1. La situation de proportionnalité (rappels)

Nous allons revoir et préciser les acquis sur cette notion de proportionnalité étudiée depuis le primaire et chaque année au collège. Nous étudierons pour cela plusieurs exemples.

a) Égalités entre fractions

Prenons un ensemble de fractions égales à « une moitié » : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{10}{20} = \frac{50}{100}$. Ces fractions sont égales car elles vérifient la règle utilisée pour simplifier : $\frac{1 \times a}{2 \times a} = \frac{1}{2}$, a pouvant prendre n'importe quelle valeur non nulle. Elles sont égales car, entre les numérateurs et les dénominateurs, il existe un même coefficient multiplicateur, 2 en l'occurrence. On dit qu'il y a proportionnalité entre les numérateurs et les dénominateurs, et que le coefficient de proportionnalité est 2. On peut résumer ces informations par le « tableau de données » suivant :

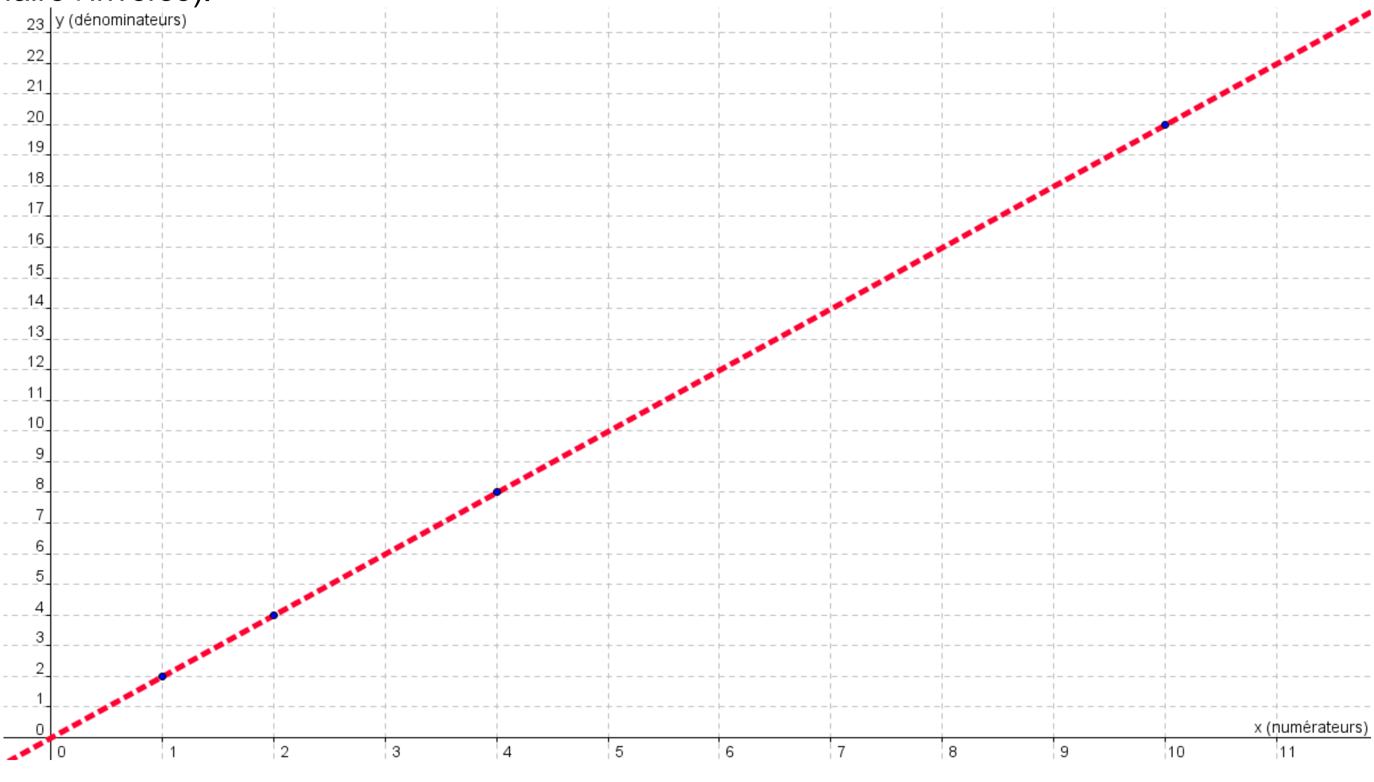
		fraction n°1	fraction n°2	fraction n°3	fraction n°4
Numérateur		1	2	4	10
Dénominateur		2	4	8	20

$\times 2$ $\div 2$

Définition : Une situation est dite « de proportionnalité » lorsque 2 séries de nombres sont liées entre elles par un coefficient multiplicateur.

Dans notre exemple, pour passer de la 1$^{\text{ère}}$ série de nombres (les numérateurs) à la 2$^{\text{ème}}$ série (les dénominateurs), le coefficient multiplicateur est 2. On peut remarquer que pour passer de la 2$^{\text{ème}}$ série à la 1$^{\text{ère}}$ le coefficient est l'inverse de 2 (diviser par 2 revient à multiplier par ½).

Pour visualiser une situation de proportionnalité, il est intéressant de placer dans un graphique, les points correspondant au tableau de données : on choisit de représenter le couple de nombres (numérateur ; dénominateur) par le point de coordonnées (x ; y). L'abscisse x du point correspond au numérateur, l'ordonnée y au dénominateur (remarque : on aurait pu choisir de faire l'inverse).



La *propriété caractéristique* de la situation de proportionnalité est la suivante : **les points sont alignés sur une droite qui passe par l'origine** (cette droite a été tracée ici en rouge). Il est à noter que dans notre situation, l'origine ne représente pas une fraction : la division par zéro étant interdite…

