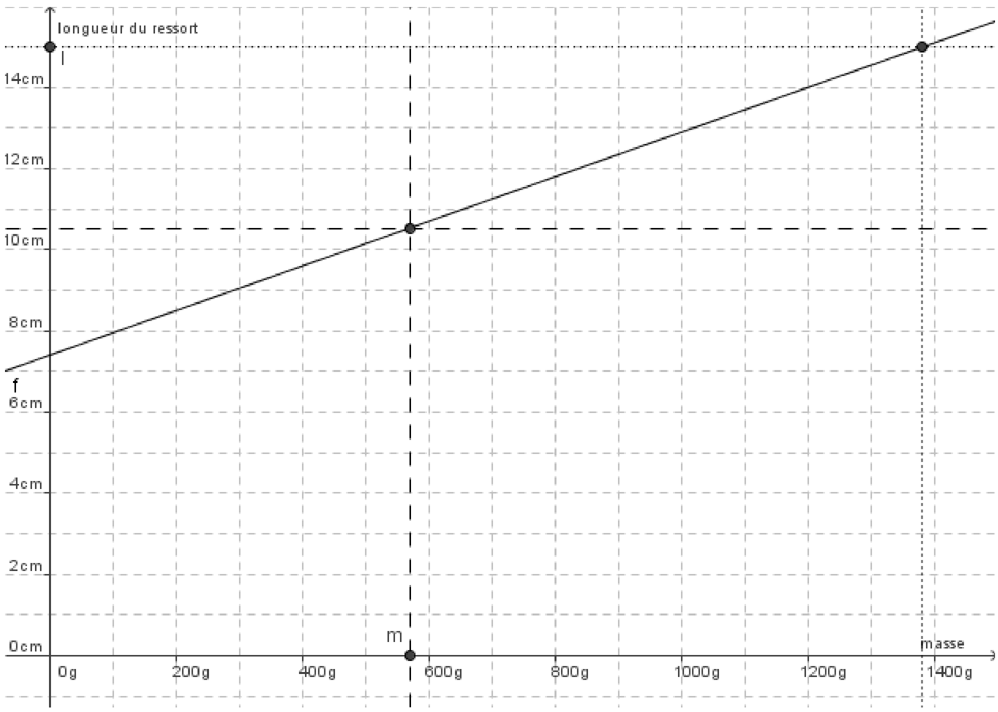
Devoir de 3$^{\text{ème}}$ sur les fonctions et les fonctions affines : CORRECTION

1) a) et b) Avec les données de l'énoncé on peut écrire que : $\ell_1 = a \times m_1 + b$ = 8,5 cm avec m_1 = 200 g, et avec m_2 = 600 g on a : $\ell_2 = a \times m_2 + b$ = 10,7 cm. Donc on a : $a \times 200 + b = 8{,}5$ et $a \times 600 + b = 10{,}7$. Si je soustrais les deux égalités j'obtiens : $a \times 600 - a \times 200 = 10{,}7 - 8{,}5$ ce qui donne $a \times 400 = 2{,}2$ et donc : $a = 2{,}2 \div 400 = 0{,}0055$. Ce nombre est appelé « coefficient d'élasticité du ressort » ou « raideur du ressort » et il est mesuré en cm/g.

Le coefficient b appelé « longueur à vide du ressort » et noté souvent ℓ_0 se calcule en remplaçant a par 0,0055 dans les égalités de départ : $0{,}0055 \times 200 + b = 8{,}5$ et donc $b = 8{,}5 - 0{,}0055 \times 200 = 8{,}5 - 1{,}1 = 7{,}4$. Pour résumer $\ell = 0{,}0055 \times m + 7{,}4$.



