Chapitre 1 : Les nombres rationnels

Programme officiel BO du 28/08/08
Connaissances : Diviseurs communs à deux entiers, PGCD. Fractions irréductibles. Opérations sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire.
Capacités : *Connaître et utiliser un algorithme donnant le PGCD de deux entiers (algorithme des soustractions, algorithme d'Euclide).* Calculer le PGCD de deux entiers. *Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux.* Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.
Commentaires :*Plusieurs méthodes peuvent être envisagées.*
La connaissance de relations arithmétiques entre nombres – que la pratique du calcul mental a permis de développer – permet d'identifier des diviseurs communs de deux entiers. Le recours à une décomposition en produits de facteurs premiers est possible dans des cas simples mais ne doit pas être systématisée. Les tableurs, calculatrices et logiciels de calcul formel sont exploités. Dans le cadre du socle commun, les élèves utilisent leur calculatrice pour rendre irréductible une fraction donnée. Dans le cadre du socle commun, l'addition, la soustraction et la multiplication « à la main » de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, sont exigibles seulement dans des cas simples ; pour l'addition et la soustraction, il s'agit uniquement des cas où un calcul mental est possible. Dans les autres cas, la calculatrice est utilisée.

1. Les différentes sortes de nombres

a) Les nombres entiers

Définition : On obtient les nombres entiers en ajoutant ou retranchant des unités à zéro.

On distingue les entiers supérieurs à zéro, appelés entiers positifs ou « naturels » et les entiers inférieurs à zéro appelés entiers négatifs. L'ensemble des entiers positifs et négatifs est appelé ensemble des entiers **relatifs**.

3 et -3 sont des entiers opposés (leur somme est nulle) ; $-x$ n'est négatif que si x est positif...

Définitions : une **fraction** est un quotient de 2 nombres entiers, le diviseur du quotient (appelé dénominateur de la fraction) étant non nul. Une **fraction décimale** est une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 (10^n avec n entier positif ou nul).

Remarque : l'ensemble des entiers est infini. Il n'y a pas de plus grand entier, ni de plus petit entier.

b) Les nombres décimaux

Définition : Un nombre est **décimal** s'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale. Ainsi 12,5 est décimal car il peut s'écrire $\frac{125}{10}$ mais 12 aussi est décimal car il peut s'écrire $\frac{120}{10}$ ou $\frac{12}{1}$.
L'écriture décimale d'un nombre décimal comporte une partie entière et une partie décimale séparées par une virgule. La partie décimale est une suite de chiffres qui, à partir d'un certain rang, est nulle.

Le quotient 1/8 est décimal, il s'écrit 0,125 ou 0,12500000… ou encore $\frac{125}{1000}$.
Le quotient 1/3 n'est pas décimal, son écriture décimale 0,3333…une suite infinie de 3.

Remarques : Un entier est toujours un décimal, mais un nombre décimal n'est généralement pas un entier. On dit que l'ensemble des entiers est inclus dans l'ensemble des décimaux, comme on dirait que l'ensemble des chiens est inclus dans l'ensemble des animaux (tous les chiens sont des animaux, mais tous les animaux ne sont pas forcément des chiens).

c) Les nombres rationnels

Définition : Un nombre est **rationnel** s'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ d'un quotient d'entiers.
Propriété caractéristique : dans **l'écriture décimale** d'un nombre rationnel, il y a une suite de chiffres qui se répète jusqu'à l'infini.

12,5 est rationnel car il peut s'écrire $\frac{125}{10}$ ou encore $\frac{25}{2}$ Ce nombre est aussi, on l'a vu, un décimal.
$\frac{1}{3}$ est un rationnel non décimal. Son écriture décimale illimitée comporte une infinité de chiffres 3 qui se répètent. On peut le noter 0,3333... ou plus simplement 0,$\underline{3}$ (on souligne ce qui se répète).
Autres exemples de rationnels non décimaux: $\frac{1}{11}$ = 0,$\underline{09}$, $\frac{1}{17}$ = 0,$\underline{0588235294117647}$ (une séquence de 16 chiffres se répète), etc.

Remarque : Un décimal est toujours rationnel, mais un rationnel n'est généralement pas un décimal.

Curiosité : pour trouver l'écriture fractionnaire d'un nombre rationnel connu par son développement décimal périodique, il suffit de généraliser la méthode suivante :
Soit un nombre x = 2,5123123123123… qu'on peut noter $2{,}5\underline{123}$. Comme il y a une suite de 3 chiffres qui se répète, nous allons multiplier x par 10^3, c'est-à-dire par 1000. $1000x = 2512{,}3\underline{123}$. On remarque qu'à partir d'un certain rang les décimales de $1000x$ et x sont égales et donc elles vont disparaître si on effectue leur différence. $1000x - x = 999x = 2512{,}3\underline{123} - 2{,}5\underline{123} = 2509{,}8$. Par conséquent $999x = 2509{,}8$ et donc $x = 2509{,}8 \div 999$, ce qui donne la fraction $\frac{25098}{9990}$ qui se simplifie par 6 pour donner $\frac{4183}{1665}$. Voilà, ce n'est pas plus compliqué que ça ! Vous pouvez aussi utiliser le convertisseur Mathadomicile (l'option Deci>Frac ne fait rien d'autre qu'appliquer cette méthode) qui nous apprend que la suite « 123 » se répète lorsqu'on divise par 1665 les 15 nombres inférieurs à 1665 suivants : 52, 187, 205, 385, 520, 538, 718, 853, 871, 1051, 1186, 1204, 1384, 1519 et 1537. Ici, il s'agit de 853 car $\frac{4183}{1665} = 2 + \frac{853}{1665}$.

43. La suite 123 de longueur 3 se rencontre lorsqu'on divise par 1665 les nombres :
52 187 205 385 520 538 718 853 871 1051 1186 1204 1384 1519 1537

Propriété : Pour tout nombre rationnel, il existe une fraction plus simple que toutes les autres, c'est-à-dire écrite avec les entiers les plus proches de zéro, on l'appelle la fraction **irréductible**.

Nous reviendrons plus loin sur cette notion. Rappelons ici comment on simplifie une fraction en utilisant l'égalité $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$, valable pour tout nombres a, b et c (b et c étant non nuls). Il faut reconnaître un diviseur commun du numérateur et du dénominateur de la fraction (c dans la formule), la fraction simplifiée étant obtenue en divisant par c ces deux nombres.
Exemple : On peut simplifier $\frac{30}{12}$ par 2 car 30 et 12 sont pairs tous les deux : $\frac{30}{12} = \frac{15 \times 2}{6 \times 2} = \frac{15}{6}$.
On peut encore simplifier cette fraction par 3 car 15 et 6 sont multiples de 3 tous les deux : $\frac{15}{6} = \frac{5 \times 3}{2 \times 3} = \frac{5}{2}$. Finalement la fraction obtenue n'est plus simplifiable, elle est irréductible.

Remarque : L'ensemble des rationnels est un ensemble infini. Cet ensemble est-il beaucoup plus grand que l'ensemble des entiers (entre chaque entier, comme par exemple entre 0 et 1, il y a déjà une infinité de nombres rationnels)? Réponse surprenante : non, il est possible de dénombrer les nombres rationnels (de les compter avec des entiers) sans en oublier aucun. Par exemple on peut compter les rationnels strictement positifs en faisant : $n°1 : \frac{1}{1}$; $n°2 : \frac{2}{1}$; $n°3 : \frac{1}{2}$; $n°4 : \frac{3}{1}$; $n°5 : \frac{2}{2}$; $n°6 : \frac{1}{3}$; etc. On fait augmenter progressivement la somme du numérateur et du dénominateur (elle vaut 2 d'abord pour la fraction n°1, puis 3 pour les 2 fractions suivantes, puis 4 pour les 3 suivantes, puis 5 pour les 4 suivantes, etc.). Ce procédé est connu sous le nom d'algorithme zigzag.