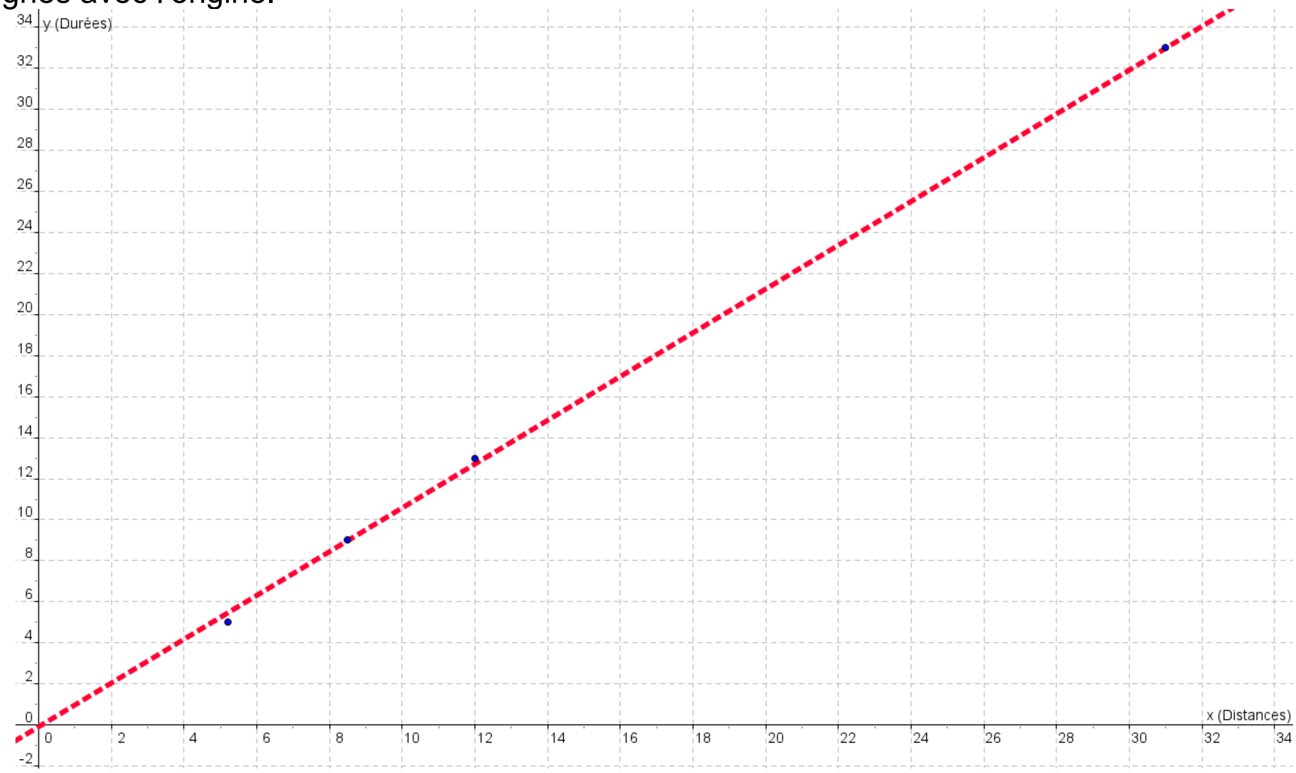
Remarque : cette situation est une situation idéale où le coefficient multiplicateur est rigoureusement le même pour chaque couple de nombre. C'est cela qu'on appelle proportionnalité en mathématiques. Il existe toutefois des situations de la vie réelle qui s'*apparentent* à la proportionnalité sans en être, au sens strict du terme. La proportionnalité est donc parfois un modèle. Considérons cet exemple :

Joe mesure les distances parcourues avec son taxi et la durée du parcours. Il note ces valeurs dans un tableau pour les 4 courses de la journées:

		course n°1	course n°2	course n°3	course n°4
Distance (en km)		5,2	31	12	8,5
Durée (en mn)		5	33	13	9

× ?   ÷ ?

Lorsqu'on place les valeurs dans un graphique cela donne des points assez remarquablement alignés avec l'origine.



La situation s'approche donc d'une situation de proportionnalité sans en avoir la caractéristique essentielle : l'égalité des rapports, l'unicité du coefficient multiplicateur entre les 2 séries de nombres. En effet, si on calcule 5,2÷5=1,04 ; 31÷33≈0,93 ; 12÷13≈0,92 ; 8,5÷9≈0,94. D'une façon générale, pour ces 4 courses, Joe obtient un rapport assez proche de 1 (qui correspond à une vitesse moyenne de 60 km/h), mais cela reste approximatif. En toute rigueur il ne s'agit pas de proportionnalité, mais on n'en est pas loin.

Exemples de proportionnalités vraies: Au marché, le prix du beurre est proportionnel à sa masse (et réciproquement), le coefficient multiplicateur étant le *prix du kilo* de beurre ; la conversion d'une monnaie en une autre, par exemple des euros en dollars, est une situation de proportionnalité, le *taux de change* est le coefficient multiplicateur; quand on fait une carte, il y a proportionnalité entre les longueurs réelles et les longueurs sur la carte, l'*échelle* de la carte est alors le coefficient multiplicateur.

b) <u>Coefficient irrationnel</u>

Le périmètre d'un cercle est proportionnel à son diamètre, c'est ce que l'on apprend en 6ème. Le coefficient de proportionnalité est alors le nombre π. Autrement dit, le rapport Périmètre/Diamètre vaut toujours π pour un cercle.

En 3ème, le professeur de maths précise : le nombre π n'est pas rationnel. Cela conduit donc à penser que si on mesure les périmètres et les diamètres de plusieurs cercles, et même si l'on est extrêmement précis, les rapports Périmètres/Diamètres ne pourront jamais être égaux au coefficient multiplicateur, le nombre π… Cela semble paradoxal !

Le tableau ci-dessous résume cette situation :

		Cercle n°1	Cercle n°2	Cercle n°3	Cercle n°4
Diamètre (en cm)		7	100	113	32
Périmètre (en cm)		22	314	355	100

×π ÷π

Évidemment, comme π n'est pas rationnel, on ne peut pas avoir 7π=22, ni 100π=314, etc. Il ne s'agit que de valeurs approchées. Pourtant, contrairement à la situation du chauffeur de taxi, cette situation est une vraie situation de proportionnalité. Tout irrationnel qu'il soit, π est le coefficient multiplicateur de cette situation. Ce sont les valeurs mesurées des longueurs qui sont des valeurs approchées. Les valeurs réelles (exactes) sont rigoureusement proportionnelles, si tant est que les cercles soient de vrais cercles (ce qui n'est pas le cas en général pour les objets matériels…).

c) <u>Propriétés d'une situation de proportionnalité</u>

Les lettres a, b, c représentant des nombres quelconques (le coefficient multiplicateur c doit être non nul sinon on ne peut diviser par c) rappelons la propriété du coefficient entre les 2 lignes :

	A	B	C	D	E
1ère série	1	2	3	a	b÷c
2ème série	1×c	2×c	3×c	a×c	b

Il y a également proportionnalité entre chaque colonne du tableau. Par exemple la colonne B du tableau précédent est le double de la colonne A (coefficient = 2). La colonne D du tableau est obtenue à partir de la colonne A en utilisant le coefficient multiplicateur a.

La plus connue des propriété de la proportionnalité est celle qu'on désigne par le nom de « produit en croix » Pour trouver le 4ème nombre d'une situation proportionnelle on fait comme suit :

	A	B	D
1ère série	a	b	?=a×d÷c
2ème série	c	?=b×c÷a	d

Cette propriété provient du fait que si $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ alors, en multipliant par c, on obtient : $a = \frac{b \times c}{d}$,

en multipliant par d, on obtient : $\frac{a \times d}{c} = b$, en multipliant par c et par d, on obtient : $a \times d = b \times c$.

