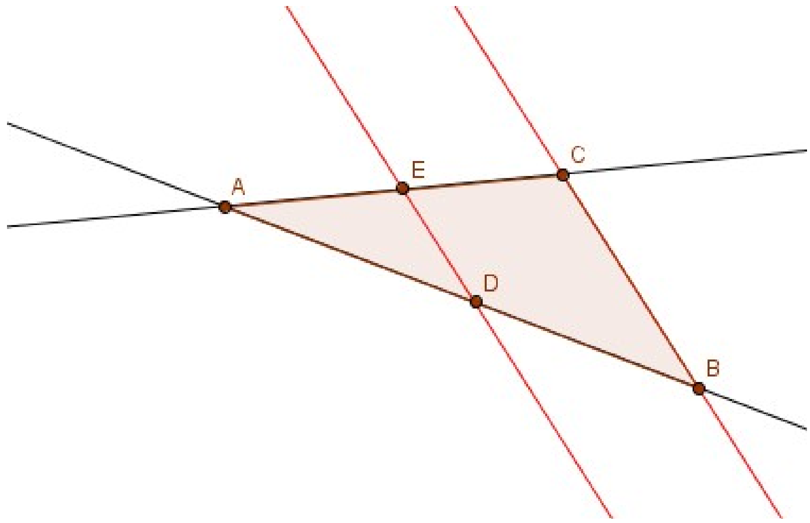
1) Sens direct

a) Généralisation

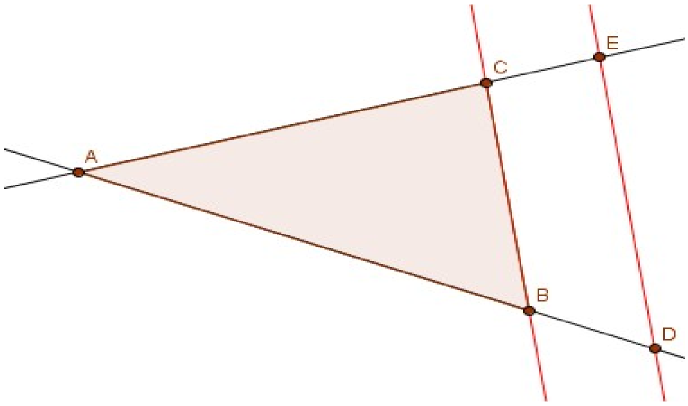


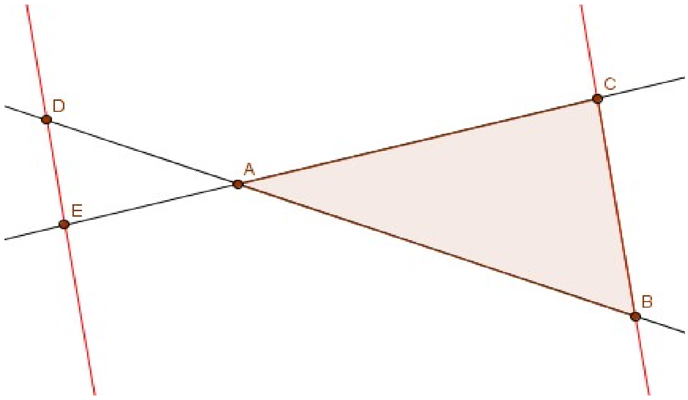
En classe de 4ème on a étudié une forme simplifiée du théorème de Thalès : le cas où une droite coupe 2 côtés d'un triangle parallèlement à un des côtés de ce triangle.

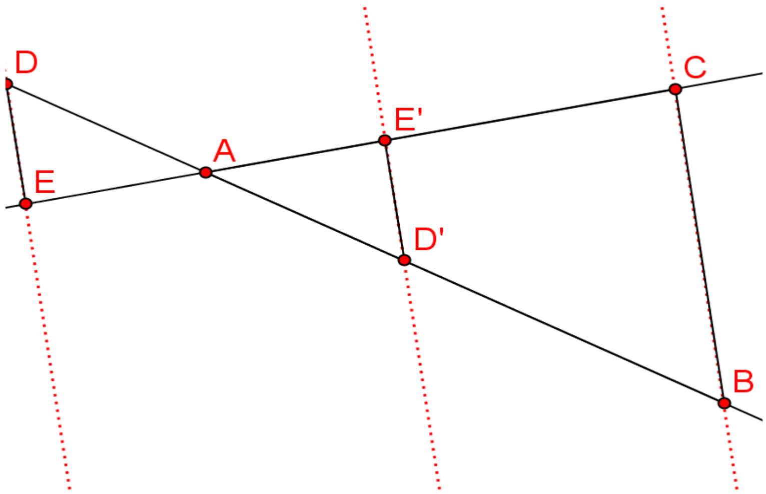
Si, par exemple, la droite (DE) coupe les côtés [AB] et [AC] du triangle ABC parallèlement au côté [BC], alors les triangles ABC et ADE ont des côtés proportionnels. Le triangle ADE est une réduction du triangle ABC, le coefficient de réduction étant l'un des 3 rapports égaux :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

Cette configuration, où le triangle ADE est emboîté dans le triangle ABC, n'est pas la seule possible. On retrouve les mêmes rapports égaux si la droite (DE) qui est parallèle à (BC) coupe, non pas les côtés du triangle ABC, mais les droites qui prolongent ses côtés, c'est-à-dire (AB) et (AC). On peut donc trouver 2 autres cas :







La configuration de gauche est semblable à la configuration initiale (triangles emboîtés), il suffit d'intervertir C avec E et B avec D. La configuration de droite (configuration *papillon*) se ramène à la configuration des triangles emboîtés lorsqu'on fait subir aux points D et E une symétrie par rapport à A : en appelant D' et E' les symétriques de D et E par rapport à A, la droite (D'E') est bien parallèle à (BC) car la symétrie centrale transforme une droite en une droite parallèle. De plus, les points A, D' et B sont bien alignés (car D, A et D' d'une part et D, A et B d'autre part le sont), de même que les points A, E' et C.

