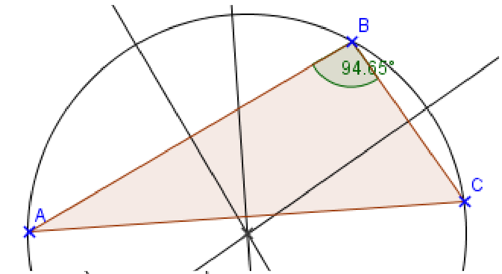
Chapitre 6 — Triangles rectangles et trigonométrie

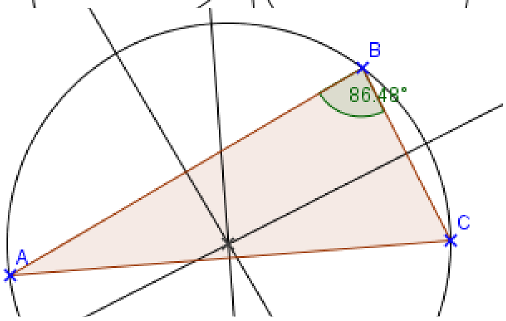
I] Rappels

a) Définition

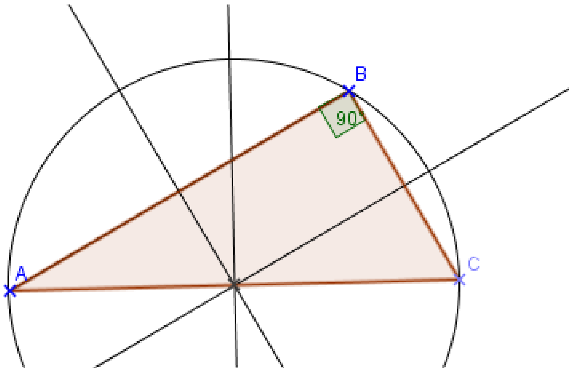
> Un triangle qui a un angle droit est un triangle rectangle. Le côté opposé à l'angle droit est l'*hypoténuse*, c'est le plus grand des trois côtés. Les deux autres angles sont *complémentaires* (leur somme fait 90°).

b) Propriété directe : On peut s'intéresser aux médiatrices des 3 côtés d'un triangle et tracer le cercle *circonscrit* au triangle (qui passe par les 3 sommets). Dans le cas d'un triangle *obtusangle* (qui a un angle obtus)) le centre du cercle circonscrit est extérieur au triangle alors que si le triangle est *acutangle* (qui a un angle aigu) le centre du cercle circonscrit est intérieur au triangle. Lorsque le triangle est rectangle (la frontière entre acutangle et obtusangle) on remarque alors que le centre du cercle circonscrit est au milieu de l'hypoténuse. D'où la propriété 1 : Si un triangle a un angle droit, alors le milieu du plus grand côté est équidistant des sommets, autrement dit c'est le centre du cercle circonscrit au triangle.

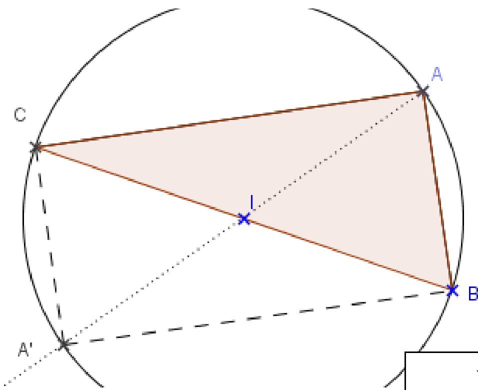




L'hypoténuse est donc le diamètre du cercle circonscrit à un triangle rectangle.



c) Propriété réciproque : prenons un triangle ABC inscrit dans un cercle ayant pour centre I, le milieu de [BC], le plus grand côté, et montrons que ce triangle est rectangle en A. Pour cela construisons, comme sur la figure, le symétrique de A par rapport à I. On obtiens un quadrilatère ABA'C ayant ses diagonales qui ont même milieu et même longueur. Ce quadrilatère est donc un rectangle. L'angle $\widehat{BAC}$ est donc droit.



Pour résumer, si A est un point du cercle de diamètre [BC], alors $\widehat{BAC}$ est un angle droit.