De cette dernière égalité on peut obtenir, en divisant par a : $d = \frac{b \times c}{a}$ et en divisant par b : $\frac{a \times d}{b} = c$. Ces 6 égalités sont équivalentes pour tous nombres a, b, c et d non nuls.

Dernières propriétés :

2 colonnes quelconques peuvent être ajoutées pour en faire une 3ème : comme la colonne A+A' du tableau ci-dessous, qui provient de l'addition des colonnes A et A'.

1 colonne quelconque peut être multipliée par un coefficient quelconque pour en faire une 3ème : comme la colonne αA' du tableau ci-dessous, qui provient de la multiplication de la colonne A par un coefficient α.

	A	A'	A+A'	αA
1ère série	a	a'	a+a'	αa
2ème série	b=a×c	b'=a'×c	(a+a')×c=a×c+ a'×c= b+b'	(αa)×c=αb

D'une façon générale, il y a proportionnalité entre les colonnes de tels tableaux de proportionnalité. On peut combiner n'importe quelles colonnes entre elles, en multipliant les nombres qu'elles contiennent par les coefficients qu'on veut et en les ajoutant entre elles.

2. Applications

a) Variations relatives (en pourcentages)

Si un prix de 80 euros augmente de 20%, le nouveau prix sera égal à 80 + 20% de 80 :

$$80 + \frac{20}{100} \times 80 = 80(1 + \frac{20}{100}) = 80(\frac{100}{100} + \frac{20}{100}) = 80 \times \frac{120}{100} = 1,2 \times 80 = 96$$

Si un prix P augmente de 20%, le nouveau prix P' sera égal à P + 20% de P :

$$P' = P + \frac{20}{100}P = P(1 + \frac{20}{100}) = P(\frac{100}{100} + \frac{20}{100}) = P \times \frac{120}{100} = 1,2P$$

Si un prix P augmente de t% (t est appelé le taux du pourcentage), le nouveau prix P' sera égal à P + t% de P , soit : $P' = P + \frac{t}{100}P = P(1 + \frac{t}{100})$

Règle : si une quantité Q *augmente* de t% alors la quantité finale Q' sera proportionnelle à Q : $Q' = Q(1 + \frac{t}{100})$, soit Q' = C×Q. Le coefficient de proportionnalité C vaut $1 + \frac{t}{100}$.

Exemples :

Lorsqu'on augmente de 5%, on multiplie par 1,05 car : $1 + \frac{5}{100} = \frac{100}{100} + \frac{5}{100} = \frac{105}{100} = 1,05$

Lorsqu'on augmente de 100%, on multiplie par 2 car : $1 + \frac{100}{100} = \frac{100}{100} + \frac{100}{100} = \frac{200}{100} = 2$

Un coefficient multiplicateur de 1,5 correspond à une augmentation de 50%

D'une façon générale, pour une augmentation de t% on peut retenir les formules suivantes : $C = 1 + \frac{t}{100}$; $t = 100(C - 1)$; $Q' = C \times Q$; $Q = \frac{Q'}{C}$; $C = \frac{Q'}{Q}$. De plus, comme t>0, on a C>1.

Remarque : Dans le cas d'une *diminution* de t%, le coefficient multiplicateur est $C = 1 - \frac{t}{100}$ et si l'on veut calculer t connaissant C : $t = 100(1 - C)$. Avec t>0, on a alors : 0<C<1

Exemples :

La population d'une ville passe de 32000 habitants à 25000.

Quel est le coefficient ? Quel est le taux de variation ?

On utilise la formule C = Q'÷Q. Cela donne C=25000÷32000=0,78125. (on a bien 0<C<1)

Cela correspond à une diminution de t=100(1-0,78125)=21,875%.

Le taux de variation est d'environ 22%.

Un salaire augmente de 12% la première année, puis de 8% la deuxième année.

De combien de pourcents a-t-il augmenté en deux ans ?
Les deux coefficients multiplicateurs sont 1,12 et 1,08. Le coefficient global (sur 2 ans) est donc :$1,12 \times 1,08 = 1,2096$. Cela correspond à une augmentation de $t = 100(1,2096-1)=20,96\%$.
Le salaire a donc augmenté d'environ 21% en 2 ans (ce n'est pas la somme de 12 et 8%).

Un article est soldé à 45 euros. Le pourcentage de remise pendant les soldes est de 20%.
Quel était le prix de l'article avant les soldes ?
Le coefficient multiplicateur C correspondant à une baisse de 20% est 0,8 (1-20/100=1-0,2=0,8).
$Q' = 45 = Q \times 0,8$ on en déduit que $Q = 45 \div 0,8 = 56,25$.

Remarque : Il ne faut pas ici ajouter 20% de 45 à 45. Une diminution de 20% n'est pas compensée par une augmentation de 20%. Ici, en passant de 56,25 à 45 on a baissé de 20%, mais si vous ajoutez 20% à 45 vous trouvez 54 ($1,2\times45=54$) et non 56,25.

b) Conversions

Les conversions de grandeurs simples (longueur, durée, masse, etc.) sont des situations de proportionnalités. Avec notre système décimal on utilise souvent des multiples ou des sous-multiples d'une unité principale qui sont souvent des puissance de dix de l'unité de base.

Le système international d'unités préconise l'emploi de *préfixes* qu'on accole à l'unité : déca (da) pour dizaine (10^1) – hecto (h) pour centaine (10^2) – kilo (k) pour millier (10^3) – mega (M) pour million (10^6) – giga (G) pour milliard (10^9) – téra (T) pour mille milliards (10^{12}) - etc. la liste officielle des préfixes français continue encore (péta, exa, zetta, yotta). Il y a aussi les sous-multiples qui sont déci (d) pour dixième (10^{-1}) – centi (c) pour centième (10^{-2}) – milli (m) pour millième (10^{-3}) – micro (μ) pour millionième (10^{-6}) – nano (n) pour milliardième (10^{-9}) – pico (p) pour 10^{-12} - etc. la liste officielle continue encore (femto, atto, zepto, yocto).

Exemples : Pour les *longueurs* on utilise le mètre (m) comme unité de référence et les autres unités, dérivées du mètre, sont le décamètre (dam), l'hectomètre (hm), le kilomètre (km), le micromètre (μm), etc. Pour les *masses* on utilise le kilogramme (kg) ou le microgramme (μg), etc. Pour la *quantité d'information* stockée dans un ordinateur on utilise le kilo-octet (ko), le giga-octet (Go), pour la *tension* électrique le TéraVolt (TV), etc.

Remarque : les informaticiens utilisent parfois un faux kilo égal à 2^{10}, soit 1024. Ainsi leur Mo correspond à 1024×1024, soit environ 1,05 vrais Mo, et leur Go à environ 1,07 vrais Go, etc.