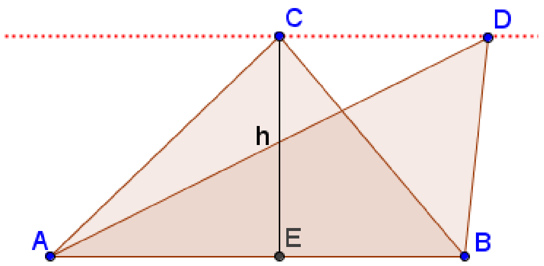
Le théorème de Thalès *direct* se généralise donc à l'ensemble de ces 3 situations de la façon suivante :

Énoncé général : Si 2 droites sécantes d_1 et d_2 sont coupées par 2 droites parallèles d_3 et d_4, alors ces droites déterminent 2 triangles aux côtés proportionnels.

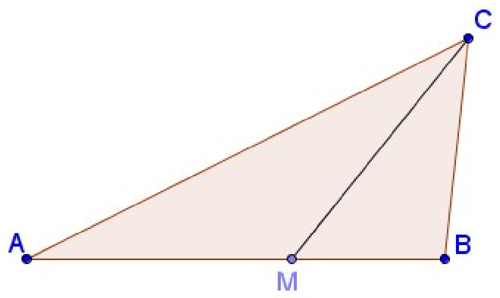
Énoncé pratique : Si (BD) et (CE) sont sécantes en A et si (BC) et (DE) sont parallèles, alors on a : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.

Remarque : on peut aussi dire « *si D est un point de (AB) et E est un point de (AC)* » à la place de « *Si (BD) et (CE) sont sécantes en A* », cela revient au même...

b) Démonstration du théorème selon Euclide



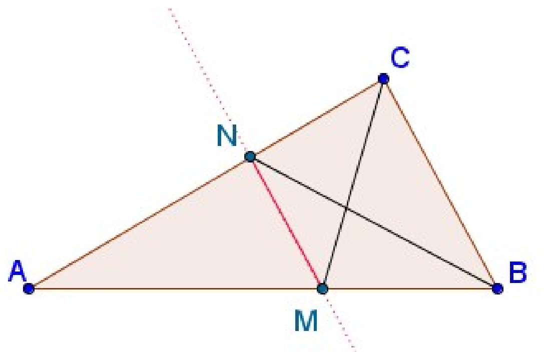
Cette démonstration est basée sur les aires de triangles. Rappelons que l'aire d'un triangle ABC est : $Aire(ABC)=\frac{AB\times h}{2}=\frac{AB\times CE}{2}$ où h est la hauteur du triangle correspondant à la base [AB]. Deux triangles de même hauteur et de même base ont donc même aire. C'est le cas de ABC et de ABD si (CD)//(AB).



1ère étape : établissons que si M est sur [AB] alors : $\frac{Aire(ACM)}{Aire(BCM)}=\frac{AM}{BM}$.

En effet, $\frac{Aire(ACM)}{Aire(BCM)}=\frac{\frac{AM\times h}{2}}{\frac{BM\times h}{2}}=\frac{AM\times h}{2}\times\frac{2}{BM\times h}=\frac{AM}{BM}$.

On peut résumer cette propriété en disant que le rapport des aires de 2 triangles de même hauteur est égal au rapport des bases de ces triangles. Dans la même configuration on a donc, entre autres : $\boxed{\frac{Aire(BCA)}{Aire(BCM)}=\frac{BA}{BM}}$ car les triangles BCA et BCM ont en commun leur hauteur issue de C dont la longueur avait été notée h.



2ème étape : appliquons tout cela à la situation des « triangles emboîtés » ci-contre. Comme (MN)//(BC), les triangles MNB et MNC ont même aire. En ajoutant à ces deux aires l'aire du triangle AMN, on comprend que les triangles ABN et ACM ont même aire, soit $Aire(ABN)=Aire(ACM)$. En divisant par l'aire du triangle ABC, on en déduit l'égalité des rapports $\frac{Aire(ABN)}{Aire(ABC)}=\frac{Aire(ACM)}{Aire(ABC)}$. Il suffit alors d'appliquer 2 fois le résultat précédent $\frac{Aire(ABN)}{Aire(ABC)}=\frac{AN}{AC}$ et $\frac{Aire(ACM)}{Aire(ABC)}=\frac{AM}{AB}$ pour établir que $\boxed{\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}}$. C'est la première égalité du théorème qui concerne les côtés correspondants des triangles, issus du point d'intersection.

