

I] Statistiques

a) Rappels sur le calcul de la moyenne :

Définition : la moyenne d'une série statistique est égale à la somme des valeurs individuelles divisée par le nombre total de valeurs.

Par exemple, si vous avez eu 10, 12, 15 et 8 en maths au 3^{ème} trimestre, votre moyenne est égale à $(10 + 12 + 15 + 8) \div 4$ soit $45 \div 4 = 11,25$.

Parfois, comme il y a plusieurs valeurs identiques, on comptabilise les valeurs en utilisant des *effectifs* (nombre de valeurs identiques) comme dans l'exemple suivant donnant les résultats d'un contrôle :

Note obtenue	9	10	11	12	13	14	15	Total
Effectifs	2	4	7	6	2	0	1	22

Il y a eu 22 notes et le total des notes obtenues est 248 : $(9 \times 2 + 10 \times 4 + 11 \times 7 + 12 \times 6 + 13 \times 2 + 15 \times 1) = 248$.
Donc la moyenne est $248 \div 22 \approx 11,27$.

Remarque : il ne faut pas calculer la moyenne $(9+10+11+12+13+14+15) \div 7 = 12$, qui serait la moyenne des notes du tableau, et qui n'a aucune signification ici.

On peut être amené à regrouper les valeurs à l'intérieur de *classes* (groupe de valeurs proches) comme dans l'exemple suivant qui donne les effectifs et salaires des employés d'une Petite et Moyenne Entreprises (PME) :

Catégorie	Ouvrier simple	Ouvrier qualifié	Cadre moyen	Cadre supérieur	Dirigeant
Effectif	50	25	15	10	2
Salaire	de 800 à 1100	de 1100 à 1500	de 1500 à 2500	de 2500 à 5000	de 5000 à 11000
Salaire moyen	950	1300	2000	3750	8000

Ici, on a estimé le salaire moyen des employés d'une catégorie (classe socio-économique) en prenant les « milieux » des classes (on parle alors plutôt de *centres de classe*). Le salaire moyen dans une classe est une valeur arbitraire, que peut-être aucun employé ne va toucher. La moyenne des salaires pour l'entreprise se calculera alors en effectuant le quotient du total des salaires (estimé en additionnant les produits des effectifs par les valeurs moyennes d'une classe) par l'effectif total :

$$\text{Salaire moyen dans la PME} = \frac{50 \times 950 + 25 \times 1300 + 15 \times 2000 + 10 \times 3750 + 2 \times 8000}{50 + 25 + 15 + 10 + 2} = \frac{163500}{102} \approx 1602,94$$

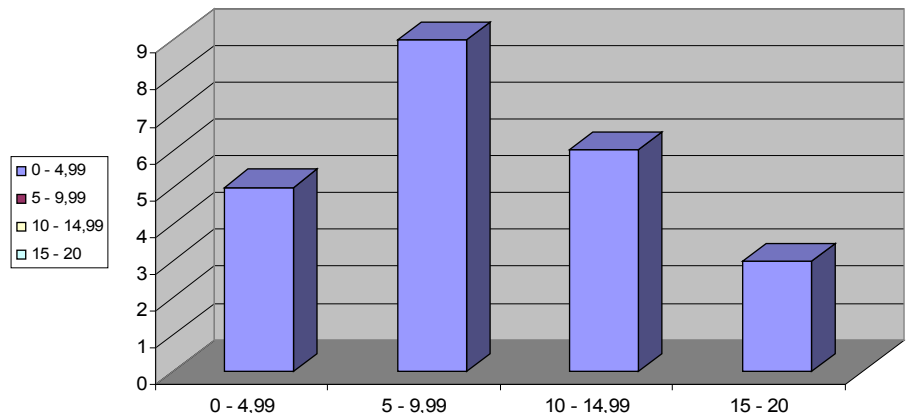
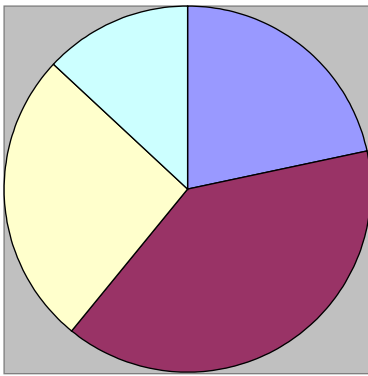
NB : En ce qui concerne les données, elles sont parfois fournies par un graphique comme un *histogramme* ou un *diagramme circulaire* qui correspondent finalement à des tableaux d'effectifs ou de fréquences déguisés par la représentation en rectangles (histogrammes) ou en secteurs angulaires. Les données aussi sont parfois fournies de façon brute, par la liste de toutes les valeurs obtenues. Voici l'exemple d'une série de 40 mesures des diamètres de tubes PVC fabriqués par une usine :

