3ème Chapitre 5 Calcul littéral

Introduction

Les lettres sont utilisées à la place des nombres dans de nombreuses situations :

- Lorsqu'on travaille avec un nombre connu (par une définition) et invariable comme φ (le nombre d'or, solution positive de l'équation $x^2-x-1=0$), π (le rapport entre le périmètre et le diamètre d'un cercle), *e* (la base des logarithmes), *i* (le nombre imaginaire dont le carré vaut –1), etc.
- Lorsqu'on travaille avec un nombre inconnu et variable (x, t, etc.) ou non (a, α, etc.). Certaines habitudes ont été prises, comme celles qui consistent à utiliser des lettres grecques pour des angles, les lettres du début de l'alphabet pour les nombres invariables, les lettres de la fin de l'alphabet pour les nombres variables (dans l'équation de droite $y=ax+b$, les nombres a et b sont invariables alors que x et y varient), les lettres *i, j, k, m, n, p* pour des entiers ($2n$ est pair tandis que $2n+1$ est impair).

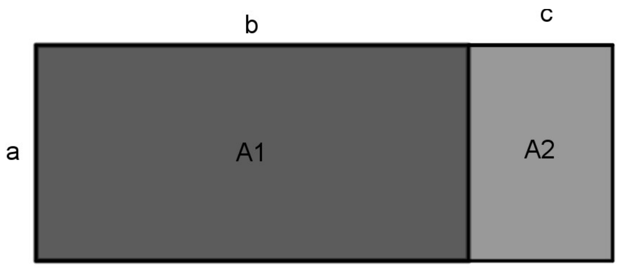
1] Factorisation et développement

a) Rappels sur la distributivité

Il existe une propriété, appelée *distributivité*, qui transforme un produit en somme et réciproquement :

> Si a, b et c sont 3 nombres quelconques alors $a(b+c) = ab + ac$
> De même $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ ou encore $(a + b + c) \times d = ad + bd + cd$

Exemples : $3(x + 1) = 3x + 3$ ou encore : $x(1 + x) = x + x^2$



Cette propriété peut être illustrée par un rectangle dont un des côtés est obtenu par une somme ($b+c$). La propriété nous dit simplement que l'aire de ce rectangle, égale au **produit** de la longueur a par la largeur ($a+b$) vaut la **somme** des aires des 2 rectangles accolés A_1+A_2, obtenues chacune par un produit.

Remarque : On utilise couramment cette propriété depuis les classes primaires lorsqu'on effectue des produits. Par exemple $13\times8=(3+10)\times8=3\times8+10\times8$. On peut donc utiliser cette propriété en calcul mental pour effectuer de tête un produit comme 303×12. En effet, il suffit de considérer 303 comme une somme, $303=300+3$, et de distribuer la multiplication dans la somme : $(300+3)\times12=300\times12+3\times12$. Il n'y a alors plus qu'à effectuer les produits simplifiés $300\times12=3600$ et $3\times12=36$, d'où le résultat final : $303\times12=3600+36=3636$.

Vocabulaire : Lorsque l'expression est écrite comme un produit, on dit qu'elle est *factorisée* (à droite ci-dessous), lorsqu'elle est écrite comme une somme on dit qu'elle est *développée*. Passer de l'écriture développée à l'écriture factorisée s'appelle *factoriser,* on dit aussi *mettre en facteur*. Dans le sens contraire, cela s'appelle *développer*.

← Développer

SOMME $\quad a\times b+a\times c = a\times(b+c) \quad$ PRODUIT

Factoriser →

À partir de cette propriété, on prouve facilement d'autres égalités, comme celles-ci qui étendent la distributivité aux différences (signe –), aux sommes contenant plus de 2 termes, et aux produits dont les deux facteurs sont des sommes. :

> Avec des soustractions : $(a - b)\times c = a\times c - b\times c$; $a\times(b-c) = ab - ac$
> $a\times(b-c+d) = ab - ac + ad$; $a\times(b-c-d) = ab - ac - ad$
> Double distributivité : $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$
> $(a-b)(c+d) = ac - bc + ad - bd$; $(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$