Autre remarque : Les nombres décimaux possèdent deux écritures décimales distinctes. La première écriture est l'écriture *propre* : 1 ou 12,5 sont des écritures propres de décimaux (à partir d'un certain rang, il y a une suite infinie de zéro que l'on peut ne pas écrire). La seconde écriture est dite *impropre*, car elle contient une infinité de chiffres 9 qui se répètent jusqu'à l'infini (on ne peut pas les ignorer). Par exemple 0,9999... est l'écriture impropre de 1 ; 12,49999... est l'écriture impropre de 12,5. Effectuez la soustraction 1−0,9999... et vous trouverez 0,0000... c'est-à-dire 0. Ou encore considérez que $1 = 3 \times \frac{1}{3} = 3 \times 0{,}333\ldots = 0{,}999\ldots$

d) Les nombres irrationnels

Définition : Un nombre est **irrationnel** s'il ne peut pas s'écrire sous forme de fraction.

Exemples d'irrationnels : $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $1-\sqrt{2}$; etc. π ; $\frac{\pi}{2}$; $\pi+2$; 0,1010010001..., etc.
C'est le mathématicien grec Euclide qui montra, il y a 2300 ans, que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel et donc qu'il ne pouvait s'écrire comme un quotient d'entiers. Pour cela il supposa qu'il l'était et donc qu'il

existait deux nombres entiers a et b tels que la fraction $\frac{a}{b}$ soit irréductible et égale à $\sqrt{2}$. Comme $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, on devait avoir $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$, soit $\frac{a^2}{b^2}=2$ et donc $a^2=2\times b^2$. Le nombre a^2 devait donc être pair. Or le carré d'un nombre pair étant toujours pair, le carré d'un impair étant toujours impair[1], de cette propriété il déduisit que a était pair. Comme a était pair, on pouvait l'écrire comme le double d'un entier a', et donc on pouvait écrire $a^2 = (2a')^2 = 4a'^2$. On en déduit que $2b^2=4a'^2$ et en simplifiant par 2 : $b^2=2a'^2$. Finalement b^2 devait être pair aussi, et donc b également. Mais si a et b sont pairs tous les deux, la fraction de départ serait simplifiable par 2, ce qui n'est pas possible avec l'hypothèse de départ (la fraction est irréductible). Euclide conclut donc, comme son hypothèse de départ conduisait à une contradiction, que cette hypothèse était fausse. Il n'existe donc pas de fraction égale à $\sqrt{2}$, ce nombre est irrationnel.

Curiosité : Il n'est pas facile de prouver l'irrationalité d'un nombre. Pour le nombre π par exemple, il faudra attendre plus de 20 siècles, puisque ce n'est qu'en 1761 que Johann Lambert, un autodidacte qui quitta l'école à 12 ans, prouva ce résultat de façon définitive. Si l'on considère la suite des décimales de ce nombre, force est de constater qu'il n'y a pas de séquence de chiffres qui se répète de façon évidente. Si aujourd'hui il ne faut que quelques secondes à un ordinateur pour calculer un millier de chiffres du développement décimal de π, à l'époque de Lambert on en connaissait pas plus de 20 ! Un siècle plus tard, en 1874, Shanks en calcula à peine 707 qui furent inscrites dans la coupole du Palais de la Découverte à Paris, les 200 dernières étant fausses (on s'en aperçut 70 ans plus tard!). Pour prouver l'irrationalité de π, Lambert prouva un résultat plus général, à savoir que si x est rationnel alors tan$x$ ne l'est pas (tan$x$ étant la tangente d'un angle x exprimé en radian, une unité définie par $\frac{\pi}{4}\text{rad}=45°$). Et comme $\tan(\frac{\pi}{4})=1$ est rationnel il en conclut que ($\frac{\pi}{4}$) ne l'est pas, donc π non plus. Vous pouvez utiliser le calculateur des décimales de π de Mathadomicile pour chercher où se situent les occurrences d'une suite « *abc* » de chiffres dans les n premières décimales de ce nombre (option Décimales de Pi, précisez ensuite n et puis « *abc* »). Le calculateur affiche 100 chiffres par ligne et calcule 10000 décimales en 5 secondes environ. Voici où se situe la 1ère occurrence de la suite de chiffres « 123 ». Vous pouvez ainsi trouver votre date de naissance, votre code de sécurité sociale, le nombre de secondes qu'il vous reste à vivre, etc.

Pi = 3.141 5926 5358 9793 2384 6264 3383 2795 0288 4197 1693 9937 5105 8209 7494 4592 3078 1640 6286 2089 9862 8034 8253 4211
7067 9821 4808 6513 2823 0664 7093 8446 0955 0582 2317 2535 9408 1284 8111 7450 2841 0270 1938 5211 0555 9644 6229 4895 4930
3819 6442 8810 9756 6593 3446 1284 7564 8233 7867 8316 5271 2019 0914 5648 5669 2346 0348 6104 5432 6648 2133 9360 7260 2491
4127 3724 5870 0660 6315 5881 7488 1520 9209 6282 9254 0917 1536 4367 8925 9036 0011 3305 3054 8820 4665 2138 4146 9519 4151
1609 4330 5727 0365 7595 9195 3092 1861 1738 1932 6117 9310 5118 5480 7446 2379 9627 4956 7351 8857 5272 4891 2279 3818 3011
9491 2983 3673 3624 4065 6643 0860 2139 4946 3952 2473 7190 7021 7986 0943 7027 7053 9217 1762 9317 6752 3846 7481 8467 6694
0513 2000 5681 2714 5263 5608 2778 5771 3427 5778 9609 1736 3717 8721 4684 4090 1224 9534 3014 6549 5853 7105 0792 2796 8925
8923 5420 1995 6112 1290 2196 0864 0344 1815 9813 6297 7477 1309 9605 1870 7211 3499 9999 8372 9780 4995 1059 7317 3281 6096
3185 9502 4459 4553 4690 8302 6425 2230 8253 3446 8503 5261 9311 8817 1010 0031 3783 8752 8865 8753 3208 3814 2061 7177 6691
4730 3598 2534 9042 8755 4687 3115 9562 8638 8235 3787 5937 5195 7781 8577 8053 2171 2268 0661 3001 9278 7661 1195 9092 1642
0198 9380 9525 7201 0654 8586 3278 8659 3615 3381 8279 6823 0301 9520 3530 1852 9689 9577 3622 5994 1389 1249 7217 7528 3479
1315 1557 4857 2424 5415 0695 9508 2953 3116 8617 2785 5889 0750 9838 1754 6374 6493 9319 2550 6040 0927 7016 7113 9009 8488
2401 2858 3616 0356 3707 6601 0471 0181 9429 5559 6198 9467 6783 7449 4482 5537 9774 7268 4710 4047 5346 4620 8046 6842 5906
9491 2933 1367 7028 9891 5210 4752 1620 5696 6024 0580 3815 0193 5112 5338 2430 0355 8764 0247 4964 7326 3914 1992 7260 4269
9227 9678 2354 7816 3600 9341 7216 4121 9924 5863 1503 0286 1829 7455 5706 7498 3850 5494 5885 8692 6995 6909 2721 0797 5093
0295 5321 1653 4498 7202 7559 6023 6480 6654 9911 9881 8347 9775 3566 3698 0742 6542 5278 6255 1818 4175 7467 2890 9777 7279
3800 0816 4706 0016 1452 4919 2173 2172 1477 2350 1414 4197 3568 5481 6136 1157 3525 5213 3475 7418 4946 8438 5233 2390 7394
1433 3454 7762 4168 6251 8983 5694 8556 2099 2192 2218 4272 5502 5425 6887 6717 9049 4601 6534 6680 4988 6272 3279 1786 0857
8438 3827 9679 7668 1454 1009 5388 3786 3609 5068 0064 2251 2520 5117 3929 8489 6084 1284 8862 6945 6042 4196 5285 0222 1066
1186 3067 4427 8622 0391 9494 5047 1237 1378 6960 9563 6437 1917 2874 6776 4657 5739 6241 3890 8658 3264 5995 8133 9047 8027
5900 9946 5764 0789 5126 9468 3983 5259 5709 8258 2262 0522 4894 0772 6719 4782 6848 2601 4769 9090 2640 1363 9443 7455 3050
6820 3496 2524 5174 9399 6514 3142 9809 1906 5925 0937 2216 9646 1515 7098 5838 7410 5978 8595 9772 9754 9893 0161 7539 2846
8138 2686 8386 8942 7741 5599 1855 9252 4595 3959 4310 4997 2524 6808 4598 7273 6446 9584 8653 8367 3622 2626 0991 2460 8051

