Chapitre 7 Racines carrées

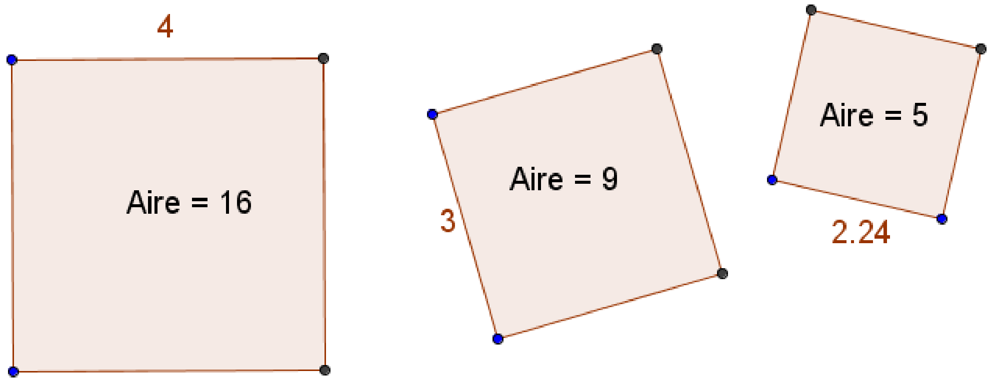
I] Définition

a) Introduction

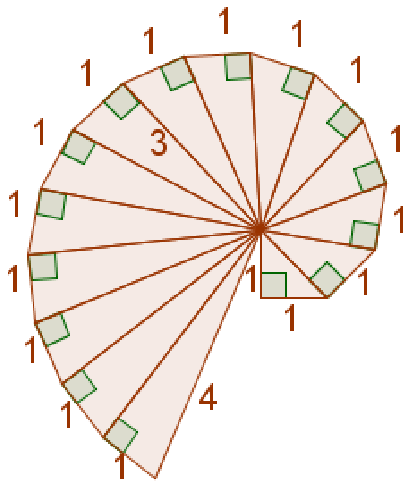
On sait ce qu'est le carré d'un nombre, par exemple : $3^2 = 3\times3 = 9$.
D'une façon générale pour un nombre quelconque a, le carré de a est $a^2 = a\times a$.

Propriété1 : a et son opposé -a ont le même carré.
C'est un cas particulier de la règle des signes : $(-a)^2 = (-a)\times(-a) = a^2$
Ainsi 9 est le carré de 3 et de -3 ; 16 est le carré de 4 et de -4 ; 25 est le carré de 5 et de -5 ; 1,44 est le carré de 1,2 et de -1,2 ; etc.

Propriété2 : Tout nombre positif A est le carré de deux nombres opposés.
Pour se convaincre de cela imaginons un carré d'aire A. Un tel carré existe n'est-ce pas ? On peut bien faire varier le côté d'un carré pour que son aire soit exactement égale à A… Combien mesure alors ce côté ?
Si A vaut 9 c'est 3 (car l'aire d'un carré de côté 3 vaut $3^2 = 3\times3 = 9$) ; si A vaut 16 c'est 4; si A vaut 1,44 c'est 1,2 ; etc. Ce nombre est appelé **racine carrée** de A.



On dira donc que 3 est la racine carrée de 9 car $3^2 = 9$; 4 est la racine carrée de 16 ; 1,2 est la racine carrée de 1,44 ; etc.
Combien mesure exactement le côté d'un carré d'aire égale à 5 ? Sur la figure on lit 2,24 mais $2{,}24^2 = 5{,}0176$. Il s'agit donc d'une valeur approchée. La valeur exacte est « racine carrée de 5 », un nombre qu'on note $\sqrt{5}$ et dont une valeur approchée plus précise est 2,236067977. On peut s'amuser à chercher les décimales de ce nombre, il y en a une infinité et elles ne se répètent jamais de façon périodique comme pour un nombre rationnel. En effet, $\sqrt{5}$, comme $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ ne sont pas des nombres rationnels. Ce sujet a déjà été abordé au chapitre 1, ces nombres ne sont pas *calculables* avec des entiers mais ils sont *constructibles* avec les outils géométriques comme le montre l'illustration ci-contre où l'on a construit des segments de longueurs 1 ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; 2 ; $\sqrt{5}$; etc. (vérifiez cela en utilisant le théorème de Pythagore successivement dans les triangles de plus en plus grand en commençant par le demi-carré de côté 1).



b) Définition

> La **racine carrée** d'un nombre positif a est le nombre positif qui, multiplié par lui-même donne a. On note ce nombre $\sqrt{a}$ (le signe devant a désignant la racine carrée est un radical). Autrement dit si a>0 alors $\sqrt{a}$ >0 et ($\sqrt{a}$)² = a

Remarque : Il y a dans cette définition une *condition d'existence* : $\sqrt{a}$ n'existe que si a > 0. Par exemple $\sqrt{-5}$ n'existe pas. Cette condition conduit à des inéquations. Par exemple : $\sqrt{3x-1}$ n'existe que si $3x$-1 > 0 c'est-à-dire si $3x > 1$ et donc si $x > \frac{1}{3}$.