Remarque : À chaque fois qu'il y a une **différence**, il est bon de penser qu'il s'agit de l'**addition de l'opposé** du nombre. De cette façon il n'y a plus que des facteurs constitués comme des sommes et il suffit de respecter la **règle des signes**. On se rappellera en particulier qu'un nombre positif multiplié par un autre nombre ne change pas les signes, alors qu'un nombre négatif multiplié par un autre nombre change tous les signes.

x	+1	-1
+1	+1	-1
-1	-1	+1

Développons de cette manière le produit suivant :

$(3-2x)(4x-1) = (3+(-2x))(4x+(-1)) = 3\times 4x + 3\times(-1) + (-2x)\times 4x + (-2x)\times(-1)$

$= 12x + (-3) + (-8x^2) + 2x = -8x^2 + 12x + 2x - 3$ Nous avons ordonné les termes du développement

$= -8x^2 + (12+2)x - 3$ Nous avons réduit l'expression finale au moyen d'une factorisation

$= -8x^2 + 14x - 3$ La forme développée, ordonnée et réduite équivalente à la forme factorisée du début

On peut rappeler également cette autre conséquence de la règle des signes : **un signe moins devant une parenthèse change tous les signes** pour les nombres qui sont à l'intérieur de la parenthèse. C'est comme si on distribuait une multiplication par (– 1) à l'intérieur d'une somme :

$$-(a+b) = -a-b \;;\; -(a-b) = -a+b \;;\; -a(b+c) = -ab-ac \;;\; -a(b-c) = -ab+ac$$

Développons de cette manière l'expression mixte (ni un produit, ni une somme) suivante :

$(3-2x)(5+3x) - (4x-1)(5x+1) = 15 + 9x - 10x - 6x^2 - (20x^2 + 4x - 5x - 1)$

$= 15 + 9x - 10x - 6x^2 - 20x^2 - 4x + 5x + 1$ Nous avons changé les signes dans la parenthèse

$= (-6-20)x^2 + (9-10-4+5)x + 16$ Nous réduisons l'expression finale en factorisant

$= -26x^2 + 16$ La forme développée, ordonnée et réduite équivalente à la forme du début : le terme contenant les x a disparu car le coefficient réduit est nul

Nous n'avons pas donné d'exemples de factorisations, sauf des réductions qui sont survenues dans les développements. Pourtant cette transformation est très fréquente, très utile, et parfois n'est pas évidente car le facteur commun est dissimulé. Voyons quelques exemples :

$9x - 10x = (9-10)x = -1x = -x$ factorisation que l'on fait pour réduire une expression

$144x^2 + 12x = 12x\,(12x+1)$ Le 1er terme se décomposait en $12^2x^2 = (12x)^2 = 12x\times 12x$ et le 2d en $12x\times 1$

$2(5x+1) + 3x(5x+1) = (2+3x)(5x+1)$ Le facteur commun était ici $(5x+1)$

$(x-1)(5x-3) + 2x(10x-6) = (x-1+2x\times 2)(5x-3) = (-3x-1)(5x-3)$ Le facteur commun était ici $(5x-3)$ mais il était légèrement dissimulé dans le 2ème terme où on avait $(10x-6) = 2(5x-3)$

Nous n'insisterons pas davantage sur ces factorisations et développements qui ont été étudiés en classe de 4ème. Ils se rencontreront de toute façon dans les exercices de 3ème, mélangés avec celles et ceux qui relèvent du programme spécifique à cette classe et qui utilisent les identités remarquables.

b) Identités Remarquables

Trois développements sont particulièrement utilisés, on les appelle les *identités Remarquables* et sont à apprendre par cœur ! Elles ont un nom un peu auréolé de mystère mais sont très simple, les voici :

1ère identité (carré d'une somme) : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2ème identité (carré d'une différence) : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3ème identité (différence de carrés) : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ces égalités sont faciles à obtenir :

$(a+b)^2 = a\times a + a\times b + b\times a + b\times b = a^2 + \underline{ab + ba} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$, car $ab = ba$.

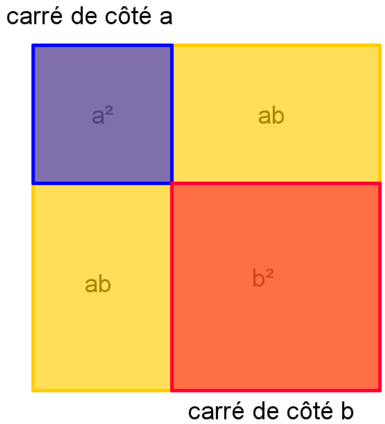
$(a-b)^2 = a\times a - a\times b - b\times a + b\times b = a^2 \underline{- ab - ba} + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$(a+b)(a-b) = a\times a - a\times b + b\times a - b\times b = a^2 \underline{- ab + ba} - b^2 = a^2 + 0 - b^2 = a^2 - b^2$.