1 Le carré d'un nombre pair peut s'écrire $(2n)^2 = 4n^2$ qui est pair. Le carré d'un nombre impair peut s'écrire $(2n+1)^2$ qui se développe en $4n^2+4n+1=4(n^2+n)+1$ ce nombre est la somme de 1 et d'un nombre pair, c'est donc un nombre impair.

2. Les approximations numériques

Cette partie est un rappel. Ces notions ont été vues, partiellement au moins, les années précédentes.

a) Approximations décimales

Définition : On dit qu'un nombre d est une **valeur approchée** d'un nombre x à 0,01 près si la différence entre ces 2 nombres ne dépasse pas 0,01. La **précision** de l'approximation est ici le nombre 0,01 qui peut être remplacé par n'importe quel nombre (par 1 par exemple, ou par 0,001 ou même par $\frac{\pi}{10}$).

Exemples : 3 est une valeur approchée de π à 1 près car : $\pi - 3 = 0{,}14159\ldots < 1$. On voit que 3 est aussi une valeur approchée de π à 1,2 près.
3,14 est une valeur approchée de π à 0,01 près car : $\pi - 3{,}14 = 0{,}00159\ldots < 0{,}01$. Remarquons que 3,15 est une autre valeur approchée de π à 0,01 près et que 3,142 en est une autre. Une valeur approchée à 0,01 près n'a pas forcément 2 chiffres après la virgule.

Définition : On parle de valeur approchée **par défaut** si celle-ci (d) est inférieure au nombre approché (x). Sinon on parle de valeur approchée **par excès**.

3,14 est une valeur approchée par défaut de π tandis que 3,1416 en est une par excès.

Définition : On dit que d est l'**arrondi** de x au centième le plus proche (ou à 2 chiffres) si d est le nombre à 2 chiffres après la virgule le plus proche de x.

Remarque : On définit aussi l'arrondi au centième par excès et l'arrondi au centième par défaut. Dans cette définition, le nombre 0,01 fait référence à la position du dernier chiffre de l'arrondi. Il s'agit de la précision de l'arrondi qui est une approximation du nombre de départ. La précision d'un arrondi est toujours une puissance de dix, par exemple ici $0{,}01=10^{-2}$.
La fraction $\frac{1}{3}$ arrondie au centième le plus proche est 0,33 ; c'est une valeur approchée par défaut.
La fraction $\frac{2}{3}$ arrondie au centième le plus proche est 0,67 ; c'est une valeur approchée par excès.
On note : $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$ et $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$.

Remarque : on peut écrire tous les nombres décimaux d sous la forme suivante, appelée **notation scientifique** $d=a\times 10^n$ où a est un décimal dont la partie entière n'a qu'un chiffre non nul, c'est-à-dire que $1\leq a<10$ si $a>0$ et $-10<a\leq -1$ si $a<0$ et n est un entier.
Exemples de notations scientifiques : $0{,}5=5\times 10^{-1}$; $1234=1{,}234\times 10^3$; $0{,}4567\times 10^{-6}=4{,}567\times 10^{-7}$

b) Approximations rationnelles

On peut donner pour tout nombre une ou plusieurs valeurs approchées écrites sous la forme décimale mais on peut aussi leur donner des valeurs approchées rationnelles. Par exemple le nombre π est assez bien approché par la fraction $\frac{22}{7}\approx 3{,}1428$, mais d'autres fractions s'en approchent davantage encore : $\frac{355}{113}\approx 3{,}14159292$ donne 6 décimales exactes, $\frac{103993}{33102}$ en donne 9...

On peut obtenir une suite de valeurs approchées rationnelles de plus en plus précises en utilisant une écriture rationnelle en escalier qui peut être illimitée (on parle dans ce cas de développement en fraction continue). On montre par exemple que $\sqrt{3}$ peut se calculer de la façon suivante :

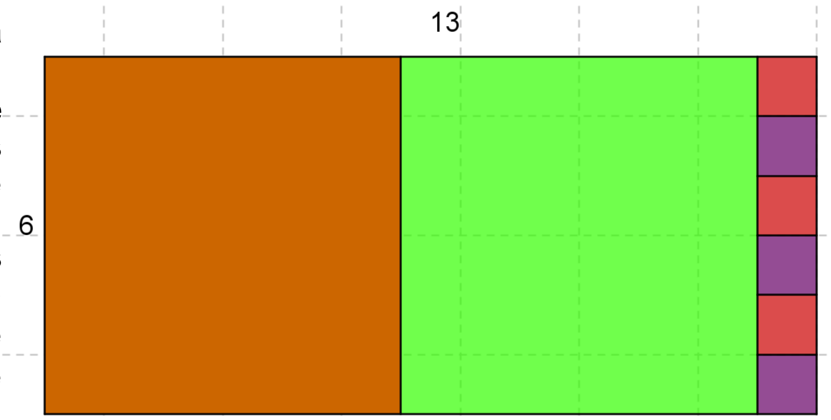
$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}$$

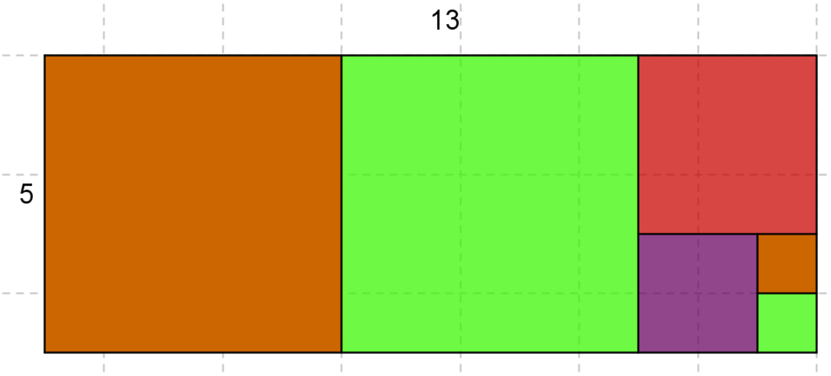
Cela conduit à une suite de valeurs approchées : $\sqrt{3}\approx 1+\frac{1}{1}=2$

$$\sqrt{3}\approx 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}\approx 1{,}67 \qquad \sqrt{3}\approx 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}=1{,}75$$

Propriété intéressante (mais hors programme) : les nombres rationnels ont des développements simples (qui s'arrêtent au bout d'un certain rang) en fraction continue. Les irrationnels ont des développements infinis, mais pour les racines carrées ces développement sont périodiques (les chiffres se répètent). Par exemple, pour $\sqrt{3}$ il s'agit des nombres 1 et 2 qui se suivent en alternance jusqu'à l'infini. Pour $\sqrt{2}$, c'est une succession de 2. On note cela $\sqrt{2}=[1\,;\overline{2,2}]$ et $\sqrt{3}=[1\,;\overline{1,2}]$.