Principe de conversion: on exprime une unité en fonction de l'autre, si nécessaire en passant par l'unité de référence. Pour convertir 1 250 000 cL en hL par exemple, on sait que 1hL = 100L donc $1L = 10^{-2}hL$, et $1cL = 10^{-2}L$, donc $1cL = 10^{-2} \times 10^{-2}hL =10^{-4}hL$ d'où 1 250 000 cL= 1 250 000 $\times 10^{-4}L= 125hL$. On peut aussi utiliser un tableau de conversion avec un chiffre par colonne:

	kL	hL	daL	L	dL	cL	mL
1	2	5	0	0	0	0	

Parmi les grandeurs simples on a les mesures de *durées* qui utilisent des unités qui ne sont pas des puissances de dix d'une autre unité. La seconde se décompose en dixièmes, centièmes, millième, etc. de seconde, mais on n'utilise pas de décaseconde ni d'hectoseconde mais à la place on utilise les minutes (1mn=60s), les heures (1h=60mn), les jours (1j=24h =86 400 secondes, approximativement la durée d'un jour solaire), les mois et les années (1a=365,25 jours soit 31 557 600 secondes). Le principe de conversion est le même que pour les autres unités simples, mais on ne peut pas utiliser le tableau pour passer des secondes aux jours ou des jours aux années.

Bien que les aires et les volumes soient des grandeurs composées (grandeurs produits), il existe des unités de mesure qui les considère comme simple. Ainsi l'are mesure les *aires* et se dérive en hectare (1ha=100a) et centiare (1ca=0,01a). La définition de l'are est 1a=100m² (originellement, la surface de terre cultivable par un homme en une journée), donc 1ha=100×100m²=10 000m²=1hm² et 1ca=0,01×100m²=1m². Les volumes sont souvent mesurés en litres (L) avec l'équivalence $1L=1dm^3$. Le litre se subdivise en dL, cL, mL et on a aussi les daL, les hL.

Les grandeurs composées sont celles qui n'ont pas d'unité spécifique, elles sont construites à l'aide de la formule qui les relie à des grandeurs simples. Par exemple, *la vitesse* V est une grandeur quotient puisqu'elle est définit en divisant la distance d d'un parcours par la durée t du parcours. Ainsi la formule V=d/t conduit à mesurer la vitesse en m/s mais aussi km/h ou mm/j, en fait on utilisera l'unité la plus commode, celle qui permet de rendre compte d'un phénomène avec un nombre pas trop grand. Un autre exemple de grandeur composée, l'*aire*, qui permet de mesurer les surfaces, est une grandeur produit puisqu'on obtient une aire en multipliant deux longueurs entre elles. L'aire d'un parallélogramme vaut l×h (l étant la longueur et h la hauteur correspondante), celle d'un disque vaut $\pi\times r^2$ ($r^2=r\times r$, c'est bien le produit de 2 longueurs).

Les grandeurs quotients traduisent une situation de proportionnalité où un quotient fixe correspond à un dividende et un diviseur proportionnel. Par exemple si V=60km/h on est dans la situation de ce tableau de proportionnalité:

		parcours n°1	parcours n°2	parcours n°3	parcours n°4
Distance		60km	120	6km	300m=0,3km
Durée		1h	2h	0,1h=6mn=360s	?

Le coefficient de proportionnalité de ce tableau est 60 si on passe de la 2ème ligne (durée en h) à la 1ère (distance en km), mais si on mesure le temps en minutes, le coefficient n'est plus 60 mais 1, et si on le mesure en secondes il est 1/60. La formule V=d/t peut aussi s'écrire d=Vt, et on voit là que la distance parcourue est proportionnelle au temps lorsque la vitesse V est constante. Dans notre tableau, pour obtenir une 4ème valeur connaissant les 3 autres exprimées dans des unités cohérentes, on utilise le produit en croix. Par exemple, pour 300m parcourus, on va convertir la distance en km (300m=0,3km) et utiliser un rapport en km/s pour avoir une durée en seconde, ce qui donne t=0,3×360÷6=18s. On obtiendra le même résultat si on raisonne autrement, par exemple avec une égalité entre fractions:

$$V=\frac{60km}{1h}=\frac{60000m}{3600s}=\frac{200\times 300m}{200\times 18s}=\frac{300m}{18s}$$

Cette succession d'égalité nous permet de convertir dans une autre unité, ici les m/s, ainsi 60km/h=(300÷18)m/s≈17m/s. Convertissons cette vitesse en Gm/a :
$1Gm = 10^9m$ donc $1m = 10^{-9}Gm$ et $60km = 60\times 10^3\times10^{-9}Gm = 60\times 10^{-6}Gm$
1a=365,25j=8766h et donc 1h=1÷8766a.

Finalement, $V=60km/h=\frac{60\times 10^{-6}Gm}{1\div 8766a}=\frac{60\times 10^{-6}\times 8766}{1}\times\frac{Gm}{a}=0,52596\frac{Gm}{a}\approx 0,5\frac{Gm}{a}$

Autres grandeurs quotients communément employées :

- la *masse volumique* rapporte la masse au volume de la matière. On donne par exemple la masse volumique de l'air $0,0013g/cm^3$, du liège $0,24g/cm^3$, du fer $7,32g/cm^3$, de l'or $19,3g/cm^3$. La masse volumique de l'eau est proche de $1g/cm^3$ car c'est par rapport à l'eau qu'on a définit historiquement le kilogramme. On remarquera que certaines unités de masse volumique sont équivalentes $1 g/cm^3 = 1 kg/dm^3 = 1 kg/L = 1 t/m^3$.
- Le *débit* d'un robinet ou d'un fleuve est le volume de liquide qui s'écoule par unité de temps. On donne par exemple le débit de la Seine à Paris : $328m^3/s$ ou celui de la baignoire de votre grand-mère : 18L/mn.
- La densité de population exprime le rapport entre la population (nombre d'habitants) et la superficie d'un territoire, on la mesure en hab/km². Á Paris, la densité de population moyenne est d'environ 21 000 hab/km², elle est de 33 000 hab/km² dans le XXème alors qu'en France elle n'est que de 97 hab/km² (65 073 482 habitants sur 670 922 km².
- L'accélération est un rapport d'une vitesse par une durée se mesure en m/s², la pression est un rapport d'un d'une masse par une masse se mesure en g/cm², la concentration est le rapport d'une masse dans le volume qui la contient et se mesure en g/cm^3, etc.