Attention ! L'erreur la plus fréquente concernant les identités remarquables consiste à oublier le double produit et d'écrire $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ou bien $(a-b)^2 = a^2 - b^2$. Disons-le une fois pour toutes : **ces deux égalités sont fausses** ! Sauf pour quelques cas particuliers comme $(0+a)^2 = 0^2 + a^2 = a^2$. Vérifiez-le encore sur des exemples comme celui-là : $(10+1)^2 = 11^2 = 121$ alors que $10^2 + 1^2 = 100 + 1 = 101 \neq 121$.

Remarques : Alors que les deux premières identités se ressemblent beaucoup, la 3ème identité se distingue par la présence de **2 termes au lieu de 3** dans la forme développée. Aussi, les deux premières identités vont servir surtout à développer tandis que la troisième va servir surtout à factoriser.

Une illustration géométrique de la 1ère identité est cette figure où on calcule l'aire d'un carré de côté $a+b$ en le découpant en 4 de manière à avoir les carrés de côtés a et b.



Voici trois exemples de développements utilisant cette 1ère identité :

$(x+3)^2 = x^2 + 2\times3\times x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$2012^2=(2000+12)^2 = 2000^2 + 2\times2000\times12 + 12^2$

$\quad = 4\,000\,000 + 48\,000+144=4\,048\,144$

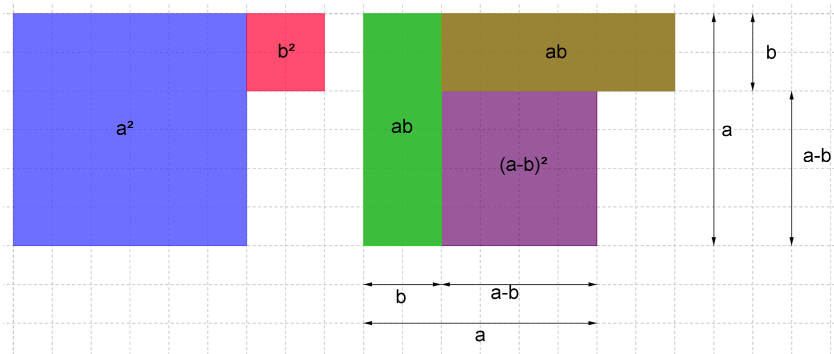
$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\sqrt{2}^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+3=5+2\sqrt{6}$

NB : Pour ce dernier calcul nous avons utilisé quelques notions sur les racines carrées qui ne seront étudiées qu'ultérieurement, en particulier le produit des racines est égal à la racine du produit, et donc $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}$

Autres exemples : cette identité permet de montrer que le carré d'un nombre impair est impair. En effet, un nombre impair peut s'écrire $2n+1$ (n étant un entier) et donc son carré vaut $(2n+1)^2 = (2n)^2 + 2\times2n\times1 + 1^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2+2n) + 1 = 2n' + 1$ où n' est bien un entier impair égal à $2n^2+2n$.

De la même façon, montrez que le carré d'un nombre impair de la forme $4n+3$ est un nombre impair de la forme $4n+1$; le carré d'un nombre impair de la forme $4n+1$ est un nombre impair de la forme $4n+1$; le produit d'un nombre impair de la forme $4n+3$ par un nombre impair de la forme $4n+1$ est un nombre impair de la forme $4n+3$.

L'illustration géométrique de la 2ème identité est un peu plus « tirée par les cheveux ». Voyez cette figure où on calcule l'aire d'un carré de côté $a - b$ (en violet) en découpant de 2 façons différentes la figure formée des 2 carrés de côtés a et b.



D'après ces figures on a :

$a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$

En enlevant le double-produit $2ab$ de cette égalité, on obtient l'identité cherchée.