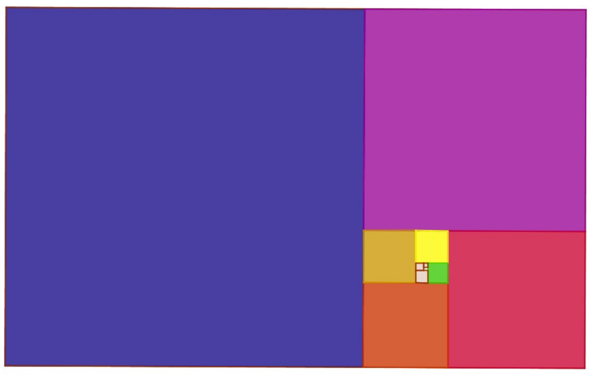
Écrire le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ sous la forme d'une fraction continue revient à découper un rectangle mesurant a de long et b de large avec des carrés, les plus grands possibles. Par exemple, le rectangle mesurant 13 de long sur 6 de la large sera découpé ainsi : 2 grands carrés, puis 6 petits. On peut en déduire que $\frac{13}{6}=2+\frac{1}{6}$. La division du rectangle de 13 sur 5 ci-contre permet, quant à elle, de montrer que :





$$\frac{13}{5}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

Pour les nombres irrationnels, il n'est pas possible d'effectuer cette division en un nombre fini d'étapes, car les côtés du rectangle sont « incommensurables ». Voyez par exemple cette décomposition d'un rectangle d'or : à chaque étape, on peut enlever un seul carré, et les étapes sont en nombre infini. Les côtés de ce rectangle sont dans un rapport nommé Φ, le « nombre d'or », et qui vaut :



$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}\approx 1{,}618$$

Remarquez qu'après chaque suppression d'un carré, le rectangle qui apparaît a les mêmes proportions que le rectangle initial.

3 La division euclidienne et son application à la recherche du PGCD de deux entiers

a) La division euclidienne

C'est une division entre entiers où on s'arrête à un quotient entier. Le reste aussi est un entier. Exemple 12÷7 = 1, reste 5.

On peut présenter le résultat de cette division en ligne.

Exemple : 12 = 7×1+5

Dividende	Diviseur
12	7
5	1
Reste	Quotient

On pourrait aussi présenter ce résultat sous forme fractionnaire : $\frac{12}{7}=1+\frac{5}{7}$

Exemple d'application pour convertir des secondes en minutes :

2549 = 42×60+29, donc 2549 s = 42 min et 29 s. De la même façon on peut convertir les minutes en heures 1600 = 26×60+40, donc 1600 min = 26 h et 40 min, ou convertir les jours en heures : 1240 = 51×24+16, donc 1240 h = 51 j + 16 h.

b) Les diviseurs d'un nombre

Définition : a et b étant deux entiers naturels, a est un *diviseur* de b (ou b est un *multiple* de a) si la division euclidienne de b par a donne un reste nul.
On a dans ce cas $b \div a = c$ (un entier) qui peut aussi s'écrire $b = a \times c$

Exemples : 12 est un diviseur de 60 car 60÷12 = 5 qui est un entier. On peut écrire 60=12×5.
12 n'est pas un diviseur de 100 car 100÷12 = 8, reste 4. On peut écrire 100=12×8+4.
Remarques : Tous les entiers ont comme diviseur 1 car $a \div 1 = a$ (un entier).
Tous les entiers ont comme diviseur eux-mêmes car $a \div a = 1$ (un entier).

Définition : Un entier naturel est *premier* si il n'a que lui même et 1 comme diviseur.

Les nombres premiers sont en nombre infinis : les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, etc.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

A gauche, la méthode algorithmique appelée « crible d'Eratosthène », qui consiste en la suppression successive de tous les multiples de 2 (barrés en rouge), puis des multiples de 3 (en bleu), puis des multiples de 5 (barrés en vert), puis des multiples de 7 (en violet), etc. A chaque fois qu'un nombre n'est pas barré, il est premier. On barre alors tous ses multiples, et on continue ainsi pour obtenir tous les nombres premiers.

Ératosthène était un grec vivant à Alexandrie il y a 2200 ans environ. Directeur de la fameuse bibliothèque, il est connu pour avoir donné une bonne estimation du rayon de le Terre en se basant sur des considérations géométriques simples.

Voici les 250 nombres premiers supérieurs à 3 : − + < Cliquer ici pour a

5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79
83	89	97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239
241	251	257	263	269	271	277	281	283	293
307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421
431	433	439	443	449	457	461	463	467	479
487	491	499	503	509	521	523	541	547	557
563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673
677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821
823	827	829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941	947	953
967	971	977	983	991	997	1009	1013	1019	1021
1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069	1087	1091
1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151	1153	1163
1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217	1223	1229	1231
1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291	1297	1301
1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373	1381	1399
1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447	1451	1453	1459
1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511	1523	1531
1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583	1597	1601

Un programme de Mathadomicile donne la liste des nombres premiers supérieurs à une valeur donnée (Option « Premiers Supérieurs à », puis choisir un nombre). Voici par exemple les 250 nombres premiers supérieurs à 3 (avec 2 et 3, ce sont les 252 premiers nombres premiers). Pour obtenir les suivants, il suffit de cliquer sur le bouton marqué « + ».

Curiosité : Les nombres premiers sont en nombre infinis, par contre, ils se raréfient, c'est-à-dire qu'il y en a de moins en moins sur des intervalles de même amplitude : il y en a 95 entre 0 et 500, puis seulement 73 entre 500 et 1000, puis 71 entre 1000 et 1500, puis 64, 64, 63, etc. Les nombres premiers sont premiers dans le sens où ils servent à fabriquer tous les autres. Ce sont les nombres élémentaires dont les autres sont tirés. Le *théorème fondamental de l'arithmétique* (hors programme) affirme que **tout entier est décomposable de manière unique sous la forme d'un produit de nombres premiers**.

Savoir faire : si on s'intéresse à l'ensemble des diviseurs d'un nombre entier, on peut les trouver tous en décomposant ce nombre avec les nombres premiers de la manière suivante. Cherchons par exemple la décomposition de 60 en facteurs premiers. Pour cela divisons le par 2 autant de fois que possible, puis par 3, puis par 5, etc. jusqu'à tomber sur un quotient premier.
60÷2 = 30 ; 30÷2 = 15 ; 15÷3 = 5 et c'est fini car 5 est premier. Donc $60=2\times2\times3\times5=2^2\times3\times5$.
On trouve ensuite tous les diviseurs par combinaisons de ces 4 facteurs sauf 1 qui n'apparaît pas ici :

Facteurs premiers	Combinaisons de 2 facteurs	Combinaisons de 3 facteurs	Combinaisons de 4 facteurs
2 3 5	2×2=4 2×3=6 2×5=10 3×5=15	2×2×3=12 2×2×5=20 2×3×5=30	2×2×3×5=60

Dans l'ordre cela donne (il y en a douze) : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Astuce : Pour opérer la décomposition en facteurs premiers on adopte parfois une disposition verticale où l'on place les nombres premiers qui divisent notre nombre dans la colonne de droite.