12,5 – 12,4 – 12,5 – 12,4 – 12,5 – 12,5 – 12,6 – 12,4 – 12,5 – 12,5
 12,5 – 12,6 – 12,7 – 12,5 – 12,5 – 12,6 – 12,6 – 12,5 – 12,4 – 12,4
 12,5 – 12,5 – 12,5 – 12,6 – 12,5 – 12,4 – 12,6 – 12,4 – 12,5 – 12,4
 12,5 – 12,4 – 12,5 – 12,5 – 12,5 – 12,5 – 12,4 – 12,5 – 12,4 – 12,5.

Evidemment ici, le premier travail sera de construire le tableau des effectifs, en comptant méthodiquement les valeurs identiques.

valeurs	12,4	12,5	12,6	12,7	total
effectifs	11	23	6	1	40

Voici deux autres exemples où le tableau des effectifs se déduit de la lecture d'un graphique :



De l'un ou l'autre de ces graphiques, on doit être en mesure de tirer l'information qui se résume dans le tableau des effectifs suivant, duquel on déduit la formule de calcul de la moyenne :

	de 0 à 5 exclus	de 5 à 10 exclus	de 10 à 15 exclus	de 15 à 20
effectifs	5	9	6	3
valeur centrale	2,5	7,5	12,5	17,5

$$\text{moyenne} = (2,50 \times 5 + 7,5 \times 9 + 12,5 \times 6 + 17,5 \times 3) \div (5 + 9 + 6 + 3) = 207,5 \div 23 \approx 9,02.$$

b) Utilisation des fréquences

Les fréquences sont, en fait, des fractions calculées à partir des effectifs, par une de ces formules :

Fréquence d'une classe (nombre décimal compris entre 0 et 1) = $\frac{\text{Effectif de la classe}}{\text{Effectif total}}$
Fréquence d'une classe (pourcentage compris entre 0 et 100 %) = $\frac{\text{Effectif de la classe}}{\text{Effectif total}} \times 100$

Le premier intérêt des fréquences est de pouvoir comparer des séries qui ont des effectifs totaux différents. Ce qu'on compare alors, c'est la répartition des valeurs dans la série. Jugez plutôt sur cet exemple où l'on dispose de 2 séries de mesures faites par des observateurs différents :

Valeurs	de 0 à 100	de 100 à 200	de 200 à 300	de 300 à 400	de 0 à 100	de 100 à 200	de 200 à 300	de 300 à 400
Effectifs	5	12	20	7	6	96	143	12
Fréquences	11,4%	27,3%	45,4%	15,9%	2,3%	37,4%	55,6%	4,7%

Vous constatez que ici, les deux séries ont des profils assez différents : l'allure de la répartition des valeurs est assez « espacée » pour la première série (on dit "dispersée") alors qu'elle est assez « concentrée » pour la deuxième. Cette caractéristique de plus ou moins grande concentration autour des valeurs centrales, qu'on qualifie de *dispersion* de la série, peut être estimée par un paramètre très simple à calculer : l'**étendue** de la série, qui est égale à la différence entre la valeur maximum et la valeur minimum. Sur notre exemple, l'étendue est difficile à estimer à cause du regroupement par classe (on a perdu l'information de la valeur de la plus petite et de la plus grande valeur), mais il est probable que l'étendue de la 2^{ème} série soit plus petite que celle de la 1^{ère}, nous reviendrons sur ce paramètre dans un autre exemple.