On peut remarquer à ce stade que l'on a aussi l'égalité $\boxed{\frac{AN}{CN}=\frac{AM}{BM}}$. Celle-ci est parfois utile (voir son utilisation dans la 3ème étape). Cette égalité vient du fait que, comme (MN)//(BC), les triangles BCN et BCM ont même aire et en divisant l'égalité $Aire(ABN)=Aire(ACM)$ par cette aire commune, il vient $\frac{Aire(ABN)}{Aire(BCN)}=\frac{Aire(ACM)}{Aire(BCM)}$ et comme, par application de la propriété, $\frac{Aire(ABN)}{Aire(BCN)}=\frac{AN}{CN}$ et $\frac{Aire(ACM)}{Aire(BCN)}=\frac{AM}{BM}$, on en déduit le dernier résultat encadré.

3ème étape : Si on appelle h' la distance entre les droites parallèles (MN) et (BC), on a : $\frac{Aire(MNB)}{Aire(BCM)}=\frac{MN\times h'}{BC\times h'}=\frac{MN}{BC}$. Reprenons cette égalité en introduisant le point A sous la forme de l'aire du triangle ANB, et aussi en remarquant que BCM et BCN ont même aire :

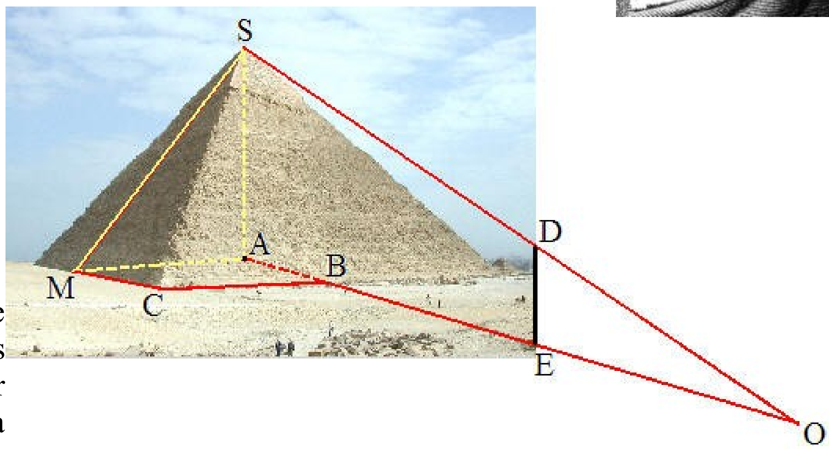
$$\frac{MN}{BC}=\frac{Aire(MNB)\times Aire(ANB)}{Aire(BCM)\times Aire(ANB)}=\frac{Aire(MNB)}{Aire(ANB)}\times\frac{Aire(ANB)}{Aire(BCM)}=\frac{BM}{AB}\times\frac{Aire(ANB)}{Aire(BCN)}=\frac{BM}{AB}\times\frac{AM}{BM}=\frac{AM}{AB}$$

Nous avons ici utilisé deux fois le résultat de la 1ère étape. Une 1ère fois en écrivant que $\frac{Aire(MNB)}{Aire(ANB)}=\frac{BM}{AB}$ où les deux triangles ont en commun leur hauteur issue de N, et une 2ème fois en écrivant que $\frac{Aire(ANB)}{Aire(BCN)}=\frac{AN}{CN}=\frac{AM}{BM}$ où les deux triangles ANB et BCN ont en commun leur hauteur issue de B.

c) Exemples d'applications du théorème de Thalès dans le sens direct

Exemple 1 : mesure de la pyramide de Kheops en Égypte, mesure effectuée par un certain Thalès il y a près de 2600 ans. Thalès pensa que le rapport qu'il entretenait avec son ombre était le même que celui que la pyramide entretenait avec la sienne. La pyramide est de base carrée, MC = AB est le demi côté. O étant l'œil de l'observateur. Lorsque O, D et S sont alignés, on peut mesurer la hauteur SA de la pyramide en connaissant les mesures :

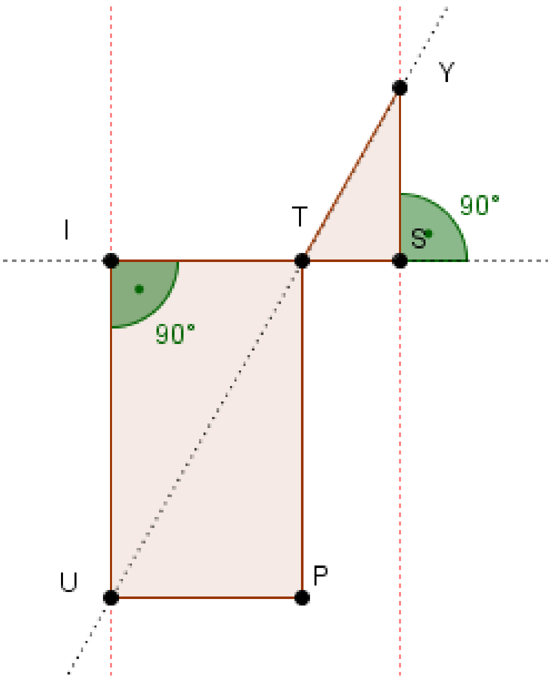
- d'un bâton vertical DE
- des distances OE et OA = OB + MC



Il suffit alors d'utiliser l'égalité : $\frac{OE}{OA}=\frac{DE}{SA}$.

On obtient $SA=\frac{DE\times OA}{OE}$.

Exemple 2 : Cette technique peut être utilisée pour calculer les dimensions d'objets inaccessibles (hauteurs d'un arbre, largeur d'une rivière, profondeur d'un puits, etc.) à partir d'objets mesurables. Voyons comment calculer la profondeur du puits PUIT ci-dessous à partir de 3 mesures : SY = 1,6m – ST = 0,9m – TI = 1,75m.