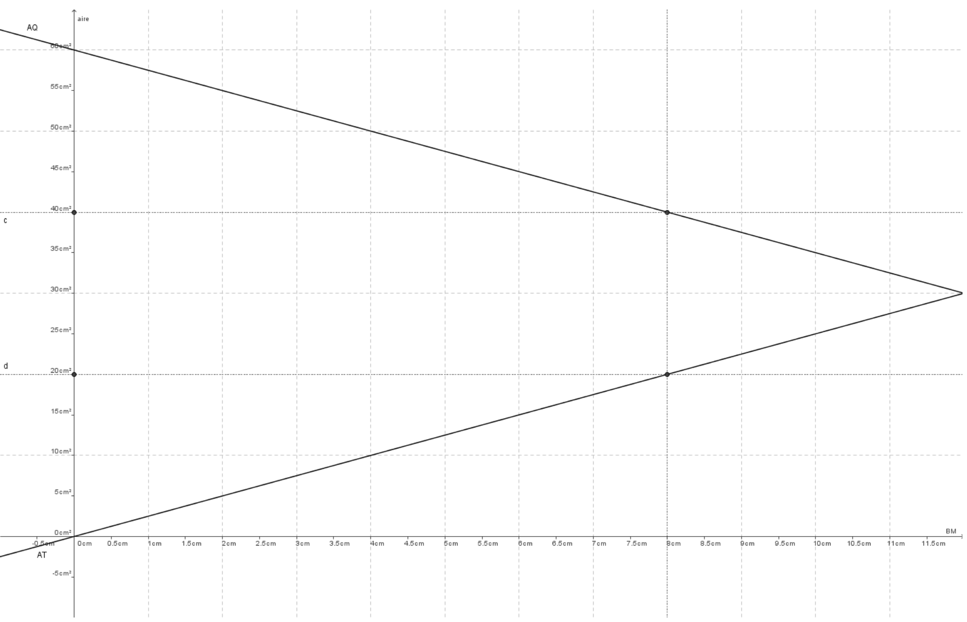
c) et d) Sachant que : $f(x) = 0{,}0055x + 7{,}4$ traçons la représentation graphique de la fonction f pour x compris entre 0 et 1500. (nous avons augmenté les valeurs possibles pour x afin de répondre correctement à la question d)).

En identifiant x et m d'une part, $f(x)$ et ℓ d'autre part, on peut lire que pour x = 570 on a $f(x)$ = 10,5 (traits en tiretets). L'allongement du ressort pour une masse de 570 g est donc d'environ 10,5 cm.

Pour avoir un allongement de 15 cm la masse qu'il faut accrocher est d'environ 1380 g (on lit avec les traits en pointillés que pour $f(x) = 15$, on a $x = 1380$).
Par le calcul on trouve $f(570) = 0{,}0055 \times 570 + 7{,}4 = 10{,}535$, donc environ 10,5 ; pour $f(x) = 0{,}0055x + 7{,}4 = 15$ on trouve $0{,}0055x = 15 - 7{,}4 = 7{,}6$ et donc $x = 7{,}6 \div 0{,}0055 = 1381{,}8181\ldots$, donc environ 1380 g.

2) Aires de polygones :

AM = AB – MB = $12 - x$.



AM est une fonction affine de x , les coefficients a et b sont -1 et 12.

L'aire $\mathcal{A}_T(x)$ du triangle BCM vaut BC×BM÷2 soit $5 \times x \div 2$, soit encore $2{,}5\,x$.

$\mathcal{A}_T$ est une fonction affine de x , c'est même une fonction linéaire de coefficient 2,5.

L'aire $\mathcal{A}_Q(x)$ du quadrilatère AMCD est égale à celle du rectangle ABCD moins celle du triangle BCM, d'où : $\mathcal{A}_Q(x) = 12 \times 5 - 2{,}5\,x = 60 - 2{,}5\,x$.

$\mathcal{A}_Q$ est une fonction affine de x, les coefficients a et b sont $-2{,}5$ et 60.

Représentons graphiquement les fonctions $\mathcal{A}_T$ et $\mathcal{A}_Q$, en prenant x entre 0 et 12 (au-delà de 12 cela n'a pas de sens ici). Sur le graphique on lit que pour $x = 8$, on a : $\mathcal{A}_Q(x) = 2 \times \mathcal{A}_T(x)$, en effet $\mathcal{A}_Q(8) = 40$ et $\mathcal{A}_T(8) = 20$ d'où $\mathcal{A}_Q(8) = 2 \times \mathcal{A}_T(8)$.

3) HYPERBOLE

a) Complétez le tableau de valeurs ci-dessous pour la fonction définie pour $x > 2$ par $f : x \to \frac{x^2-2}{x-2}$ pour $2{,}2 < x < 4{,}2$ en faisant varier x de 0,1 en 0,1. Rappel : lorsqu'on tape ce genre d'expression avec un trait de fraction, il faut ajouter des parenthèses autour du numérateur et du dénominateur.