Pour étudier plus en détail une série statistique, on peut essayer de chercher la valeur qui partage la série en deux groupes de même effectif. C'est ce que l'on appelle **la médiane** de la série statistique (une valeur centrale de la série, généralement voisine de la moyenne mais rarement égale à celle-ci, car obtenue par un procédé différent). Le moyen le plus efficace est de cumuler les effectifs (ou les fréquences). La médiane apparaît alors comme la valeur correspondant à la moitié de l'effectif total (ou à la fréquence cumulée de 50%).

valeurs	de 0 à 100	de 100 à 200	de 200 à 300	de 300 à 400	de 0 à 100	de 100 à 200	de 200 à 300	de 300 à 400
effectifs	5	12	20	7	6	96	143	12
Effectifs cumulés	5	17	37	44	6	102	245	257
fréquences	11,4%	27,3%	45,4%	15,9%	2,3%	37,4%	55,6%	4,7%
Fréquences cumulées	11,4%	38,7%	84,1%	100%	2,3%	39,7%	95,3%	100%

On peut lire les valeurs cumulées obtenues. Par exemple : 84,1% des valeurs de la 1^{ère} série sont inférieures à 300. On utilise les fréquences car c'est plus parlant de faire ce type de lecture en fréquence qu'en effectif (37 valeurs sur 44 sont inférieures à 300). Passons à l'estimation de la valeur médiane de la série. Pour cela construisons la courbe polygonale des fréquences cumulées :

On voit ici en abscisse du point d'ordonnée 50%, que la médiane de la 1^{ère} série se situe environ à 220, tandis que pour la 2^{ème} série la médiane est un peu inférieure. La moyenne, quant à elle se calcule toujours de la même façon par la formule de la moyenne pondérée :

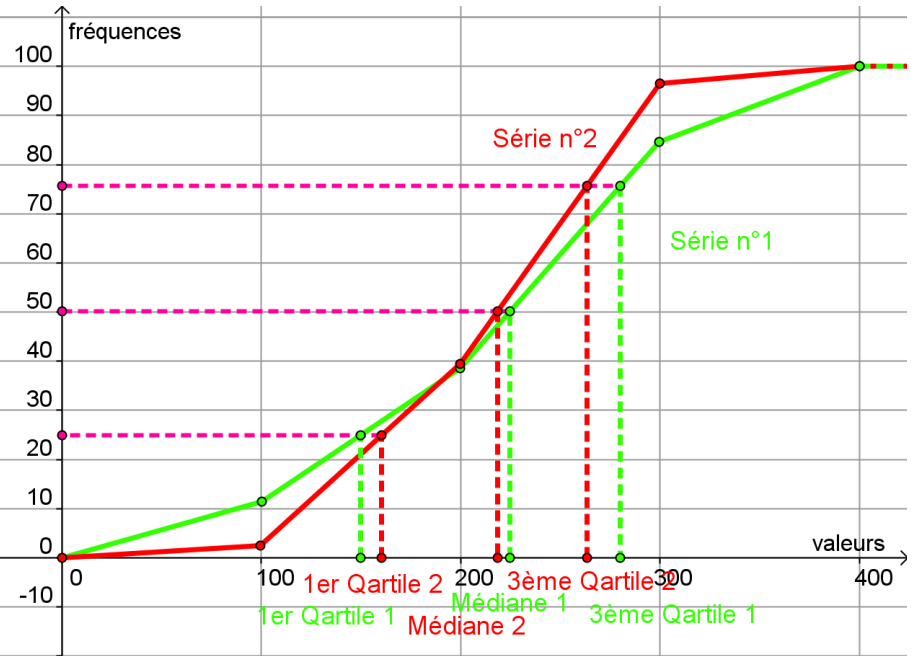
$$\text{moyenne 1} = \frac{50 \times 5 + 150 \times 9 + 250 \times 20 + 350 \times 7}{44} \approx 205.$$