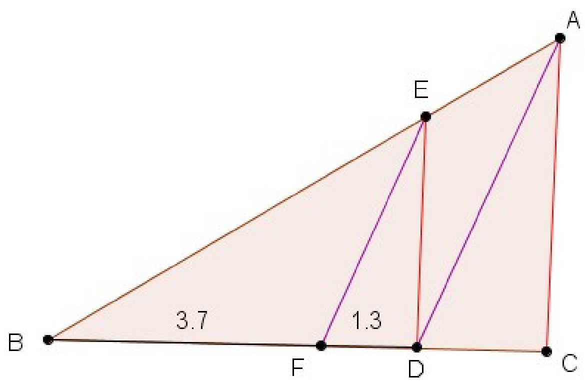


Tout d'abord disons pourquoi on peut appliquer le théorème de Thalès : (UY) et (SI) se coupent en T, et de plus, (SY) et (UI) sont parallèles car toutes deux sont perpendiculaires au sol (ST).

Dans ces conditions le théorème permet d'affirmer que : $\frac{TS}{TI}=\frac{TY}{TU}=\frac{SY}{IU}$ et en remplaçant par les valeurs numériques, on obtient : $\frac{0,9}{1,75}=\frac{TY}{TU}=\frac{1,6}{IU}$ ett donc IU = 1,6 × 1,75 ÷ 0,9 ≈ 3,1m.

Exemple 3 : Parfois, les choses ne sont pas aussi immédiates. On peut être amené à utiliser deux fois le théorème comme dans l'exemple ci-dessous où (AC)//(ED) d'une part et (EF)//(AD) d'autre part. On donne 2 mesures : BF = 3,7m et FD = 1,3m et on demande de calculer une longueur : DC. Pour revenir au problème de la pyramide, supposons que AD est le bord de la pyramide et qu'on ne peut mesurer directement DC. Avec ce dispositif on peut obtenir séparément deux séries de rapports égaux :

$$\frac{BF}{BD}=\frac{BE}{BA}=\frac{FE}{DA} \quad \text{et} \quad \frac{BD}{BC}=\frac{BE}{BA}=\frac{DE}{CA}$$



On peut alors remarquer la présence du même rapport BE/BA dans les deux séries. On ne connaît pas ce rapport mais il permet d'établir que les cinq rapports sont égaux : $\frac{BE}{BA}=\frac{BF}{BD}=\frac{FE}{DA}=\frac{BD}{BC}=\frac{DE}{CA}$

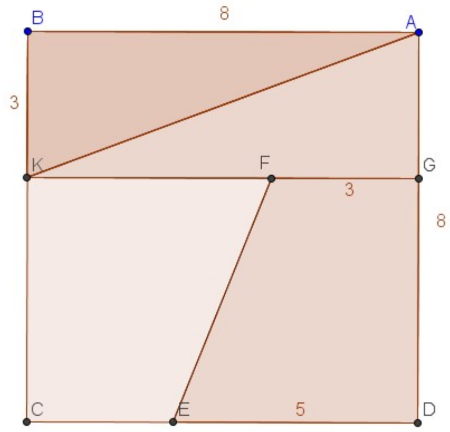
En remplaçant avec nos valeurs :

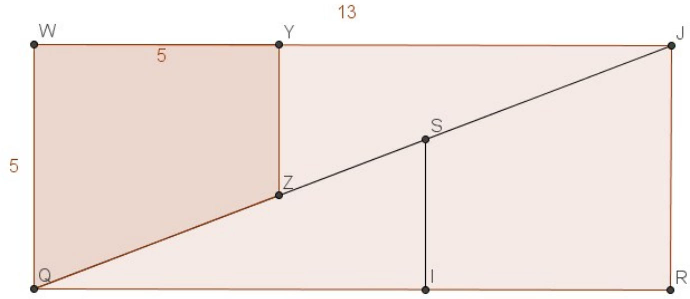
$$\frac{BE}{BA}=\frac{3,2}{3,7+1,3}=\frac{FE}{DA}=\frac{3,7+1,3}{BC}=\frac{DE}{CA}$$

De cela on tire $\frac{3,2}{5}=\frac{5}{BC}$ donc BC = 25÷3,2 = 7,8125 d'où DC = BC −BD=7,8125 −5=2,8125 m.

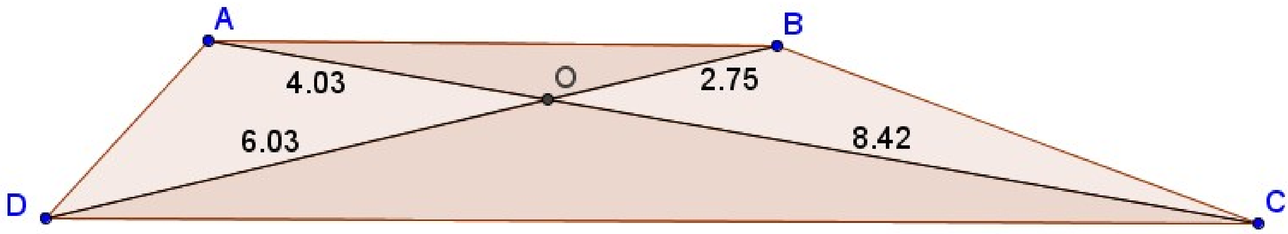
Exemple 4 : Un autre exemple pour montrer que les **conditions d'applications** du théorème doivent être vérifiées scrupuleusement si l'on veut éviter les erreurs. Le carré ABCD ci-dessous a une aire de 64 (8×8=64). Pourtant les 4 pièces qui le composent semblent s'ajuster en un rectangle d'aire 65 (5×13=65)…