Voici quatre exemples de développements utilisant cette 2ème identité :

$(x - 1)^2 = x^2 - 2\times1\times x + 1^2 = x^2 - 2x + 1$

$1999^2=(2000 - 1)^2 = 2000^2 - 2\times2000\times1 + 1^2 = 4\,000\,000 - 4\,000+1=3\,996\,001$

$(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2=\sqrt{5}^2-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=5-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}+3=8-2\sqrt{15}$

$(2x - 1)^2 = (2x)^2 - 2\times2x\times1 +1^2 = 4x^2 - 4x +1$

On pourrait illustrer géométriquement la 3ème identité mais cela nous semble un peu inutilement compliqué. Nous devons nous en remettre aux seules expressions algébriques de ces relations. En voici quelques exemples dans le sens de la factorisation (une différence de carrés est exprimée par un produit) :

$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$

$9x^2 - (x+1)^2 = (3x)^2 - (x+1)^2 = (3x - (x + 1))(3x + (x + 1)) = (2x - 1)(4x + 1)$

$x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$ Lorsque, dans la différence, le carré n'est pas évident comme ici, on doit utiliser les racines carrées. Voici un exemple un peu plus difficile :

$2x^2 - (x - 3)^2 = (\sqrt{2}x)^2 - (x - 3)^2 = (\sqrt{2}x - (x - 3))(\sqrt{2}x + (x - 3)) = ((\sqrt{2} - 1)x + 3)((\sqrt{2} + 1)x - 3)$.

Remarque : Évidemment, il est toujours possible de factoriser avec les 2 premières identités, mais cela reste assez théorique : $x^2 - 6x + 3 = x^2 - 2\times3\times x + 3 = (x - 3)^2$. Ce genre de situation ne se trouve que rarement dans « la nature », car il faut qu'il y ait 3 termes (et non 2 seulement) qui se prêtent à la factorisation, sans quoi celle-ci est impossible. C'est pourtant cette égalité que l'on va utiliser en classe de 2de pour factoriser une expression pourtant réputée infactorisable comme $x^2 - 4x + 3$: on va reconnaître, dans $x^2 - 4x$, le début du développement de $(x - 2)^2$ qui donne $x^2 - 4x + \mathbf{4}$ et donc écrire

$x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ qui peut maintenant être factorisé à l'aide de la 3ème identité remarquable

$(x - 2)^2 - 1 = (x - 2)^2 - 1^2 = (x - 3)(x - 1)$ et donc $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$.

Un autre exemple de factorisation non évidente qui utilise le même principe (reconnaître le début du développement d'une expression et compenser par une soustraction de ce qui manque) : factorisons $1 + x^4$.

Cette expression semble non factorisable, cependant, on sait que $(1+x^2)^2=1+2x^2+x^4$ et donc $1+x^4=(1+x^2)^2-2x^2$ et là, on va reconnaître une différence de carrés et utiliser la 3ème identité pour factoriser.
$2x^2=(\sqrt{2}\,x)^2$ et donc $1+x^4=(1+x^2)^2-2x^2=(1+x^2+\sqrt{2}\,x)(1+x^2-\sqrt{2}\,x)$. Voilà, c'est tout!

Quant-à la 3ème identité, elle peut quand même servir à développer (de la même façon qu'un téléphone 3G peut aussi servir à téléphoner...) : $(3x+5)(3x-5)=(3x)^2-5^2=9x^2-25$. Cela peut être utilisé en calcul mental : $1003\times 997=(1000+3)(1000-3)=1000^2-3^2=1\,000\,000-9=999\,991$.
Voici un dernier exemple qui montre que ce développement permet de simplifier parfois une expression : $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})=\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2=5-2=3$. Supposons que nous ayons à calculer une expression contenant le nombre $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$. Nous pouvons utiliser ce qui vient d'être vu pour simplifier (dans le sens de simplifier le dénominateur) cette expression de la manière suivante :
$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{1\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})$. Vous ne trouvez pas que cette expression est plus simple que l'expression de départ ? C'est sans doute parce que, à force d'utiliser les calculatrices, on ne soupçonne pas qu'il est plus facile de diviser par 3 (ici $(\sqrt{5}+\sqrt{2})\div 3\approx(1{,}732+1{,}414)\div 3=3{,}146\approx 1{,}049$) que de calculer l'inverse d'un nombre décimal (ici $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\approx\frac{1}{1{,}732-1{,}414}=\frac{1}{0{,}318}$).