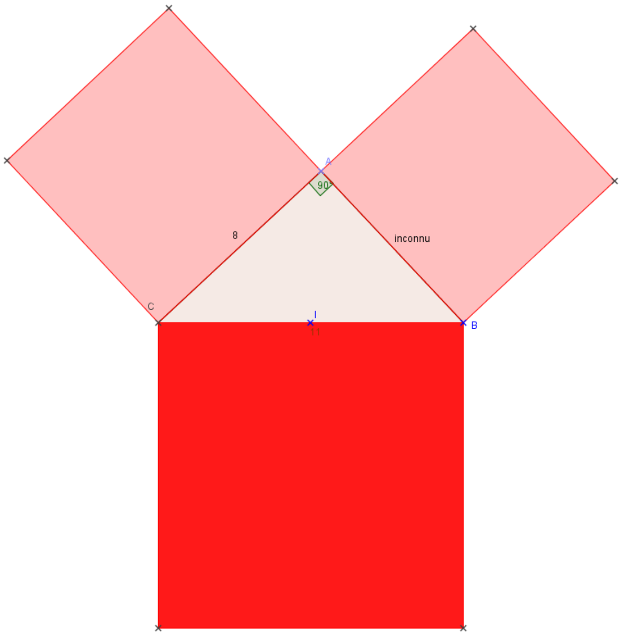
> - Si ABC est rectangle en A alors le milieu I de l'hypoténuse [BC] est équidistant des 3 sommets ; le cercle circonscrit au triangle a donc pour centre ce point I.
>
> - Propriété réciproque : Si un point A appartient au cercle de diamètre [BC] alors le triangle ABC est rectangle en A.

Remarque : Cette dernière propriété est une des façons de montrer qu'un angle est droit, donc que 2 droites sont perpendiculaires.

II] Le théorème de Pythagore

Propriété directe : Si le triangles ABC est rectangle en A alors AB² + AC² = BC²

On peut donc calculer un côté connaissant les 2 autres :



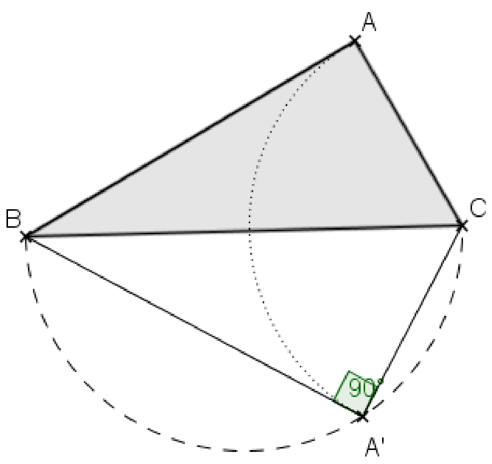
Si, comme dans la figure ci-contre, on a un triangle ABC, rectangle en A, tel que AC = 8 et BC = 11, alors, le théorème nous dit que AC² + BC² = AB², c'est à dire que, en notant x le côté inconnu : $x^2 + 8^2 = 11^2$ et donc $x^2 = 121 - 64 = 57$ et finalement, $x = \sqrt{57} \approx 7{,}55$.

Nous ne démontrerons pas ici ce théorème vu en quatrième, mais il en existe beaucoup de différentes qui pourront être vues dans l'article « compilation internet » de ce chapitre. Une chose à retenir : les aires des deux petits carrés équivalent à celle du grand.

NB : Lorsqu'on utilise un théorème, on ne le cite pas (« si…alors… »), on écrit plutôt : « Le triangle … étant rectangle en …, d'après le théorème de Pythagore, on a …² + …² = …² »

Propriété réciproque : Si, dans un triangle ABC on a AC² + BC² = AB² alors ce triangle est rectangle **en C**. (mais si AB² + BC² = AC² alors il est rectangle **en B**…)

Ex : AB = 9, AC = 12 et BC = 15. Le triangle ABC est-il rectangle ? Si oui en quel point ?
AB² = 81, AC² = 144 et BC² = 225. On remarque que 81 + 144 = 225 et donc, oui, on a la relation AB² + AC² = BC², le triangle ABC est donc rectangle **en A.**



Démonstration : Supposons que ABC est un triangle vérifiant l'égalité AC² + AB² = BC². Prenons un point A' sur le demi-cercle de diamètre [BC] tel que CA' = CA. D'après la propriété réciproque vu dans la partie précédente l'angle $\widehat{BA'C}$ est un angle droit et donc, d'après le théorème direct on a A'C² + A'B² = BC². On en déduit que A'C² + A'B² = AC² + AB², et comme CA' = CA, on a : A'B² = AB². Donc A'B = AB. A et A' sont donc symétriques par rapport à (BC) et par conséquent les angles $\widehat{BA'C}$ et $\widehat{BAC}$ sont égaux, l'angle $\widehat{BAC}$ est donc droit.