Comment s'explique la disparition mystérieuse de cette unité d'aire ? Les points J, S, Q et Z semblent alignés mais c'est faux. Si il y a avait alignement de J, Z et Q on pourrait appliquer le théorème de Thalès car (ZY) et (QW) sont parallèles par construction. On obtiendrait une égalité des rapports $\frac{JZ}{JQ}=\frac{JY}{JW}=\frac{ZY}{QW}$ et donc $\frac{JZ}{JQ}=\frac{8}{8+5}=\frac{3}{5}$ or, manifestement ceci est faux, $8\times5\neq13\times3$. La conclusion étant fausse, on doit en conclure que l'hypothèse était fausse : les points J, Z et Q ne sont pas alignés. JSQZ est en fait un parallélogramme très aplati d'aire 1.





Exemple 5 : Un dernier exemple qui est parfois confondu avec la réciproque du théorème. Supposons que nous ayons des points ABCD comme sur la figure ci-dessous.



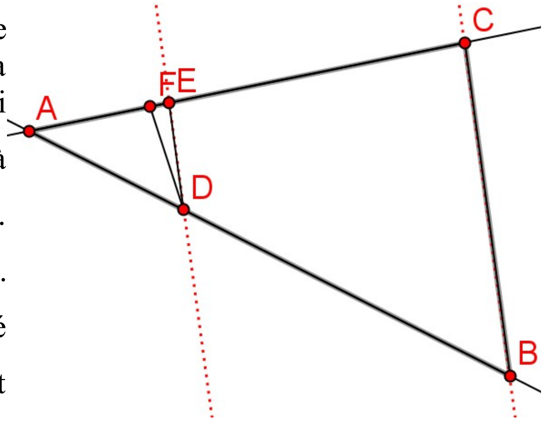
La question est de savoir si ABCD est un trapèze, c'est-à-dire si (AB) est parallèle à (CD). Comme ici par construction, les points A, O, C d'une part et B, O, D d'autre part son alignés, si ces droites étaient parallèles, on aurait les égalités entre rapports suivantes : $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$. Or, en remplaçant par les valeurs numériques on trouve que cela conduit à $4{,}03\times6{,}03 = 2{,}75\times8{,}42$, ce qui est manifestement faux car $24{,}3009 \neq 23{,}155$. La conclusion étant fausse, l'hypothèse de départ, à savoir les droites (AB) et (DC) sont parallèles, est fausse. Les droites ne sont donc pas parallèles, le quadrilatère ABCD n'est donc pas un trapèze.

Remarque : Tous les exemples ci-dessus sont des exemples d'application du sens direct du théorème. Les deux derniers exploitent une forme dite « contraposée » de ce sens direct. D'une manière générale une propriété qui peut s'énoncer ainsi « Si A est vrai alors B est vrai » a pour contraposée la propriété qui peut s'énoncer : « Si B n'est pas vrai, alors A n'est pas vrai ». Une propriété et sa contraposée sont logiquement équivalentes, c'est-à-dire que si la propriété est vraie alors la contraposée aussi, et si la propriété est fausse alors la contraposée est fausse également.

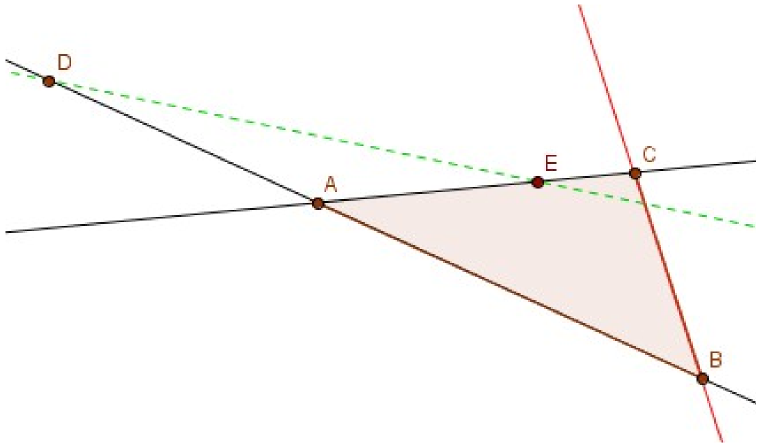
2) Sens réciproque

a) Introduction

La forme réciproque inverse les hypothèses et la conclusion d'une propriété. La réciproque de « Si A est vrai alors B est vrai » *serait* « Si B est vrai alors A est vrai ». *Nous allons voir que dans le cas du théorème de Thalès il va falloir modifier un peu l'énoncé de la réciproque pour obtenir une propriété vraie, donc exploitable.*



Première modification : au lieu des 3 rapports égaux, on va se contenter d'en exiger 2. Par exemple, dans les conditions de la figure ci-contre (qui est fausse, comme on va le voir plus loin), si on a $\frac{AF}{AC}=\frac{AD}{AB}$ alors on peut en déduire que (FD) est parallèle à (CB). Notons en effet E le point de [AC] tel que (ED)//(CB). D'après le théorème direct de Thalès on en déduit que $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$. Par conséquent, les distances AE et AF vérifient l'égalité $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{Ac}$ qui se réduit en AE = AF. Les points E et F sont confondus, (FD) et (ED) aussi, et donc (FD)//(CB). Cette déduction est possible grâce à l'*axiome d'Euclide* qui affirme qu'il n'existe qu'une seule droite parallèle à une direction donnée et passant par un point donné.