La même expression peut parfois être développée ou factorisée comme cette expression mixte $4x^2-(3x+1)^2$ qui peut être développée en $4x^2-(9x^2+6x+1)=-5x^2-6x-1$.
Cette même expression peut être factorisée à l'aide de la 3ème identité en :
$(2x)^2-(3x+1)^2=(2x-(3x+1))(2x+(3x+1))=(-x-1)(5x+1)=-(x+1)(5x+1)$.
Une propriété démontrée grâce à une factorisation ou à un développement : la différence des carrés de 2 entiers consécutifs semble être la somme de ces entiers ($2^2-1^2=3=2+1$; $3^2-2^2=9-4=5=3+2$; $4^2-3^2=16-9=7=4+3$; etc.) prouvons donc cela en écrivant $(n+1)^2-n^2=(n+1-n)(n+1+n)=1\times(n+1+n)=n+(n+1)$. Notez qu'ici on aurait pu développer pour obtenir le même résultat $(n+1)^2-n^2=(n^2+2n+1)-n^2=2n+1=n+(n+1)$.

Ainsi, il n'est pas toujours évident de savoir s'il faut développer ou factoriser. Parfois on doit faire les deux successivement comme dans un développement complexe où il y a souvent une étape de factorisation (la réduction). Dans un calcul où une somme doit être calculée en premier à cause des parenthèses, il vaut mieux parfois développer (donc calculer les produits avant la somme) comme dans $\sqrt{2}(\sqrt{18}-\sqrt{8})=\sqrt{2}\sqrt{18}-\sqrt{2}\sqrt{8}=\sqrt{2\times 18}-\sqrt{2\times 8}=\sqrt{36}-\sqrt{16}=6-4=2$. Ici on ne pouvait pas calculer la différence des radicaux aussi le développement était obligatoire, mais dans l'exemple suivant, les 2 méthodes sont réalisables et il faut donc choisir : $(\frac{4}{5}-\frac{7}{5})^2=(\frac{4}{5})^2-2\times\frac{4}{5}\times\frac{7}{5}+(\frac{7}{5})^2$ ce développement est faisable mais pas très sympathique, alors que le calcul direct du produit est presque immédiat $(\frac{4}{5}-\frac{7}{5})^2=(\frac{-3}{5})^2=\frac{9}{25}$. On verra plus loin qu'avec les équations, le même dilemme peut se produire : faut-il développer (c'est parfois la seule solution) ou factoriser (pour obtenir une équation-produit-nul) ?

Vous songez à en finir avec les identités remarquables ? Sachez que les identités remarquables étudiées en 3ème sont les plus simples parmi toutes celles qui peuvent être trouvées sur le même modèle. En voici quelques autres qui, bien sûr, ne sont pas à apprendre par cœur (cette liste n'est pas exhaustive car il y en a d'autres, tout autant remarquables) mais vous pouvez, en guise d'exercice, chercher à les prouver :
$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$; $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$
$(a+b)^4-(a-b)^4=8ab(a^2+b^2)$
...
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$; $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$
…
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$; $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$a^4+b^4=(a^2+ab\sqrt{2}+b^2)(a^2-ab\sqrt{2}+b^2)$
$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$
...
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
…

2] Équations

a) Propriétés des égalités – Rappels sur les équations du 1er degré

Propriété 1 : Lorsqu'une égalité est vraie, il est possible de soustraire ou d'ajouter le même nombre aux deux membres de l'égalité tout en conservant l'égalité entre ses 2 membres.

D'une manière générale, si $a = b$ alors $a + c = b + c$ (on a ajouté c aux deux membres de l'égalité).
Dans les même conditions, on aura aussi $a - c = b - c$. C'est comme sur une balance à plateaux : lorsque la balance est équilibrée, on peut ajouter le même poids sur les 2 plateaux de la balance sans perdre l'équilibre. On peut aussi enlever les même poids des 2 côtés sans perdre l'équilibre.