Remarque : Cette dernière propriété est *une* façon de montrer qu'un angle est droit. Il faut disposer des longueurs des 3 côtés et montrer clairement (comme dans l'exemple) que la somme des carrés de 2 côtés égale le carré du 3$^{\text{ème}}$ côté.

III] <u>Trigonométrie</u>

a) Définitions

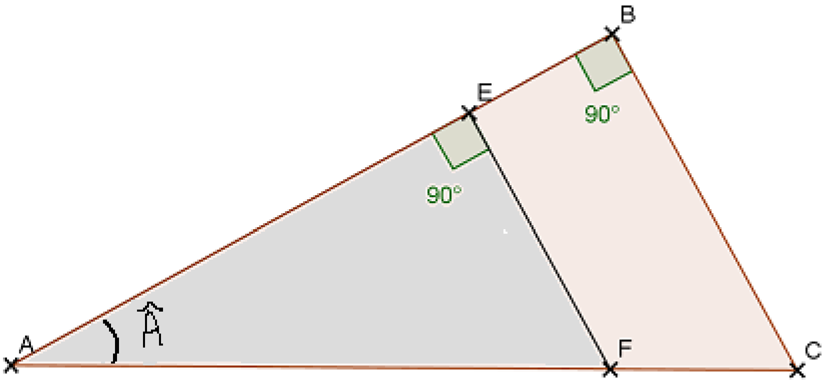
Commençons par observer la figure ci-dessous où (EF) et (BC) sont perpendiculaires à la même droite (AB), donc parallèles entre elles. D'après le théorème de Thalès on peut donc affirmer que : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$. De ces égalités découlent d'autres égalités, par exemple si on multiplie par $\frac{AB}{AF}$ la première, on obtient :

$\frac{AE}{AB}\times\frac{AB}{AF}=\frac{AF}{AC}\times\frac{AB}{AF}$ et donc : $\frac{AE\times\cancel{AB}}{\cancel{AB}\times AF}=\frac{\cancel{AF}\times AB}{AC\times\cancel{AF}}$, d'où finalement : $\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}$.

Ce résultat (établit en 4ème) signifie que le rapport du plus petit côté de l'angle $\widehat{A}$ sur l'hypoténuse ne dépend pas des longueurs. Ce rapport ne dépend que de l'angle, on l'appelle **cosinus** de l'angle $\widehat{A}$ et on le note $\cos\widehat{A}$. D'où, d'une façon générale :

$$\cos\widehat{A}=\frac{\text{côté adjacent à }\widehat{A}}{\text{hypoténuse}}$$

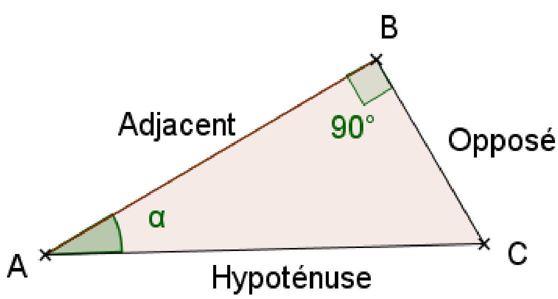
(on appelle côté adjacent à $\widehat{A}$ le côté de l'angle $\widehat{A}$ qui n'est pas l'hypoténuse).



De la même façon on montre les égalités :

$\frac{EF}{AF}=\frac{BC}{AC}$ et $\frac{AF}{AE}=\frac{BC}{AB}$

Ces égalités permettent de définir deux autres quantités qui ne dépendent pas des longueurs, uniquement de la mesure de l'angle $\widehat{A}$. Ces quantités sont appelées respectivement **sinus** et **tangente** de l'angle $\widehat{A}$. On les note $\sin\widehat{A}$ et $\tan\widehat{A}$. On retient souvent les définitions suivantes :



$$\sin\widehat{A}=\frac{\text{côté opposé à }\widehat{A}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan\widehat{A}=\frac{\text{côté opposé à }\widehat{A}}{\text{côté adjacent à }\widehat{A}}.$$

Finalement, le mieux est de retenir la formule mnémotechnique « **CAHSOHTOA** » qui signifie :

$$\boxed{C=\frac{A}{H}, S=\frac{O}{H}, T=\frac{O}{A}.}$$

Exemple : Supposons que AB=10km et $\widehat{A}$ =25°. Dans ce cas, on peut écrire :