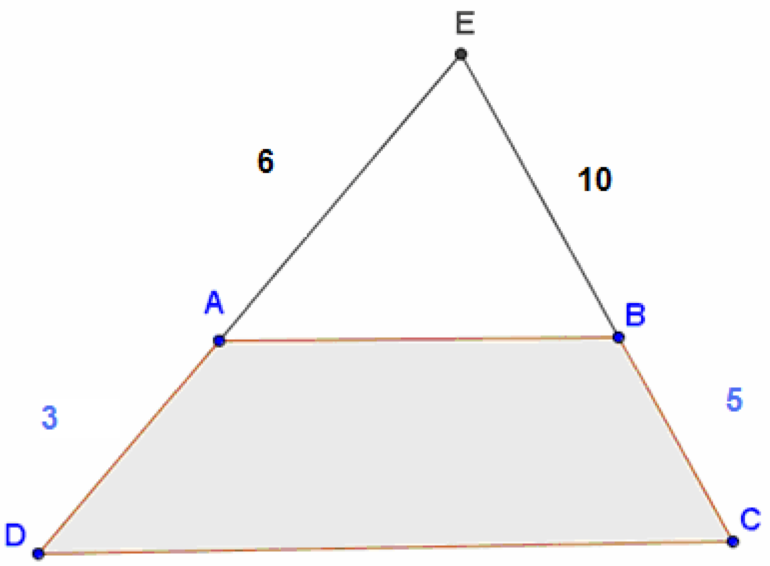


Deuxième modification : Pour le sens direct on exigeait que les points soient alignés trois par trois, sans plus. On disait par exemple « (EC) coupe (DB) en A ».
Pour la réciproque, on va exiger une condition supplémentaire : que ces points soient **alignés dans le *bon* ordre**. C'est-à-dire l'ordre qui conduit à une des trois configurations de Thalès. Supposons que nous ayons « (EC) coupe (DB) en A » et que $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$, mais que les points soient disposés comme sur la figure ci-dessous, où E est sur [AC] tandis que D est sur (AB) sans être sur [AB]. Les conditions ne sont pas suffisantes, on voit bien qu'alors les droites (ED) et (CB) ne sont pas parallèles. Il faudra donc ajouter la condition supplémentaire : « les points A, E et C d'une part et A, D et B d'autre part, sont **alignés dans cet ordre** ». Comme on peut avoir deux autres ordres acceptables (EAC et DAB – ACE et ABD) on pourra utiliser une expression du genre « les points A, E et C d'une part et A, D et B d'autre part, sont **alignés dans le même ordre** ».

b) Énoncé et utilisation de la réciproque

Théorème réciproque : Si les points A, E et C d'une part et A, D et B d'autre part, sont **alignés dans cet ordre** et si $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=k$, alors les droites (ED) et (BC) sont parallèles, et de plus $\frac{ED}{CB}=k$.

Remarque : La conclusion de la réciproque est le parallélisme des droites. Ce parallélisme étant acquis, on peut appliquer le théorème direct qui nous donne l'égalité du 3ème rapport avec les 2 autres.



Exemple 1 : Pour savoir si les droites (AB) et (DC) de la figure ci-contre sont parallèles, calculons tout d'abord les 2 rapports :

$$\frac{EA}{ED}=\frac{6}{6+3}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{EB}{EC}=\frac{10}{10+5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

Nous concluons que : $\frac{EA}{ED}=\frac{EB}{EC}$

Comme, de plus, les points D, A et E d'une part et C, B et E d'autre part sont alignés dans cet ordre, d'après la réciproque de Thalès, les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

Exemple 2 : Pour savoir si les droites (AB) et (DC) de la figure ci-dessous sont parallèles, calculons tout d'abord les 2 rapports :

$\frac{EA}{ED}=\frac{7,14}{7,14+5,32}\approx 0,5730337079$ et $\frac{EB}{EC}=\frac{6,16}{6,16+4,46}\approx 0,5800376648$

Nous devons alors en conclure que : $\frac{EA}{ED}\neq\frac{EB}{EC}$

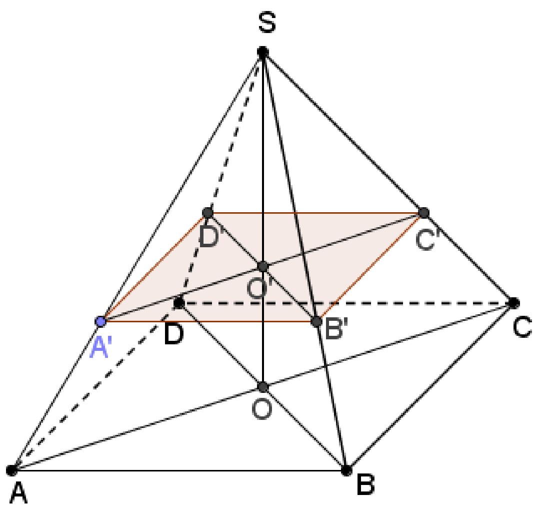
D'après la contraposée du théorème direct de Thalès, les droites (AB) et (DC) ne sont donc pas parallèles.