Les grandeurs produits sont obtenues lorsqu'on multiplie deux grandeurs entre elles. Par exemple l'aire est le produit de 2 longueurs, le volume est le produit de 3 longueurs. Pour ces grandeurs utilise des tableaux qui ressemblent au tableau de conversion des grandeurs simples mais qui ont été adaptés aux formules utilisées:

Aires	km²	hm²	dam²	m²	dm²	cm²	mm²
1	05	00	00	00			

				00,	00	01	00

La superficie de Paris est de 105 km², soit 105 000 000 m², celle d'un microprocesseur AMD est de 100 mm² soit 0,0001 m². Pour les aires, le tableau de conversion utilise 2 chiffres par colonnes à cause du produit des 2 longueurs : par exemple,1m²=1m×1m=10dm×10dm=100dm².

Pour les volumes, le tableau de conversion utilise 3 chiffres par colonnes. Cela vient du fait qu'on doit multiplier 3 longueurs entre elles pour obtenir un volume $1m^3$= 1m×1m×1m =10dm×10dm×10dm=$1000dm^3$. La Tour Eiffel fait 324 mètres de haut pour une base carrée dont le coté mesure 125 mètres, si on considère que c'est une pyramide, son volume est donc $125^2 \times 324 \div 3 \approx 1\ 700\ 000m^3$, soit $0,0017km^3$. En comparaison le volume d'une goutte d'huile est de 0,025mL donc $0,025cm^3$, en effet $1L=1dm^3=1000cm^3$ donc 1mL=1cm3.

Volumes	km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
	0,	001	700	000			
					001	000	

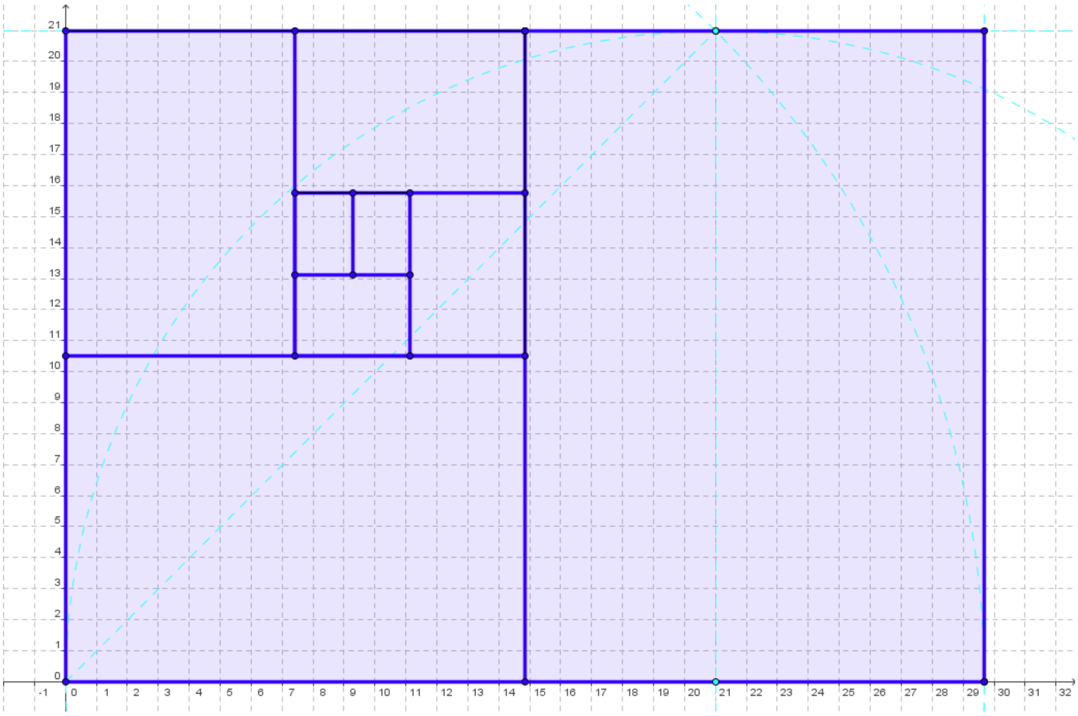
D'autres exemples de grandeurs produits:

- La *consommation* d'énergie d'un appareil électrique se mesure en Wh, une unité produit. On fait le produit de la puissance de l'appareil (exprimé en Watts) pat la durée de la consommation (exprimée en heures). La formule est E=P×t. Un fer à repasser de 2kW consomme en 10 mn l'énergie E=2000×(10/60)=333Wh. On apprend qu'une ampoule à basse consommation de 15W éclaire autant qu'une lampe à incandescence de 75W et dure 8 fois plus longtemps (1000h pour une ampoule à incandescence donc 8000 heures pour l'ampoule économique). Pour 8000h d'éclairage on consomme donc 1 ampoule basse tension et 120 kWh (8000×15=120 000) ou bien 8 ampoules à filament et 600 kWh. Sachant qu'un ampoule basse tension coute 19,5€, une ampoule classique 0,7€ et 1 kWh 0,1078€, on vérifie qu'avec une ampoule basse tension on dépense un peu moins de 2 fois moins d'argent qu'avec une ampoule classique (32,436€ contre 70,28€).
- Le *trafic* aérien ou routier est une grandeur où l'on multiplie le nombre de personnes transportées et le nombre de kilomètres parcourus. Par exemple, si 300 passagers parcourent 5000km, le trafic pour ce vol est égal à 1 500 000 passagers×km. Si une compagnie a transporté en un an 800 000 passagers avec un trafic total de 3.6 milliards de passagers×kilomètre, quel est la distance parcourue en moyenne par chaque passager sur se vol? Il suffit de diviser 3 600 000 000 par 800 000, on trouve 4 500km. Remarque: on peut calculer aussi du trafic de marchandise en tonnes×km
- La *force* est le produit d'une masse par l'accélération qu'elle subit, elle se mesure en kg×m/s² ou aussi en Newton (N) qui est une unité spécifique. Le *travail* est le produit d'une force par une distance et se mesure donc en N×m ou aussi en kg×m²/s² ou encore avec une unité spécifique, le Joule (J).

c) Agrandissements/réductions

Définition : on réalise un agrandissement (respectivement, une réduction) d'une figure géométrique lorsqu'on multiplie **toutes** les longueurs de la figure par un même nombre. Ce coefficient multiplicateur est parfois (surtout dans le cas des réductions) appelé *échelle* et, dans le cas d'une réduction exprimé sous la forme d'une fraction dont le numérateur est 1.

Exemple : un rectangle de format A4 (21 cm sur 29,7 cm) est représenté par un rectangle de 15 sur 21, s'agit-il d'une réduction ?
21 ÷15 = 1,4 tandis que 29,7 ÷ 21 = 1,414… donc non, il ne s'agit pas d'une réduction, au sens strict du terme. On n'en est pas loin cependant. Calculons ce qui manque à la longueur 21 pour que ce soit une vraie réduction : on aurait pu choisir de le représenter par un rectangle de 15 sur x, et pour que ce soit une réduction : 29,7 ÷ x doit valoir comme 21 ÷15, donc 1,4. Cela conduit à x = 29,7 ÷ 1,4 = 21,21…(valeur exacte 297/14). Il manque donc un peu plus de 21 centièmes de centimètres, soit approximativement 2 mm.