$\tan\widehat{A} = \frac{BC}{AB}$ et donc $\tan 25^\circ = \frac{BC}{10}$, d'où $BC = \frac{10}{\tan 25^\circ}$ et la calculatrice permet de calculer BC. En effet elle donne tan25°≈0,4663076582 et donc BC≈21,445.
La calculatrice connaît non seulement la valeur de cosα, sinα et tanα pour toutes les valeurs possibles de α, mais aussi elle sait la valeur de α pour toutes les valeurs de cosα, sinα ou tanα. Il faut alors utiliser les touches $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ ou $\tan^{-1}$.
Par exemple, si je tappe $\cos^{-1}(0,7)$ elle me renvoit le nombre 45,572996. Je dois en conclure que si cosα = 0,7 alors α ≈ 45,572996°. En d'autres termes, $\cos^{-1}(0,7)$ est l'angle qui a pour cosinus 0,7.
De la même façon, $\sin^{-1}(0,1)$ est l'angle qui a pour sinus 0,1. C'est environ 5,74°.
Exemple : Un triangle ABC est rectangle en A et tel que AB = 1,2 et AC = 2,7.
Combien mesure l'angle $\widehat{B}$?

$\tan\widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{2,7}{1,2} = 2,25$ et donc $\widehat{B} = \tan^{-1}(2,25) \approx 66,04°$.

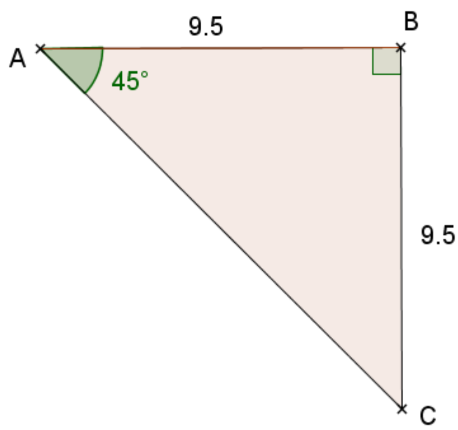
Pour résumer l'utilisation de la calculatrice :
Si on connaît une longueur et un angle, on calcule l'autre longueur
→Exemple : si cos20° = 3÷ x alors x = 3 ÷ cos20°≈3,19.
Si on connaît 2 longueurs on calcule un angle
→Exemple : si cosα = 3/8 alors α = $\cos^{-1}(3/8)$ ≈ 68°

b) Propriétés

Tout d'abord, remarquons que $\cos\widehat{A}$, $\sin\widehat{A}$ et $\tan\widehat{A}$ sont positifs (ce sont des rapports de 2 longueurs) et de plus, comme l'hypoténuse est le plus grand des côtés d'un triangle rectangle, les rapports $\cos\widehat{A}$ et $\sin\widehat{A}$ sont inférieurs à 1. Nous retiendrons que pour l'angle $\widehat{A}$ d'un triangle rectangle on a :

$$0 \leq \cos\widehat{A} \leq 1 \text{ et } 0 \leq \sin\widehat{A} \leq 1.$$

Pour la tangente, c'est différent car selon la valeur de $\widehat{A}$, $\tan\widehat{A}$ est plus ou moins grand que 1. $\tan\widehat{A}$ =1 lorsque le triangle rectangle est isocèle, c'est-à-dire lorsque $\widehat{A}$= 45° (voir le demi-carré ci-contre). On retiendra que pour l'angle $\widehat{A}$ d'un triangle rectangle on a : $0 \leq \tan\widehat{A}$ (il n'y a pas de valeur maximum).

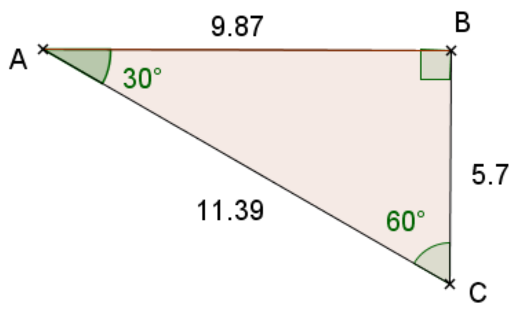


Question : pour l'angle de 45° combien valent le cosinus et le sinus ? Ils sont égaux car alors AB = BC et comme, d'après le théorème de Pythagore AC² = AB² + BC², on a AC² = 2×AB² et donc :

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{2} \text{ d'où } \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707.$$

Finalement on retiendra ces valeurs exactes :

$\tan 45° = 1$, $\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Question : Peut-on calculer d'autres valeurs particulières de $\cos\widehat{A}$, $\sin\widehat{A}$ et $\tan\widehat{A}$? Oui, bien sûr, mais c'est plus ou moins facile. On peut facilement calculer cos30°, sin30°, tan30°, cos60°, sin60° et tan60°.