x	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4	4,1	4,2
$f(x)$	14,2	10,97	9,4	8,5	7,93	7,56	7,3	7,12	7	6,92	6,87	6,84	6,83	6,83	6,85	6,88	6,91	6,95	7	7,05	7,11

b) Vérifiez que cette fonction f passe par une valeur minimale y_m obtenue pour une valeur x_m de x comprise entre 2,2 et 4,2. Recherchez cette valeur minimale y_m et la valeur x_m de x correspondante en effectuant des calculs au voisinage de cette valeur de x de laquelle on s'approche (on ne cherche pas une valeur exacte car ce moyen ne permet pas de la trouver, une valeur approchée au centième suffira).
En effet, on constate qu'entre 3,4 et 3,5 se situe une valeur de x qui minimise la fonction f sur l'intervalle considéré. On peut affiner la précision pour cette valeur particulière de x, notée x_m dans le texte.
La valeur x_m est approximativement égale à 3,414 (valeur approchée au millième le plus proche) et y_m est approximativement égale à 6,828427. Sur le tableur, il faut augmenter davantage la précision pour $f(x)$, car on remarque qu'il faut le double de chiffres de précision sur $f(x)$ pour avoir une certaine précision sur x (2 chiffres pour 1, 4 pour 2, 6 pour 3, ...). Pour information, la valeur exacte de x_m est $2+\sqrt{2} \approx 3{,}414213562$.

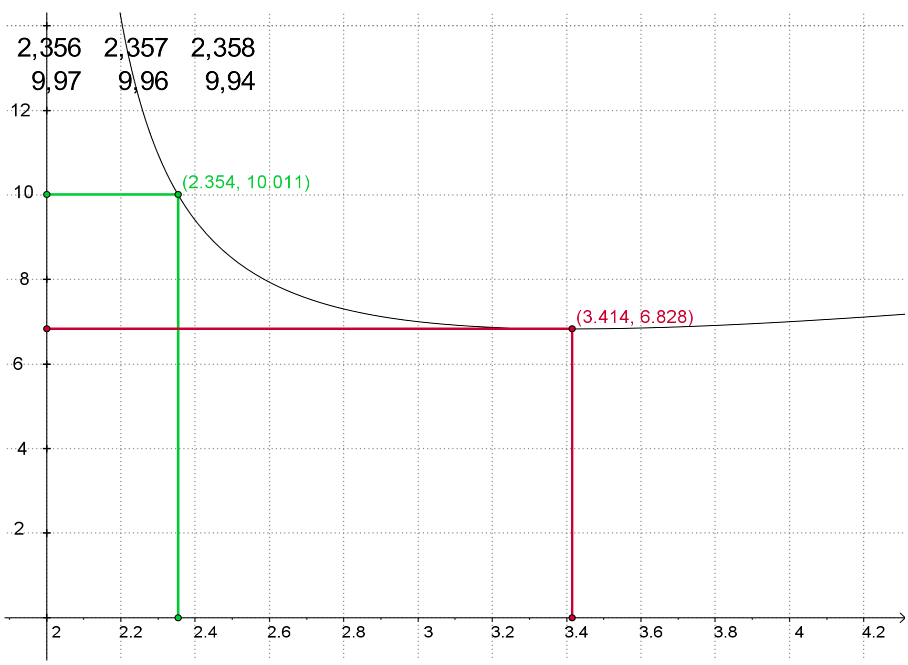
3,40	3,41	3,42	3,4300	3,4400	3,4500	3,4600
6,8286	6,8284	6,8285	6,8286	6,8289	6,8293	6,8299

3,411	3,412	3,413	3,414	3,415	3,416	3,417
6,828434	6,828431	6,828428	6,828427	6,828428	6,828429	6,828433

c) Cherchez de la même façon (par tâtonnements) l' antécédent de 10 par f qui est compris entre 2 et x_m.
L'antécédent de 10 par f est compris entre 2,3 et 2,4 d'après le premier tableau. Si on affine cette valeur, on trouve 2,354 comme valeur approchée au millième. Pour information, la valeur exacte de l'antécédent de 10 par f est $5-\sqrt{7} \approx 2{,}354248689$. Un élève de 3ème peut la trouver en résolvant l'équation $\frac{x^2-2}{x-2}=10$ qui devient, avec l'égalité des produits en croix : $x^2-2=10(x-2)=10x-20$ et donc il faut résoudre l'équation du 2d degré $x^2-10x+18=(x-5)^2-7=(x-5-\sqrt{7})(x-5+\sqrt{7})=0$ (la factorisation un peu spéciale effectuée ici sera vue au chapitre 5, mais relève davantage du programme de la classe de 2de) où, seul le facteur $(x-5+\sqrt{7})$ peut s'annuler sur l'intervalle considéré, ce qui conduit à la solution donnée.

2,31	2,32	2,33	2,34	2,35	2,36	2,37	2,38
10,8	10,6	10,4	10,2	10,1	9,9	9,8	9,6

2,351	2,352	2,353	2,354	2,355	2,356	2,357	2,358
10,05	10,03	10,02	10,00	9,99	9,97	9,96	9,94



Remarque : Les différents aspects que nous venons d'étudier pour cette fonction f sont illustrés par la courbe de la fonction sur cet intervalle.