Remarque : Cet exemple n'applique pas la réciproque du théorème. Nous l'avons mis pour montrer les différences et les similitudes dans la rédaction. Notons tout de même que les rapports sont voisins, et que, par conséquent les droites sont « presque parallèles ». Les mathématiciens font une différence fondamentale entre « être » et « être presque » alors que dans la conception commune, c'est quasiment identique… Pour illustrer cet exemple nous avons utilisé une figure où les droites sont parallèles rigoureusement mais les mesures arrondies au centième conduisent à de petites erreurs qui conduisent à conclure au non parallélisme…

3) Agrandissement et réduction d'une pyramide ou d'un cône

Propriété : une pyramide (un cône) coupé(e) selon un plan parallèle à sa base, lorsqu'on enlève la partie contenant la base, est une réduction de la pyramide (du cône) de départ.

Voyons la figure ci-contre qui représente une pyramide SABCD à base carrée ABCD. Lorsqu'on coupe cette pyramide par un plan (A'B'C') parallèle au plan (ABC) de la base, on obtient une petite pyramide SA'B'C'D' qui est une réduction de la grande pyramide SABCD.



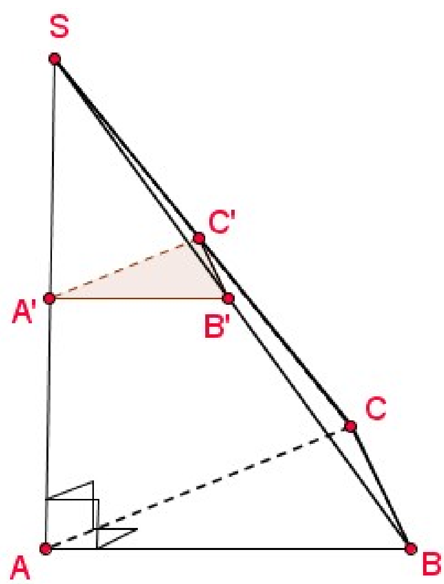
On démontre en 2[de] que si le plan (ABC) est parallèle au plan (A'B'C') alors les droites (AB) et (A'B') sont parallèles. De cela on peut déduire, en utilisant le théorème de Thalès dans le plan (SAB) que : $\frac{SA}{SA'}=\frac{SB}{SB'}=\frac{AB}{A'B'}=k$. De même dans le plan (SBC), on montre que $\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}=\frac{CB}{C'B'}=k$ ou encore, dans le plan (SAC) qui contient les pieds O et O' des hauteurs des pyramides on a $\frac{SO}{SO'}=\frac{AO}{AO'}=\frac{AC}{A'C'}=k$. On voit donc que tous les rapports de longueurs sont égaux à k. Il s'agit donc d'un agrandissement de rapport k ou d'une réduction de rapport $1/k$.

Conséquence : d'après ce que nous avons vu au chapitre précédent, les aires sont donc multipliées par k^2 (ou par $(1/k)^2$ si l'on considère la réduction) et les volumes par k^3 (ou par $(1/k)^3$ si l'on considère la réduction).

Exemple 1 : supposons que le volume de SABCD vaut 10 dm³, que SA =12 cm et AA' = 1 cm. Combien vaut le volume de SA'B'C'D' ?
Calculons d'abord le rapport de réduction : [SA] est réduit en [SA'], SA×k=SA' et donc le rapport de réduction est :

$k=\frac{SA'}{SA}=\frac{SA-AA'}{SA}=\frac{12-1}{12}=\frac{11}{12}$

Le volume de la petite pyramide est donc égal à celui de la grande (10 dm³) multiplié par le coefficient $(11/12)^3$, soit environ 7,7 dm³.

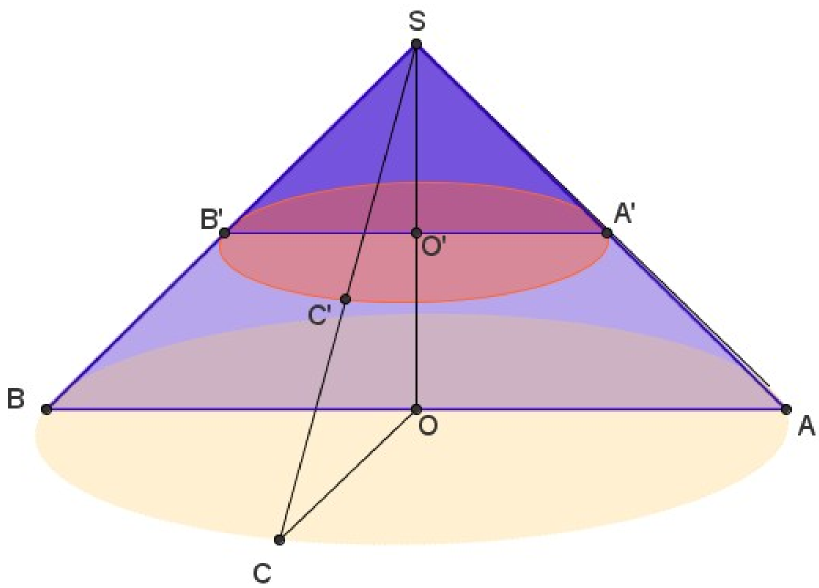


Exemple 2 : la figure ci-contre représente une pyramide SABC à base triangulaire ABC. Lorsqu'on coupe cette pyramide par un plan (A'B'C') parallèle au plan (ABC) de la base, on obtient une petite pyramide SA'B'C' qui est une réduction de la grande pyramide SABC. Supposons que SA =12, AB=5, AC=7 et supposons que A' soit le milieu de [SA]. Combien vaut le volume de SA'B'C' ?