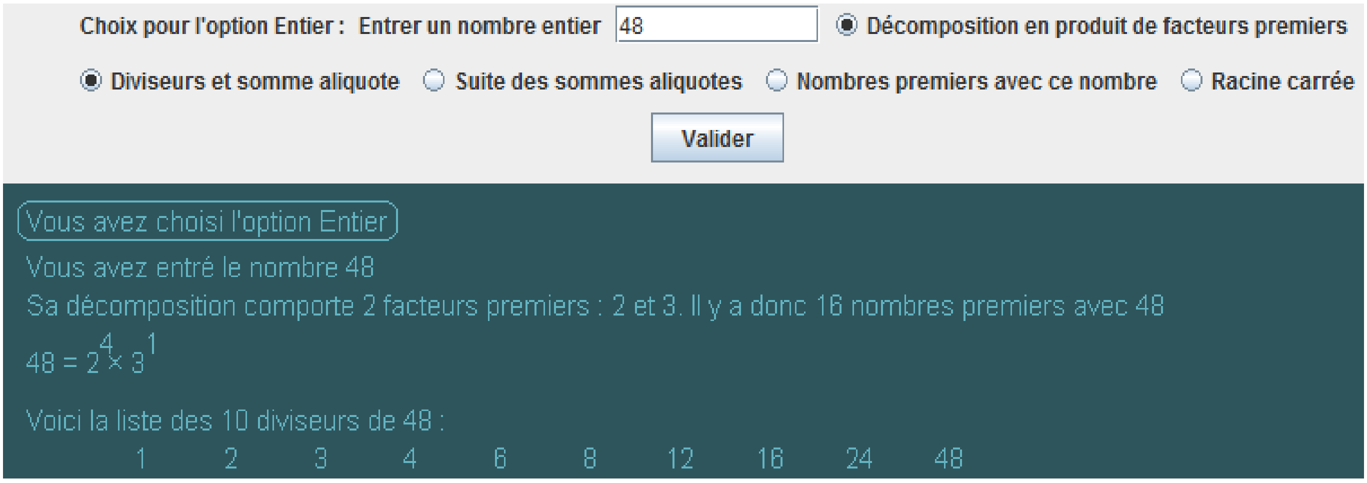
60	2	À gauche, en dessous du nombre de départ, on écrit les quotients successifs. À droite,
30	2	on écrit les diviseurs successifs.
15	3	On s'arrête lorsque le dernier quotient écrit est un nombre premier (on peut aussi aller
5	5	jusqu'à 1 puisque la division du nombre premier par lui-même donnera toujours 1. La
1		décomposition est le produit des nombres écrits à droite.

Remarque : La décomposition en facteurs premiers permet de trouver les diviseurs d'un nombre. Elle est utile aussi pour simplifier une fraction au maximum. Si on veut par exemple, simplifier la fraction $\frac{48}{60}$, on commence par décomposer le numérateur et le dénominateur selon leurs facteurs premiers. La décomposition de 48 étant $2\times2\times2\times2\times3=2^4\times3$, les diviseurs de 48 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 et 48. Mais la liste des diviseurs des 2 nombres est inutile si on ne veut que simplifier :

$$\frac{48}{60}=\frac{2\times2\times2\times2\times3}{2\times2\times3\times5}=\frac{2\times2}{5}=\frac{4}{5}.$$

La fraction obtenue est irréductible car 4 et 5 n'ont pas de diviseurs en commun. On peut aussi se passer de cette méthode car la décomposition en facteurs premiers ne fait pas partie des savoir-faire obligatoires en classe 3ème.

Un petit programme de Mathadomicile (option Entier, cocher Décomposition et Diviseurs) permet d'obtenir la décomposition en facteurs premiers de n'importe quel nombre entier, ainsi que la liste de ses diviseurs.



Curiosité : Le programme donne aussi la somme aliquote des diviseurs, c'est-à-dire la somme de tous les diviseurs stricts (les diviseurs du nombre sauf le nombre lui-même). Pour 60, cela fait 1+2+3+4+5+6+10+12+15+20+30=108. Le petit bouton à droite « descendre la suite aliquote » permet d'enchaîner cette décomposition avec celle de la somme aliquote. Une conjecture due à Catalan est qu'on finit soit sur un nombre premier et donc sur 1 et 0, soit on tombe sur un nombre « parfait » (dont la somme aliquote égale le nombre lui-même. 6 est le premier nombre parfait car la somme des diviseurs de 6=1+2+3 est égale à 6), soit enfin, on tombe sur une paire de « nombres amiables » (comme 220 et 284, chacun renvoyant sur l'autre) ou une « chaîne sociable » (comme 14288, 15472, 14536, 14264, 12496, la suite tourne en boucle sur ces 5 termes). Dans certains cas on ne sait pas comment la suite se finit (pour 276 par exemple, on ignore si la suite finit par redescendre). Pour 60 on trouve : 108, puis 172, 136, 134, 70, 74, 40, 50 et enfin 43 qui est premier et puis 1 et 0. Avec 48, on trouve 76, puis 64, 63 puis 41 qui est premier, 1 et 0. Si on part de 95 qui a pour diviseurs stricts 1, 5 et 19, la suite des sommes aliquotes est 25, puis 6 et on boucle sur 6 qui est un nombre parfait.

c) PGCD

Définition : Le *Plus Grand Diviseur Commun* à deux entiers a et b, noté PGCD (a ; b), est comme son nom l'indique le plus grand entier qui divise les deux nombres a et b.

Remarque : PGCD (a ; b) se trouve facilement lorsqu'on compare la liste des diviseurs de a et de b.
Les diviseurs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 18 et ceux de 30 sont : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.
Les diviseurs communs à 18 et à 30 sont donc : 1, 2, 3, 6 et le plus grand de ces diviseurs communs est 6, on note PGCD(18 ; 30) = 6.

Algorithme d'Euclide : méthode permettant de trouver le PGCD de deux nombres.
On divise le plus grand des 2 nombres par le plus petit, puis le diviseur par le reste, et on continue ainsi jusqu'à trouver un reste nul.

Exemple : Pour chercher le PGCD de 18 et 30, on divise 30 (le plus grand) par 18, puis 18 (le diviseur par 12 (le reste) et on continue en divisant 12 par 6. Là on s'arrête car le reste est nul. Le PGCD cherché est le dernier reste non nul (6 en bleu) qui est aussi le dernier diviseur…

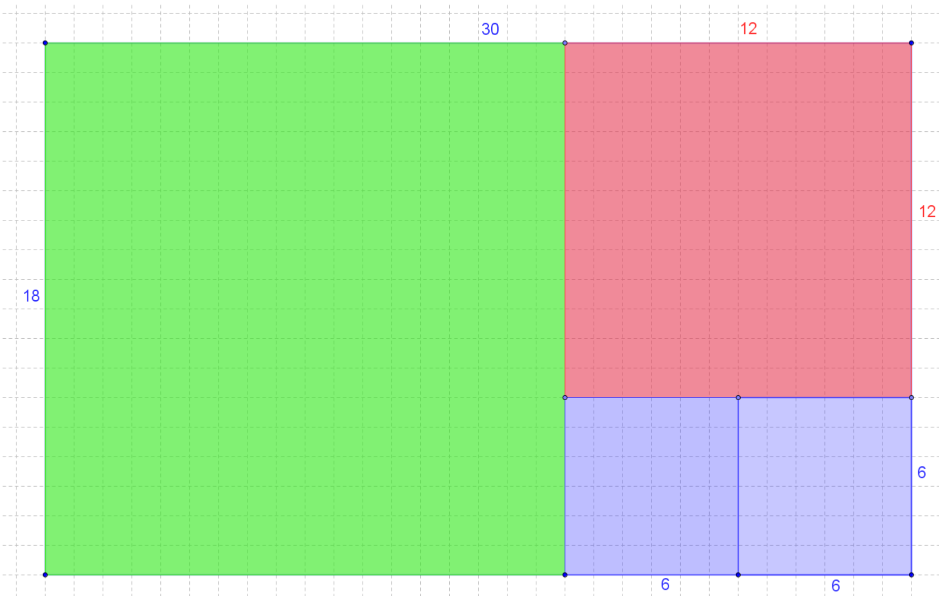
$$\begin{array}{r|l} 30 & 18 \\ \hline 12 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \hline 6 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & \underline{6} \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

donc PGCD(18 ; 30) = 6.
On peut aussi noter cette recherche avec les divisions euclidiennes en ligne :
30 = 18×1+12 ; 18 = 12×1+6 ; 12 = 6×2+0
On peut présenter ces divisions dans un tableau où ne figurent pas les quotients (inutiles pour la recherche du PGCD) et où on n'oubliera pas d'encadrer ou de surligner le PGCD trouvé pour justifier le résultat.