Voyez la figure ci-contre (un demi-triangle équilatéral) et utilisez comme plus haut le théorème de Pythagore pour montrer que :

	cos	sin	tan
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3} \approx 1{,}732$

Indications :
Il suffit de remarquer que BC = AC÷2 et donc que AB² = $\frac{3}{4}$AC²…

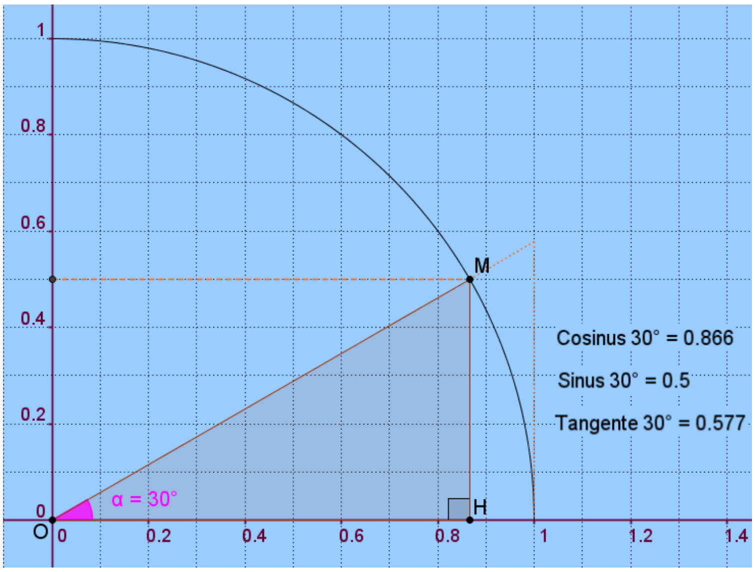
Remarque : On voit dans l'exemple ci-dessus que cos30° = sin60°. C'est une propriété générale pour deux angles complémentaires qui peut s'énoncer pour tout angle α : cosα = sin(90° - α) et réciproquement : sinα = cos(90° - α). C'est très simple à prouver : il suffit, dans les définitions, de permuter adjacent et opposé. Ainsi on a cos12° = sin78°, cos72° = sin18°, etc.

Une autre propriété découle du théorème de Pythagore : pour un triangle rectangle en B, AC² = AB² + BC². En divisant cette égalité par AC² on a :

$$\frac{AC^2}{AC^2} = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} \text{ donc } 1 = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\cos\widehat{A}\right)^2 + \left(\sin\widehat{A}\right)^2$$

Finalement on retient que pour un angle α, on a : (cos α)² + (sin α)² = 1.

Question : si l'on ne peut facilement calculer cos$\widehat{A}$, sin$\widehat{A}$ et tan$\widehat{A}$ pour un angle $\widehat{A}$ quelconque et si l'on n'a pas de calculatrice qui nous en donne une valeur approchée, ne peut-on en obtenir facilement une valeur ? Si, il suffit de tracer un quart de cercle de rayon 1 et de placer sur ce cercle le point M tel que $\widehat{MOH}$ mesure comme $\widehat{A}$. Dans ce cas, l'abscisse de M est cos$\widehat{A}$, l'ordonnée de M est sin$\widehat{A}$ et pour tan$\widehat{A}$, il suffit de prendre la longueur du segment vertical au dessus du point de coordonnées (1 ; 0) comme sur la figure ci-contre. Cette dernière affirmation est justifiée par une application du théorème de Thalès.



Une dernière propriété : on remarque dans les définitions que si on divise sin$\widehat{A}$ par cos$\widehat{A}$, alors on trouve tan$\widehat{A}$. En effet :

$$\frac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}} = \frac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AB}{AC} \div \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AC} \times \frac{AC}{BC} = \frac{AB \times \cancel{AC}}{\cancel{AC} \times BC} = \frac{AB}{BC} = \tan\widehat{A}.$$

D’où pour un angle quelconque α, la relation : $\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$.