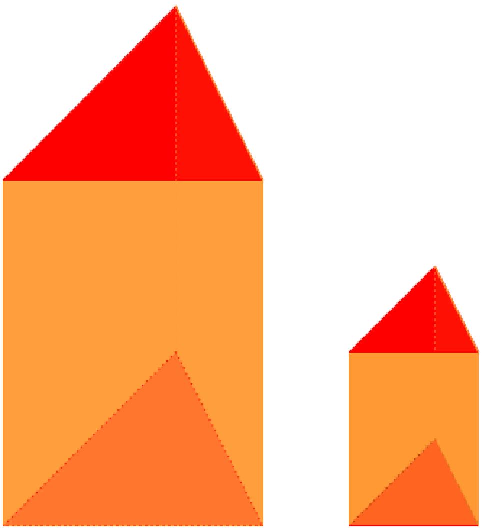
Une feuille de format A4 coupée en 2 donne 2 feuilles de format A5. Les feuilles du format A5 sont des réductions (elles ont la même forme) de celles du format A4. De même, en découpant une feuille du format A5 on obtient 2 feuilles du format A6, etc. Au départ le format A0 est définit par son aire, qui vaut approximativement 1 m².

Remarque : le format des feuilles de papier est calculé pour que la moitié d'une feuille soit approximativement une réduction de la feuille initiale. Si a et b sont les côtés de la feuille initiale ($a>b$), la demi feuille mesure b sur $a/2$.

Pour qu'il s'agisse d'une réduction, on doit avoir des rapports égaux : $\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}}$.

Cela donne : $\frac{a}{b} = b \times \frac{2}{a}$ et donc : $a^2 = 2 \times b^2$ ou encore : $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, ce qui conduit à : $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ et donc : $a = \sqrt{2} \times b$.

En prenant 21 cm pour b, on peut maintenant calculer a : $a = \sqrt{2} \times 21 \approx 29{,}69848481...$, ce qui explique la valeur 29,7 cm. Et pour b = 15 cm, on pourrait aussi calculer la valeur correspondante de a : $a = \sqrt{2} \times 15 \approx 21{,}21320344...$

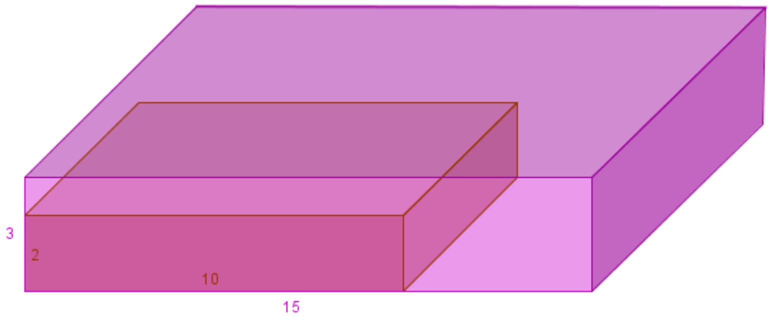


Les agrandissements/réductions ne se limitent pas à des surfaces planes. Un volume qui subit un agrandissement voit toutes ses longueurs multipliées par le même coefficient C. Voici par exemple à gauche, un prisme et une réduction à l'échelle ½ .

Un autre exemple : une éponge sèche a la forme d'un parallélépipède rectangle de côtés 10 cm, 5 cm et 2 cm. Lorsqu'on la mouille, cette éponge grossit de façon à ce que chacune de ses longueurs augmente de 50%. Est-ce un agrandissement ?
Si oui, quel en est le coefficient ?
Oui, chacune des longueurs est multipliée par le coefficient 1,5 (1+50/100=1,5). Les nouvelles dimensions de l'éponge, une fois mouillée, seront : 15 cm, 7,5 cm et 3 cm.

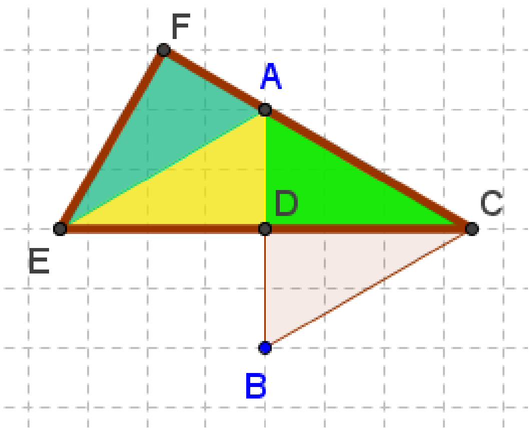
Propriété : dans un agrandissement (respectivement, une réduction) de coefficient C (on dit aussi de rapport C), les aires sont multipliées par C² et les volumes sont multipliés par C³.

Cela vient de la définition d'un agrandissement : toutes les longueurs sont multipliées par le coefficient C. Comme une aire se calcule avec 2 longueurs, les aires de la figure agrandie sont multipliées par C×C, donc C². De même, les volumes se calculent avec 3 longueurs, les volumes de la figure agrandie sont multipliés par C×C×C, donc C^3.



Pour notre éponge, le volume sec est 10×5×2=100 cm^3. Une fois mouillée, l'éponge a un volume égal a15×7,5×3=337,5 cm^3. Nous aurions pu trouver directement cette valeur en multipliant le volume sec par C^3, c'est-à-dire 100 par $1,5^3$. En effet, $100×1,5^3=100×3,375=337,5$.

Si un prisme de volume 100 cm^3 est réduit de moitié (comme sur notre illustration, un peu plus haut). Quel est le volume du prisme réduit ? De quel taux est réduit le volume de ce prisme ?
Il suffit de multiplier 100 (le volume initial) par le cube du coefficient de réduction. Ici, ce coefficient est ½ (car il est question de moitié). Donc le volume du prisme réduit est $100×0,5^3=100×0,125=12,5$ cm^3.
On constate que lorsque les longueurs sont réduites de 50% (la moitié), le volume est réduit d'un coefficient de 0,125 qui correspond à une diminution de 87,5% ((1 – 0,125)×100=87,5).