Dividende	Diviseur	Reste
30	18	12
18	12	6←**PGCD**
12	6←**PGCD**	0

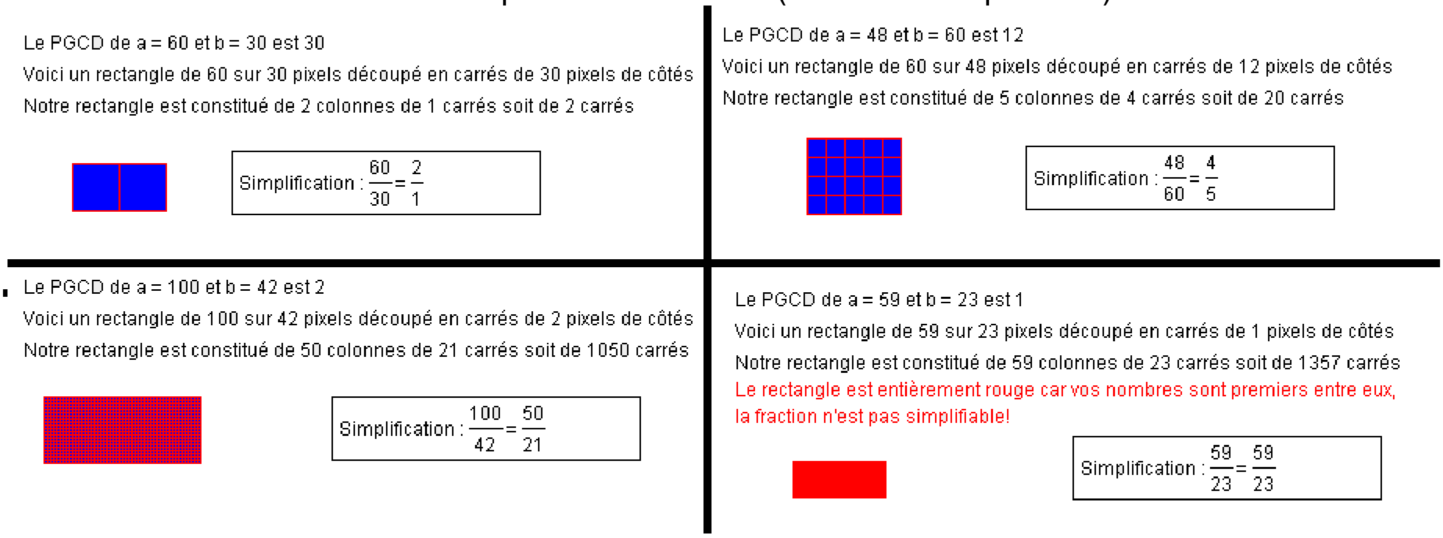
Élément de preuve : Une propriété est utile pour comprendre l'algorithme d'Euclide : si a et b sont des entiers divisibles par l'entier c avec $a>b$, alors b et r (le reste de la division euclidienne de a par b) le sont aussi si $r\neq 0$, et si $r=0$ alors b (le quotient de la même division) est un diviseur de a.
En effet si $a = bq+r$ et si $a = ca'$ et $b = cb'$ alors $r = ca' - cb'q = c(a' - b'q)$, il est divisible par c.
De proche en proche on finit par obtenir un reste nul, et dans ce cas là c'est le dernier diviseur qui est le PGCD cherché : c'est le fameux algorithme qui est présenté sous une forme géométrique par Euclide dans son livre « Les éléments ».

Euclide était un grec qui vécu, avant Ératosthène, à Alexandrie, en Égypte. Il laissa un très impressionnant traité de mathématiques qui fut un modèle pour sa rigueur et pour la quantité des sujets qui touchent autant à la géométrie (à 2 et 3 dimensions) et à l'arithmétique (sciences des nombres entiers).



La méthode d'Euclide a une base géométrique : pour trouver le PGCD de 18 et de 30, il va découper dans un rectangle mesurant 18 sur 30 un carré (18 sur 18), puis dans le restant, il enlève autant de carrés qu'il peut comme sur la figure de gauche. Il continue jusqu'à trouver un découpage qui tombe juste. Le côté du petit carré qu'il obtient est le PGCD cherché, il est le plus grand carré possible qui permet de carreler complètement le rectangle initial.
NB : C'est un même découpage qui nous a permis de trouver la fraction continue égale à une fraction donnée, par exemple ici, on pourrait en déduire que $\frac{30}{18}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$

Un petit programme de Mathadomicile (PGCD et applications) permet de visualiser ce découpage en carrés de taille maximum pour n'importe quel couple de nombres entiers a et b. Voici par exemple ce qu'il donne pour 30 et 60 (PGCD=30), 48 et 60 (PGCD=12), 42 et 100 (PGCD=2), et 23 et 59 (PGCD=1). Lorsque le PGCD vaut 1, le découpage en carrés devient tout rouge car il s'agit du cas où les carrés sont le plus petit possible (ici 1 pixel, il n'y a plus de place pour l'intérieur des carrés), la fraction irréductible et les nombres premiers entre eux (voir définition plus loin).



Astuce : on peut utiliser la calculatrice pour trouver le PGCD de 2 nombres. Si je tape 18÷30 sur ma calculatrice en mode fraction, elle affiche $\frac{3}{5}$ ce qui montre que la fraction est simplifiable. Le PGCD s'obtient alors en divisant 18 par 3 ou 30 par 5 (pour savoir par quel nombre a simplifié la calculatrice). Ici, évidemment on retrouve PGCD(18 ; 30) = 6. Mais cette astuce ne sert pas de justification dans une évaluation qui vise à contrôler qu'un élève connaît une méthode donnée, ici l'algorithme d'Euclide.

d) Nombres premiers entre eux

Nous venons de parler de la simplification des fractions. Le PGCD permet en effet de simplifier au maximum une fraction. Lorsqu'on a simplifiée une fraction au maximum, la fraction obtenue est dite *irréductible*. Le numérateur et le dénominateur de cette fraction irréductible n'ont plus de diviseurs en commun (à part 1), on les dits *premiers entre eux*.

Définition : 2 nombres entiers sont **premiers entre eux** si leur PGCD est 1.

Exemple : Des nombres comme 4 et 9, qui ne sont pas premiers, sont premiers entre eux car ils n'ont aucun diviseur en commun, sauf 1. PGCD(4 ; 9) = 1. Les fractions $\frac{4}{9}$ et $\frac{9}{4}$ sont irréductibles.