Cette propriété permet de « faire changer de côté » un nombre dans une égalité. Le nombre qui disparaît d'un côté apparaît de l'autre avec son signe qui a changé.
Exemples : Si $x - 3 = 5$ alors $x = 5 + 3 = 8$. On a ajouté 3 aux deux membres de l'égalité de manière à faire disparaître le -3 du membre de gauche, ce qui explique qu'il apparaisse dans le membre de droite sous la forme $+3$. On fait cela pour trouver la solution de l'équation $x - 3 = 5$ qui est $x = 8$.
Si $3t + \pi = 0$ alors $3t = -\pi$. On a soustrait π aux deux membres de l'égalité, pour isoler l'inconnu t dans un bloc produit (il faudra utiliser alors la propriété 2 pour résoudre l'équation).

Propriété 2 : Lorsqu'une égalité est vraie, il est possible de multiplier ou de diviser les deux membres d'une même égalité par le même nombre tout en conservant l'égalité entre ses 2 membres. La seule condition est de ne pas diviser par 0 car c'est impossible.

D'une manière générale, si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$ (on a multiplié par c les deux membres de l'égalité).
Dans les même conditions, si $c\neq 0$, on aura aussi $a \div c = b \div c$.

Cette propriété est une autre façon de « faire changer de côté » un nombre dans une égalité. Il faut, pour appliquer cette propriété, que le nombre qu'on veut faire disparaître soit mis en facteur. Il va disparaître en tant que multiplicateur d'un côté et apparaître de l'autre en tant que diviseur. Voyons cela sur des exemples d'équations que l'on va résoudre grâce à cette propriété :
Si $5x = -1$ alors $5x\div 5=-1\div 5$, soit $x = -\frac{1}{5}$ (on a divisé par 5 les deux membres de l'égalité).
Si $x \div 3 = 5$ alors $x = 5\times 3$ (on a multiplié par 3 les deux membres de l'égalité).
Si $\frac{3}{7}x=12$ alors $\frac{7}{3}\times\frac{3}{7}x=\frac{7}{3}\times 12$, soit $x = x=4\times 7=28$ (on a multiplié par $\frac{7}{3}$, c'est-à-dire par l'inverse de $\frac{3}{7}$ les deux membres de l'égalité, pour faire disparaître $\frac{3}{7}$ du membre de gauche).

Évidemment, la plupart du temps, il faut utiliser conjointement les deux règles. Par exemple, avec les règles ci-dessus transformons l'égalité $2(x - 4) + 12 = 0$ pour trouver quelle valeur doit prendre x. Dans un 1er temps, il faut « faire passer » le 12 à droite du signe =. Il va changer de signe car, en fait, on l'enlève des 2 côtés : $2(x - 4) = - 12$. Ensuite, on peut diviser les 2 membres par 2. Cela donne : $x - 4 = - 6$. Enfin, on va ajouter 4, ce qui va « faire passer » le -4 de l'autre côté et qui va isoler x : $x = 4 - 6 = -2$. La solution de l'équation est donc $x = -2$.

Pour résumer la stratégie de résolution des équations du 1er degré (le nombre inconnu n'apparaît que sous la forme de produits par d'autres nombres, connus ceux-là) :

i. On regroupe du même côté de l'égalité ce qui contient l'inconnue par des ajout ou des retraits.
ii. On factorise pour obtenir dans un membre, le produit de l'inconnue par une facteur k
iii. On divise par le facteur k, afin d'obtenir la valeur de notre inconnue.

En procédant ainsi, les équations du 1er degré en x peuvent toujours se ramener à la forme $ax+b = 0$, où a et b sont des nombres à déterminer. Cette équation possède une seule solution qui est $x=\frac{-b}{a}$.

Exemple d'équation du 1er degré : $5(x^2-2x+1)-x^2+7=(2x-3)^2-3(x+2)$ cela paraît du 2d degré...
$5x^2-10x+5-x^2+7=4x^2-12x+9-3x-6$ nous développons tout, dans les 2 membres...
$(5-1-4)x^2+(-10+12+3)x+(7-9-6)=0$ nous regroupons avec confiance...

$5x-8=0$ et nous voyons que les x^2 disparaissent et qu'une équation du type $ax+b=0$ reste à résoudre...

$x=\frac{8}{5}=1{,}6$ … et voilà, tout simplement. La solution de l'équation du départ est $x=1{,}6$.

b) Équations-produit-nul

Les équations-produits-nul sont des équations du 2^d degré, ou même parfois du 3^ème degré ou d'un d'un degré quelconque, mais qui sont très faciles à résoudre car elles prennent la forme d'un produit de facteurs du 1^er degré, et que ce produit est nul. Or, un produit est nul lorsqu'un des facteurs est nul. Finalement, ces équations se ramènent à un ensemble de 2 ou plus de 2 équations du 1^er degré (on sait toutes les résoudre).

