculez la valeur correspondante pour y». Le système correspondant à cette question est $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{5}{2}x \end{cases}$ qui appelle fortement une résolution par la méthode de substitution : les deux membres de gauche sont égaux à y, donc $-\frac{5}{2}x = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ ce qui donne $-\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}x = (-\frac{5}{2} + \frac{3}{2})x = \frac{-2}{2}x = -x = \frac{1}{2}$ et donc $x = -\frac{1}{2} = -0{,}5$. Pour y, il faut remplacer dans une des équations : $y = \frac{-5}{2} \times \frac{-1}{2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$. Finalement, la solution du système est le couple (-0,5 ; 1,25) ainsi qu'il apparaît sur le graphique ci-dessus.