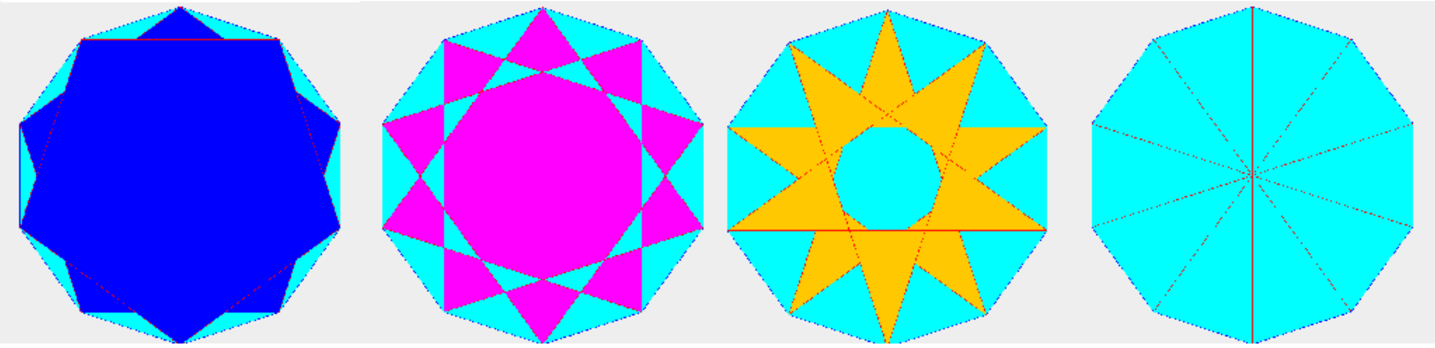
Propriété : Les nombres premiers sont toujours premiers entre eux. Forcément, ils n'ont pas d'autres diviseurs que 1 (et eux-mêmes). La fraction $\frac{59}{23}$ est forcément irréductible car 59 et 23 sont premiers, et donc ils sont premiers entre eux.

Pour prouver que 2 nombres **ne sont pas premiers entre eux**, *il suffit* de trouver un diviseur commun, n'importe lequel. Par exemple 1256 et 378 ne sont pas premiers entre eux car ce sont des nombres pairs, 3618 et 4521 ne sont pas premiers entre eux car ce sont des multiples de 3. Dans ce cas là, il est inutile de calculer le PGCD pour affirmer seulement que ces nombres ne sont pas premiers entre eux.

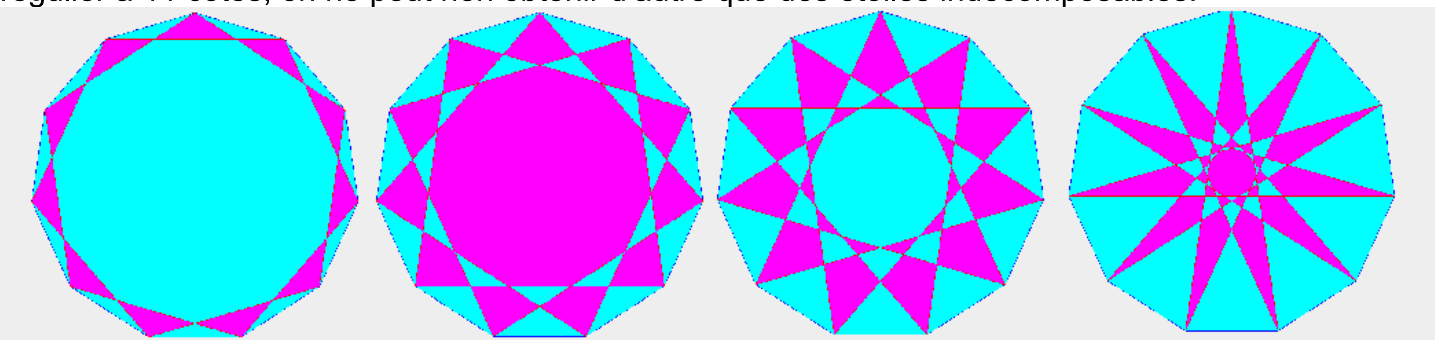
Pour prouver que 2 nombres **sont premiers entre eux**, par contre, *il faut* calculer leur PGCD et vérifier qu'il vaut 1. Si je dois montrer que la fraction $\frac{12345}{6788}$ est irréductible, c'est-à-dire que 12345 et 6788 sont premiers entre eux, je dois utiliser l'algorithme d'Euclide. Bien sûr, si on est malin, on peut utiliser la calculatrice avant de se lancer dans les calculs (voir l'astuce précédente). Si je tape 12345÷6788 sur ma calculatrice en mode fraction, elle affiche $\frac{12345}{6788}$ et donc cela me prouve que les nombres 12345 et 6788 sont premiers entre eux. Mais le professeur attendra une justification comme celle-ci :

Dividende	Diviseur	Reste
12345	6788	5557
6788	5557	1231
5557	1231	633
1231	633	598
633	598	35
598	35	3
35	3	2
3	2	1←**PGCD**
2	1	0

Un petit programme de Mathadomicile (Polygones étoilés) permet de visualiser cette notion de nombres premiers entre eux. Lorsque l'on joint de 2 en 2, ou de 3 en 3, ou de 4 en 4, ou de 5 en 5 les sommets d'un polygone régulier à 10 côtés, on s'aperçoit que dans le seul cas de 3 en 3, on obtient une étoile indécomposable (en rose). Dans tous les autres cas on décompose le polygone de départ en 2 pentagones (convexes en bleu lorsqu'on saute 1 sommet sur 2 et étoilés en jaune lorsqu'on saute 3 sommet sur 4). Ceci vient du fait que 10 est premier avec 3 alors qu'il ne l'est pas avec 2, 4 ou 5 :



Dans le cas d'un polygone régulier à 11 côtés, on obtient 3 étoiles indécomposables (en rose). Ceci vient du fait que 11 étant premier, est premier avec 2, avec 3 et aussi avec 4 et 5, et donc, lorsque l'on cherche à joindre de 2 en 2, ou de 3 en 3, ou de 4 en 4, ou de 5 en 5 les sommets d'un polygone régulier à 11 côtés, on ne peut rien obtenir d'autre que des étoiles indécomposables:



e) Application du PGCD aux problèmes de partage

Ceci a été pendant des années un classique du genre « brevet ». On demande d'effectuer un partage d'une collection d'objets (ou d'individus) contenant n_A objets de type A et n_B objets de type B. Le partage demandé doit aboutir à un nombre maximum de lots (ou de groupes) contenant chacun une même composition d'objets A et B.

Exemple : On veut partager 160 personnes en équipes mixtes contenant chacune autant d'hommes et autant de femmes. Sachant qu'il y a 60 femmes au total, combien d'équipes peut-on faire au maximum ? Combien de femmes y aura t-il dans chaque équipe ? Combien de personnes y aura t-il dans chaque équipe ?

Ici, il y a 60 femmes (individus de type A) et 100 hommes (individus de type B) à partager.
On veut partager, donc diviser 60 et 100 par un même nombre, le plus grand possible. C'est le PGCD de 60 et 100 qui se trouve être 20. Donc on pourra faire, au maximum, 20 groupes contenant chacun 3 femmes (60÷20=3) et 5 hommes (100÷20=5), soit 8 personnes au total.

NB : pour bien rédiger cela, selon les attentes d'un professeur de maths ordinaire, le jour du brevet, il faudrait utiliser la notation PGCD(20;100)=20, donner le nom de la méthode utilisée pour trouver le PGCD (algorithme d'Euclide) et le détail des calculs où apparaît le PGCD. Cela peut donner à peu près cela :

Il y a 60 femmes et 100 hommes (160 – 60 = 100), cherchons le PGCD de 60 et 100 :

dividendes	*diviseurs*	*restes*
100	*60*	*40*
60	*40*	***20←PGCD***
40	***20***	*0*

Donc PGCD(60 ;100)=20. Il y aura donc au maximum 20 équipes. Chaque équipe contiendra 3 femmes (60÷20=3) et 5 hommes (100÷20=5). Le nombre de femmes par équipe est donc 3, le nombre de personnes par équipe est 8 (3+5=8).