Propriété : Le produit A×B est nul si A=0 ou si B=0 (les 2 peuvent être nuls en même temps ou séparément, peut importe, le résultat sera toujours 0). Il n'y a pas d'autre possibilité.

Application : Résoudre l'équation du 2^d degré $(5x-1)(2-3x)=0$ revient à résoudre les équations du 1^er degré $5x-1=0$ et $2-3x=0$. La première a pour solution $x=\frac{1}{5}=0{,}2$ et la seconde $x=\frac{2}{3}$. Finalement, l'équation du départ a deux solutions : 0,2 et $\frac{2}{3}$. Lorsque $x=0{,}2$ c'est le 1^er facteur qui est nul, alors que lorsque $x=\frac{2}{3}$ c'est le 2^d facteur qui s'annule.

Remarque : ce n'est pas toujours sous cette forme factorisée que l'on trouve les équations-produit-nul. Il faut parfois d'abord effectuer la factorisation qui permet de reconnaître un produit nul.
Voyons cela sur un exemple : $5(x^2-2x+1)+2=2x$.
On peut factoriser l'expression entre parenthèses et tout regrouper à gauche : $5(x-1)^2+2-2x=0$
On reconnaît alors un facteur commun à 2 termes : $5(x-1)^2-2(x-1)=0$
On factorise $(x-1)(5(x-1)-2)=0$ et on arrange un peu le 2^ème facteur $(x-1)(5x-7)=0$
Ce produit est nul si $x-1=0$, soit $x=1$, ou si $5x-7=0$, soit $x=\frac{7}{5}=1{,}4$. Il y a donc 2 solutions à l'équation de départ : 1 et 1,4.

Un autre exemple : résolvons l'équation $4x^2-(x+3)^2=0$.
Reconnaissons une différence de carrés et factorisons $(2x)^2-(x+3)^2=0$; $(2x-(x+3))(2x+(x+3))=0$
Nous obtenons le produit nul suivant $(x-3)(3x+3)=0$
Donc $x-3=0$ ou $3x+3=0$, ce qui conduit à $x=3$ ou $x=-1$.

Un cas particulier : l'équation $x^2=a$ où a est un nombre quelconque.
On doit distinguer 2 cas. Si a est négatif ($a<0$) le carré d'un nombre étant toujours positif, l'équation n'a pas de solution car aucune valeur de x ne peut convenir. Si a est positif ($a>0$) alors on peut trouver un nombre dont a est le carré, ce nombre est $\sqrt{a}$ et par conséquent l'équation de départ peut être reconnue comme une différence de carrés : $x^2-a=0$ équivaut alors à $x^2-(\sqrt{a})^2=0$ et peut donc être factorisé sous la forme $(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$. Cette égalité est vraie si $x-\sqrt{a}=0$ ou si $x+\sqrt{a}=0$. Les solutions de l'équation de départ sont donc $x=\sqrt{a}$ et $x=-\sqrt{a}$.
Pour résumer, l'équation $x^2=a$ a 2 solutions si $a>0$ qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, et n'a aucune solution si a < 0.
Si $a=0$, il y a une seule solution qui est $x=0$.

$t^2=\pi$ a 2 solutions qui sont $x=\sqrt{\pi}$ et $x=-\sqrt{\pi}$.
$y^2+1=0$ n'a aucune solution, car on devrait avoir $y^2=-1$ et ce n'est pas possible.
$(2x-1)^2=5$ a 2 solutions qui sont $2x-1=\sqrt{5}$ et $2x-1=-\sqrt{5}$. D'où on tire $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Sauriez-vous transformer l'équation $x^2-2x-3=0$ de manière à reconnaître une équation du type $X^2=a$?
La méthode consiste à reconnaître le début du développement de $(x-1)^2$:
$x^2-2x-3=(x^2-2x+1)-4=(x-1)^2-4$ et donc l'équation de départ revient à $(x-1)^2=4$ ce qui conduit à $x-1=2$ ou $x-1=-2$. Finalement, on obtient les solutions $x=3$ et $x=-1$.
Avec cette méthode on peut résoudre n'importe quelle équation du second degré.