Autres exemples : $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$; $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$

NB : On utilisera cette définition pour calculer des expressions contenant des radicaux. Par exemple : $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$.
L'utilisation de la calculatrice ne donnerait pour ces expressions que des valeurs approchées. De même, lorsque c'est nécessaire, on simplifiera une expression en mettant des radicaux en facteur.
Par exemple : $3\sqrt{5} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{5} - 4\sqrt{3} = \sqrt{5}(3 + 5) - \sqrt{3}(2 + 4) = 8\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$

II] Propriété

a) racine d'un carré

On a vu qu'un carré est toujours positif (règle des signes) et donc la racine d'un carré existe toujours. $\sqrt{a^2}$ existe que a soit positif ou négatif.
Si a > 0 alors $\sqrt{a^2} = a$, par contre si a < 0 alors $\sqrt{a^2} = -a$ car (-a)² = (-a)×(-a) = a² (voir l'intro du I]). Remarquons que dans ce dernier cas et malgré les apparences, $-a$ est un nombre positif.

Exemples : $\sqrt{5^2} = 5$; $\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$ mais $\sqrt{-3^2}$ n'existe pas.
Pour résumer $\sqrt{a^2}$ est égal à la valeur de a privé de son signe, on appele cela la « valeur absolue » de a et l'on note cela avec deux barres verticales : $\sqrt{a^2} = |a|$.

b) racine d'un produit

Vous connaissez cette propriété de la multiplication : a× (b×c) = (a×c)×b
Utilisons cette propriété pour calculer le produit a × b :

$$a \times b = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} \times \sqrt{a}\right) \times \left(\sqrt{b} \times \sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) \times \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2$$

Si a et b sont positifs, cela signifie que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ (car, d'après la définition, $\sqrt{a \times b}$ est égal au nombre qui, élevé au carré, donne a × b.

Application : on peut décomposer, pour *simplifier*, un radical.
Par exemple : $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
On va utiliser cette propriété pour *réduire* les expressions.
Par exemple :

$$2\sqrt{45} + \sqrt{20} = 2\sqrt{9 \times 5} + \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{9} \times \sqrt{5} + \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = (6 + 2) \times \sqrt{5} = 8 \times \sqrt{5}$$

c) <u>racine d'un quotient</u>

De la même manière on a : $\frac{a}{b} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{a} \times \sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{b} \times \sqrt{b}\right)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$

Et donc, si a et b sont positifs, cela signifie que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

<u>Application</u> : on va décomposer les quotients de radicaux, ou toute expression contenant des radicaux, pour obtenir la forme la plus simple possible.

Par exemple : $\sqrt{\frac{48}{20}} = \frac{\sqrt{16 \times 3}}{\sqrt{4 \times 5}} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ Mais, lorsqu'on a un radical au dénominateur d'une fraction, on préfère la transformer pour n'avoir qu'un entier au dénominateur. Par exemple : $2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{15}$

<u>Préparation du brevet</u> : dans la plupart des sujets de brevet, la seule application de ce chapitre est une expression que l'on doit mettre sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.

Exemple1 (sujet donné en Amérique du Nord en juin 2007), on demande d'écrire C sous la forme $a\sqrt{3}$ et de montrer que D est entier :

$$C = \sqrt{75} + 4\sqrt{27} - 5\sqrt{48}; D = (2 + 4\sqrt{5})(2 - 4\sqrt{5})$$

Exemple2 (Paris, juin 2007), on demande la valeur exacte de $\frac{\sqrt{48}}{2}$

Pour finir, rappelons comment Euclide montra que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel, donc qu'il ne pouvait s'écrire comme un quotient d'entier.

Tout d'abord il supposa qu'il l'était et donc qu'il existait deux nombres entiers a et b tels que la fraction $\frac{a}{b}$ soit irréductible et égale à $\sqrt{2}$. Comme $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, on doit avoir

$$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \sqrt{2} \times \sqrt{2}, \text{ soit: } \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2, \text{ et donc: } \frac{a^2}{b^2} = 2, \text{ finalement: } a^2 = 2b^2$$

Le nombre a^2 est donc pair. Or le carré d'un nombre pair est toujours pair, le carré d'un impair est toujours impair*, de cette propriété il déduisit que a était pair.
Comme a est pair, on peut l'écrire comme le double d'un entier a', et donc on peut écrire $a^2 = (2a')^2 = 4a'^2$. On en déduit que $2b^2=4a'^2$ et en simplifiant par 2 : $b^2=2a'^2$.
Finalement b^2 est pair aussi, et donc b également. Mais si a et b sont pairs tous les deux, la fraction de départ serait simplifiable par 2, ce qui n'est pas possible.
Euclide conclua donc que son hypothèse de départ conduisant à une contradiction, cette hypothèse était fausse. Il n'existe pas de fraction égale à $\sqrt{2}$.

*Le carré d'un nombre pair peut s'écrire $(2n)^2 = 4n^2$ qui est pair. Le carré d'un nombre impair peut s'écrire $(2n+1)^2$ qui se développe en $4n^2+4n+1=4(n^2+n)+1$ ce nombre est la somme de 1 et d'un nombre pair, c'est donc un nombre impair.