Les problèmes de partages ne se limitent pas nécessairement au PGCD de 2 nombres. On peut avoir plus de 2 nombres à diviser, la recherche du PGCD peut s'étendre à une liste quelconque de nombres. Pour trouver le PGCD de 3 nombres on peut utiliser la décomposition en facteurs premiers ou l'algorithme d'Euclide pour remplacer 2 nombres par leur PGCD. Voyons cela sur un exemple.

Le problème de la piscine : une piscine de 3,36 m sur 7,8 m dont la profondeur est 1,44 m doit être carrelée avec des carreaux carrés, sans découpe de carreaux (on est perfectionniste ou on l'est pas). On veut des carreaux aussi grands que possible ayant un côté mesurant un nombre entier de cm (ce sont des contraintes esthétiques pour « le plus grand possible » et techniques pour « les carreaux mesurant un nombre entier de centimètres »). Le problème revient à partager les nombres de centimètres 336, 780 et 144 avec leur PGCD. Le PGCD de 336 et 780 est 12,

dividendes	*diviseurs*	*restes*
780	*336*	*108*
336	*108*	***12←PGCD***
108	***12***	*0*

Il suffit alors de chercher le PGCD de 12 et 144 (on remplace 336 et 780 par leur PGCD, car le nombre cherché doit diviser ces 2 nombres et être le plus grand possible). PGCD(12 ;144)=12, car 144 est divisible par 12. Donc le côté du carreau cherché est 12 cm.
On pourra mettre 65 carreaux dans la longueur (780÷12=65), 28 carreaux dans la longueur (336÷12=28) et 12 carreaux dans la profondeur (144÷12=12). Il faudra, pour carreler complètement la piscine (5 murs à carreler), utiliser 65×28+(65×12+28×12)×2=4052 carreaux.

Curiosité (hors programme) : Lorsqu'on prend 2 nombres entiers au hasard, la probabilité (voir dernier chapitre de ce cours) que ces nombres soient premiers entre eux est égale à $\frac{6}{\pi^2} \approx 0{,}608$. C'est incroyable non ? Que vient faire ici ce nombre π, habituellement lié au cercle ? Et comment fait-on déjà pour tirer des nombres entiers au hasard ?
Pour observer quelque chose de plus simple, fixons un des nombres, par exemple 100 et examinons les nombres inférieurs à ce nombre qui sont premiers avec ce nombre. Un programme de Mathadomicile (Exploration des nombres, option Entier avec la case « Nombres premiers avec ce nombre » cochée) donne cette liste de nombres premiers avec un entier quelconque. On constate ainsi qu'il y a 40 nombres premiers avec 100 et inférieurs à 100 dont 23 sont premiers.

Vous avez choisi l'option Entier

Vous avez entré le nombre 100

Voici la liste des 40 nombres premiers avec 100 et inférieur à 100 :

1	3	7	9	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39
41	43	47	49	51	53	57	59	61	63	67	69	71	73	77	79
81	83	87	89	91	93	97	99								

NB : Les nombres en rouge sont les nombres premiers.

Cela veut dire que par tranche de 100 pour le numérateur, il y aura 40 fractions de dénominateur 100 qui ne simplifierons pas.
$\frac{1}{100}$; $\frac{3}{100}$; $\frac{7}{100}$; … ; $\frac{99}{100}$ ne se simplifient pas pour la tranche de numérateurs allant de 0 à 100.

$\frac{101}{100}$; $\frac{103}{100}$; $\frac{107}{100}$; … ; $\frac{199}{100}$ ne se simplifient pas pour la tranche de numérateurs allant de 100 à 200. etc. pour les autres tranches. Pour les fractions se simplifiant, il y a tous les autres numérateurs.

4. Rappels sur les calculs avec les fractions

a) Additions et soustractions

Il faut mettre les fractions au même dénominateur car alors, il suffit d'ajouter les numérateurs

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Cas général : Cette égalité permet d'additionner 2 fractions quelconques : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

$$\frac{15}{48}+\frac{7}{60}=\frac{15\times 60+7\times 48}{48\times 60}=\frac{1236}{2880}$$

Astuce : Dans le cas où les dénominateurs ont des diviseurs en commun, on peut simplifier les calculs en utilisant un *dénominateur réduit* : au lieu du produit bd de la formule ci-dessus, on va utiliser le PGCD$(b;d)$ en divisant bd par PGCD$(b;d)$. C'est ce qu'on appelle le PPCM$(b;d)$, le Plus Petit Commun Multiple de b et d. Ainsi, PPCM$(b;d)$=bd÷PGCD$(b;d)$.
Par exemple pour 48 et 60, on va prendre comme dénominateur commun 2880÷12=240.
Voyons cela en détail : $48=2^2\times 2^2\times 3$ et $60=2^2\times 3\times 5$. Le PGCD de 48 et 60 est le produit des facteurs communs des décompositions de ces nombres, c'est donc $12=2^2\times 3$. Si on cherche le PPCM de 48 et 60, il suffit de multiplier ce PGCD (les facteurs communs) par les facteurs qui ne sont pas communs : 2^2 et 5. Le PPCM de 48 et 60 sera donc $2^2\times 3\times 2^2\times 5=12\times 20=240$. C'est « mieux » que 48×60=2880!

$$\frac{15}{48}+\frac{7}{60}=\frac{15\times 5}{240}+\frac{7\times 4}{240}=\frac{75+28}{240}=\frac{103}{240}$$

b) Multiplications et divisions

Il ne faut pas mettre les fractions au même dénominateur! La règle est très simple : $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

Pour la division par $\frac{c}{d}$, on doit multiplier par l'inverse : $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

Un exemple : $\frac{15}{48}\times\frac{7}{60}=\frac{15\times 7}{48\times 60}=\frac{105}{2880}$

Astuce : On peut alléger les calculs en **simplifiant avant** d'effectuer les produits. De toutes les façons, les résultats sont souvent exigés sous la forme simplifiée, alors autant simplifier dès que c'est possible.

$$\frac{15}{48}\times\frac{7}{60}=\frac{15\times 7}{48\times(15\times 4)}=\frac{7}{48\times 4}=\frac{7}{192}$$

On a simplifié par 15 dès qu'on a reconnu le facteur commun. On aurait aussi pu utiliser les décompositions en facteurs premiers.

Attention : Le trait de fraction est souvent utilisé à la place du symbole de la division. Il ne faut pas oublier sa fonction secondaire : ne pas écrire les parenthèses autour du dividende et autour du diviseur (si parenthèses il y a).

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

Il faut d'abord effectuer l'addition comme si il y avait des parenthèses autour de $1+\frac{1}{3}$.
Pour résumer, dans les calculs mixtes, il suffit de respecter les règles de priorités (× et ÷ d'abord, et puis ensuite + et −), les parenthèses, les règles de calcul, la fonction de parenthèses du trait de fraction et … c'est tout.

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{-2}{3}}{1+\frac{3}{5}\times\frac{-1}{3}}=\frac{\frac{3}{6}+\frac{-4}{6}}{\frac{15}{15}+\frac{-3}{15}}=\frac{\frac{-1}{6}}{\frac{12}{15}}=\frac{-1}{6}\times\frac{15}{12}=\frac{-3\times 5}{2\times 3\times 12}=\frac{-5}{24}$$