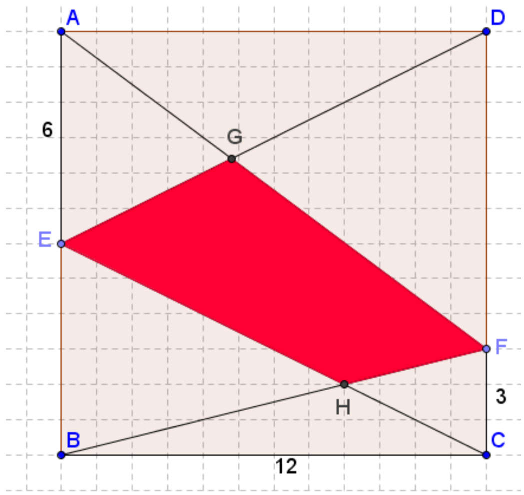


Un exemple en géométrie plane : ABC est un triangle équilatéral, c'est-à-dire que AB=AC=BC. D étant le milieu de [AB], le triangle ADC a une aire moitié de celle de ABC. Par symétrie par rapport à (AB) on construit le demi triangle équilatéral ADE. Puis, par symétrie par rapport à (AE) on construit le demi triangle équilatéral AFE. Le triangle CFE est lui aussi un demi triangle équilatéral (sauriez-vous le prouver ?). L'aire de CFE est 3 fois plus grande que celle de ADC ? On en déduit que le rapport d'agrandissement des longueurs entre les triangles ADC et CFE est égal à $\sqrt{3}$. Par construction EC est le double de DC, or EC est l'agrandissement de AC.

Donc EC=2×DC= $\sqrt{3}$ ×AC. On en déduit que DC = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ×AC.

Remarque : ce résultat peut facilement être retrouvé à l'aide du théorème de Pythagore.

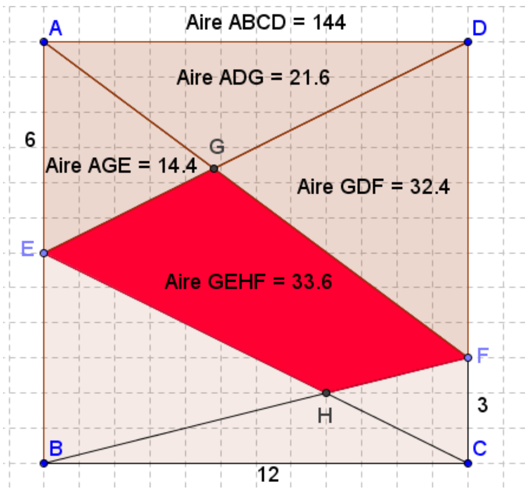
Un dernier exemple plus difficile, qui exploite ces propriétés de l'agrandissement/réduction :
ABCD est un carré de côté 12. Sur les côtés [AB] et [CD] de ce carré, on place les points E et F tels que AE=6 (E est le milieu de [AB]) et CF=3. On trace les segments [AF] , [FB] , [CE] et [ED] qui se coupent en G et H (voir figure). La question est : calculez l'aire du quadrilatère rouge EGFH.



Le triangle AGE est une réduction du triangle FGD. Cela provient du théorème de Thalès. Le coefficient de réduction est égal au rapport AE/DF, soit à 6/9 ou encore 2/3. On en déduit que l'aire de AGE vaut (2/3)² de celle de FGD. On peut alors considérer les triangles ADE et ADF qui ont des aires égales respectivement à 36 et 54, et qui sont composés respectivement de AGE et AGD (pour ADE) et FGD et AGD (pour ADF). Cela conduit au système d'égalités $\begin{cases} 36 = Aire_{AGE} + Aire_{AGD} \\ 54 = Aire_{FGD} + Aire_{AGD} \\ Aire_{AGE} = \frac{4}{9} Aire_{FGD} \end{cases}$ qui conduit à $\begin{cases} 36 = \frac{4}{9} Aire_{FGD} + Aire_{AGD} \\ 54 = Aire_{FGD} + Aire_{AGD} \end{cases}$, et par soustraction $54 - 36 = \frac{5}{9} Aire_{FGD}$ ce qui conduit à trouver $Aire_{FGD} = 32{,}4$ et puis $Aire_{AGD} = 21{,}6$ et aussi $Aire_{AGE} = 14{,}4$. De ceci on peut en déduire l'aire du triangle EGF (par soustraction entre l'aire du trapèze EADF et les 3 triangles dont on vient de calculer les aires) :

$Aire_{EGF} = Aire_{EADF} - Aire_{FGD} - Aire_{AGD} - Aire_{AGE}$

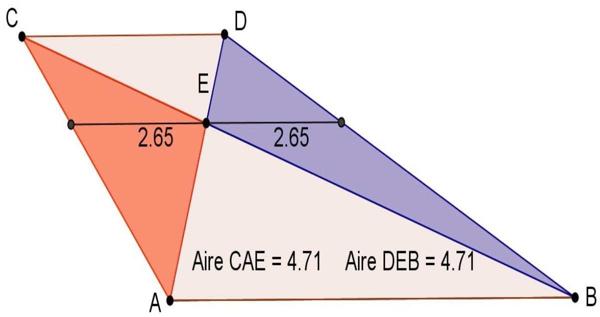
$Aire_{EGF} = 12 \times (6 + 9) \div 2 - 32{,}4 - 21{,}6 - 14{,}4 = 90 - 68{,}4 = 21{,}6$



Voilà, il suffit désormais de faire la même chose pour la deuxième partie du quadrilatère EGFH…

Comment ? Vous avez remarqué que AGD et EGF ont la même aire, donc vous en déduisez que BHC et EHF ont la même aussi ? C'est-à-dire 12 (BC×(*hauteur issue de H)*÷2=12×2÷2=12). N'est-ce pas un peu rapide ? Il faudrait prouver cela n'est-ce pas ? Pour confirmer cette remarque, voici la réponse calculée par le logiciel GeoGebra (à droite) : Le quadrilatère GEHF a une aire de 33,6. La différence avec l'aire du triangle EGF laisse donc pour le triangle EHF une aire de 12…

La propriété se confirme et peut s'énoncer ainsi : dans un trapèze ABCD on a (AB)//(CD) et des diagonales [AC] et [BD] qui se coupent en E. Les triangles AED et BEC ont la même aire. Ce qui se démontre. La figure ci-contre donne un élément de réponse : le segment parallèle aux bases qui passe par l'intersection E des diagonales a pour milieu E, les triangles rouge et bleu situés au-dessus ou au-dessous de ce segment ont donc même base et même hauteur...