Calculons d'abord le rapport de réduction : [SA] est réduit en [SA'], A' étant le milieu de [SA] le rapport de réduction k est donc égal à 0,5 car $k=\frac{SA'}{SA}=\frac{1}{2}=0{,}5$.

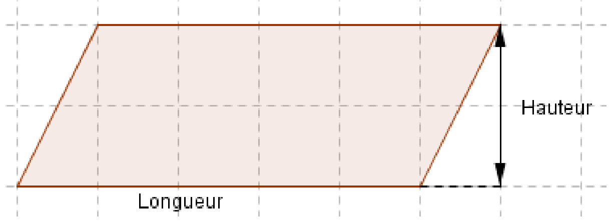
Le volume de la petite pyramide est donc égal à celui de la grande multiplié par le coefficient $(0{,}5)^3$, soit par 0,125. Il suffit de calculer le volume de la grande pyramide. Comme ABC est un triangle rectangle en A, la base de cette pyramide est AB×AC÷2= 5×7÷2=17,5. La hauteur est SA=12 car [SA] étant perpendiculaire à 2 droites sécantes du plan de base est perpendiculaire à la base[1]. Donc le volume de la pyramide SABCD est $v=\frac{Base\times hauteur}{3}=\frac{17{,}5\times 12}{3}=70$. Finalement, le volume de pyramide réduite SA'B'C' est égal à 0,125×70=8,75.

Exemple 3 : Voyons que pour un cône c'est exactement le même genre de situation. Dans la figure ci-contre le cône de sommet S a pour base le disque de centre O et de rayon OA=5m, et pour hauteur SO=6m. Comme dans le cas précédent, si O' est le milieu de [SO], le rapport de réduction est ½. Le volume du petit cône (celui qui a pour sommet S et pour base le disque de centre O' et de rayon OA') sera donc égal à $(1/2)^3$ fois celui du grand. Calculons le volume du grand cône : la base est un disque de rayon 5m, son aire est donc égale à π×5² soit 25 π m². Le volume du grand cône est : $v=\frac{Base\times hauteur}{3}=\frac{25\pi\times 6}{3}=50\pi\approx 157$ m³. Par conséquent, le volume du petit cône est 0,125×π×50 = 6,25 π ≈ 20 m³.



Rappel sur les formules d'aires que vous êtes sensés connaître :

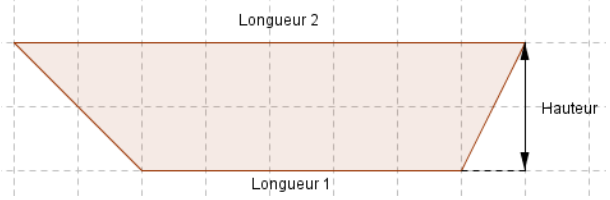
Quadrilatères : Le parallélogramme ; A=Longueur×Hauteur



Cas particulier 1: le rectangle ; A= Longueur×Largeur

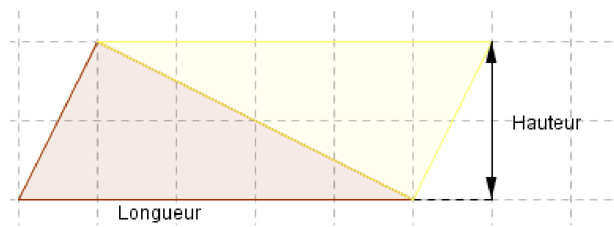
Cas particulier 2 : le carré ; A= Longueur²

Un cas plus général que le parallélogramme : le trapèze
A= (Long1+Long2)×Hauteur÷2

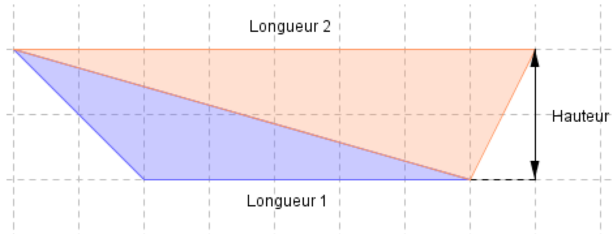


Le triangle est la moitié d'un parallélogramme.
A=Longueur×Hauteur÷2

NB : on dit souvent « base » au lieu de « longueur ». Remarquons donc qu'un triangle a 3 bases possibles pour le calcul de son aire. La « hauteur » est donc une des 3 hauteurs possibles, celle qui correspond à la base choisie.



Avec la formule donnant l'aire d'un triangle on comprend mieux la formule pour le trapèze, puisque celui-ci est constitué de 2 triangles de bases différentes mais de même hauteur.
A1=L1×H÷2 et A2=L2×H÷2
A1+A2= L1×H÷2+ L2×H÷2=(L1+L2) ×H÷2.



Le disque de centre O et de rayon R est la surface contenue à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon R. Son aire est π×R².

1 Ce résultat ne sera étudié et donc ne deviendra exigible qu'en classe de seconde. En classe de 3ème les énoncés donnent, en principe, explicitement la hauteur des tétraèdres.