3. Fonctions linéaires

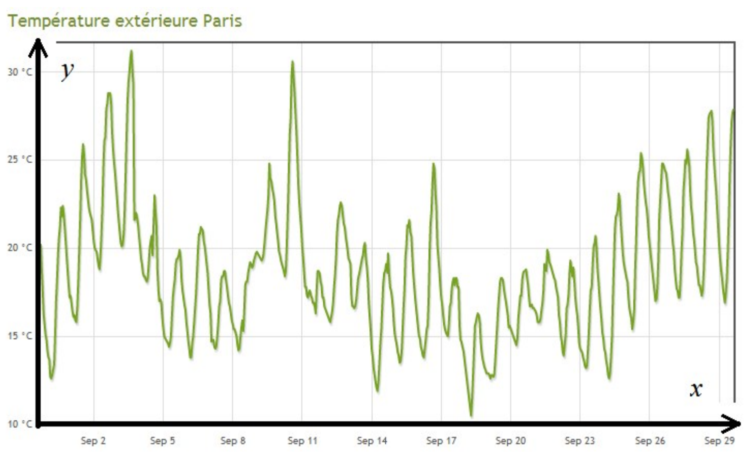
a) Notion de fonction

Définition : Une fonction numérique est un processus qui fabrique un nombre (souvent noté y) à partir d'un nombre variable (souvent noté x).

On note cette association avec une flèche : $x \to y$.

Exemple 1: une fonction peut être définie par la donnée de toutes les associations : S'il n'y a que les 7 nombres entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 au départ, on peut donner la liste de toutes les associations, comme dans l'exemple suivant où un élève a noté le nombre d'heures de cours par jour de la semaine (1 : lundi, 2 : mardi, etc.) $1 \to 5 ; 2 \to 6 ; 3 \to 4 ; 4 \to 6 ; 5 \to 5 ; 6 \to 0 ; 7 \to 0$.

Mais ce procédé est impossible a utiliser si l'on a un ensemble infini au départ.



Pour définir une fonction, on peut définir les associations entre les nombres de départ et les nombres d'arrivée au moyen d'*un graphique* ou d'*une formule* (une expression numérique qui fabrique le nombre y à partir du nombre x). Voici par exemple le graphique qui donne la température de l'air en °C en fonction de l'heure de la journée (un ensemble infini de nombres, compris entre 0 et 24), pour un endroit et un moment donnés (disons pour Paris, fin septembre 2011). On peut lire sur ce graphique, de façon approximative, la température pour chaque moment compris entre le 1er et le 29 septembre.

Définir le nombre d'arrivée à l'aide d'une formule est un procédé qui a l'avantage d'être exact : pour une valeur du nombre de départ, on connaît exactement le nombre d'arrivée. Prenons comme exemple la formule qui permet de calculer le volume y d'une sphère de rayon x (cette formule est au programme, nous l'étudierons dans un chapitre ultérieur) : $y=\frac{4}{3}\times\pi x^3$. Évidemment, cela paraît plus logique d'écrire le volume avec la lettre V et le rayon avec la lettre r, et la formule s'écrit alors $V=\frac{4}{3}\times\pi r^3$, mais il s'agit de la même formule. Lorsqu'on connaît le nombre x (le rayon), alors on peut calculer le nombre y. Par exemple, pour une balle de ping-pong, le rayon vaut x= 20 mm, le volume de la balle de ping-pong, considérée ici comme une sphère, est $y=\frac{4}{3}\times\pi\, 20^3=\frac{32000\pi}{3}\approx 33510$ mm^3, soit environ 33,5 cm^3. Cette formule nous permet de calculer le volume exact ou approché de n'importe quelle sphère, pourvu qu'on connaisse son rayon. Pour donner un autre exemple, la Terre, qui peut être assimilée à une sphère de 6400 km de rayon, a un volume de $\frac{4}{3}\times\pi\, 6400^3\approx 1{,}1\times10^{12}$ km^3. Avec ce type de fonction (définie par une formule), on pourra donc calculer des valeurs exactes et on pourra aussi faire d'autres choses comme d'en donner une représentation graphique.

<u>Vocabulaire</u> : On dit que y est l'<u>image</u> de x par la fonction en question, tandis que x est un <u>antécédent</u> de y par cette fonction.

Notez bien que cela signifie que x ne peut avoir qu'une seule image par la fonction alors que y peut avoir plusieurs antécédents, ou aucun. Dans l'exemple 1 ci-dessus, 1 et 5 avaient pour image le même nombre 5, de même 2 et 4 avaient la même image 6, et aussi 6 et 7 ont la même image 0. Par conséquent, 0, 5 et 6 sont des nombres qui ont, pour cette fonction, deux antécédents. Les nombre 1, 2 ou 3 n'ont, quant à eux, aucun antécédent pour cette fonction. Seul le nombre 3 avait une image unique pour cette fonction (le nombre 4).

<u>Notation</u> : Si on note f cette fonction, alors on peut résumer tout ceci par l'égalité $y = f(x)$. Cela se lit : « y égal f de x » mais cela signifie que y est l'image de x par la fonction f. Une autre notation utilisée pour décrire ceci est , $f:x\rightarrow y$ qui se lit « f est la fonction qui, à x, associe le nombre y ».

Dans notre exemple 1, si la fonction s'appelle f, nous avons $f(1)=f(5)=5$; $f(2)=f(4)=6$; $f(6)=f(7)=0$ et $f(3)=4$. Cette notation fonctionnelle ne doit pas être confondue avec la multiplication : f n'est pas un nombre qui est multiplié par le nombre entre parenthèses. f est le nom de la fonction que l'on applique à un nombre variable x (mis entre parenthèses pour dire que c'est lui que l'on va soumettre au procédé de fabrication qu'est la fonction f).

b) <u>Traduction de la situation de proportionnalité dans le langage des fonctions</u>

<u>Définition</u> : Une fonction *linéaire* de coefficient c associe à tout nombre x, un nombre y égal à $c\times x$. Ainsi la fonction f définie par $f:x\rightarrow c\times x$ est une fonction linéaire.

<u>Remarque</u> : Dans ce cas, y est proportionnel à x. Une fonction linéaire ne fait que traduire une situation de proportionnalité entre x et y.

<u>Exemples</u> : la fonction $f:x\rightarrow 3x$ est une fonction linéaire de coefficient 3.

La fonction $g:x\rightarrow(x+1)^2-(x^2+1)$ est-elle une fonction linéaire? Oui, car si l'on développe l'image de x par g : $g(x)=(x+1)^2-(x^2+1)=x^2+2x+1-x^2-1=2x$. g est une fonction linéaire de coefficient 2.

Si l'on sait qu'une fonction est linéaire et si l'on connait l'image d'un nombre alors on peut déterminer le coefficient de cette fonction, appelé coefficient de linéarité. En effet, si $f(x)=c\times x=y$, on en déduit que $c=y\div x$.

Par exemple, si f est linéaire et que $f(70)=14$, alors le coefficient de linéarité de f est $c=\frac{14}{70}=\frac{2}{10}=0{,}2$. Par conséquent, on aura pour tout nombre x, $f(x)=0{,}2x$.

Vérification : $f(70)=0{,}2\times70=14$.

Nous reviendrons aux fonctions linéaires dans un chapitre ultérieur consacré aux fonctions.