Au passage, cette formule s'utilise aussi bien avec les fréquences :

$$\text{moyenne 1} = \frac{50 \times 11,4 + 150 \times 27,3 + 250 \times 45,4 + 350 \times 15,9}{100} \approx 205.$$

Si l'on voulait *calculer* la médiane, il faudrait utiliser la proportionnalité, c'est-à-dire une formule qui se déduit du théorème de Thalès (demandez une justification si nécessaire à votre prof. de maths préféré):

$$\text{médiane 1} = 200 + (300 - 200) \div [(84,1 - 38,7) \div (50 - 38,7)] = 200 + 100 \div 4,017 \approx 225.$$



Deux autres paramètres statistiques ont été représentés sur le graphique : le 1^{er} quartile et le 3^{ème} quartile. Ces paramètres sont définis comme la médiane, sauf que le 1^{er} quartile est la valeur correspondant à un quart de l'effectif total (ou à 25% de la fréquence cumulée) et le 2^{ème} quartile est la valeur correspondant à trois quarts de l'effectif total (ou à 75% de la fréquence cumulée). On voit sur le graphique que le 1^{er} et le 3^{ème} quartiles sont plus proches dans le cas de la série n°2 que dans celui de la série n°1, ce qui traduit le fait que cette série est plus "concentrée", moins "dispersée" que la 1^{ère} : les valeurs se regroupent davantage autour des valeurs centrales (médiane ou moyenne).

Pour voir à quoi peut servir le paramètre appelé *étendue*, examinons la dispersion des 40 mesures des diamètres de tubes PVC fabriqués par une usine (exemple de la partie I)a) : cette série a une étendue égale à 12,7 – 12,4 = 0,3. On peut commenter cette valeur, dire que l'étendue est faible par rapport à la moyenne ou à la médiane, et que donc, la série de valeurs est "concentrée". Mais tout est relatif! Il faudrait pouvoir comparer avec une autre série de valeurs semblables.

On ne peut que vous recommander ici l'utilisation des annales du Brevet des Collèges pour fournir les données. Mais tout aussi bien, vous rencontrerez des séries statistiques en géographie, en SVT ou en feuilletant un journal...

II] Probabilités

a) Expériences aléatoires simples et notion intuitive de probabilité

Définitions : Une expérience *aléatoire* est une *expérience* (observation effectuée dans des conditions précises) dont on ne connaît pas à l'avance le résultat. Celui-ci est déterminé par le hasard, parmi un certain nombre de résultats possibles.

Exemples : Si on tire un dé à 6 faces. On s'intéresse au nombre obtenu. Les résultats possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Même chose avec une pièce de monnaie : 2 résultats sont possibles (pile ou face).

Définitions : La *probabilité* d'un résultat (on dit aussi *issue*) d'une expérience aléatoire est un nombre égal à la *fréquence théorique* qui exprime la chance qu'on a d'obtenir ce résultat lorsqu'on réalise l'expérience. Si toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'elles sont *équiprobables*.

Exemples : Lorsqu'on tire un dé à 6 faces, la probabilité d'obtenir un 6 est $1/6$ si le dé n'est pas truqué. En effet, si le dé est bien équilibré, tous les résultats sont *équiprobables* (ont la même chance de se produire : 1 chance sur 6). Avec une roue de loterie comportant n nombres, on peut avoir n résultats possibles et équiprobables (1 chance sur n d'obtenir un des cas possibles), si la roue n'est pas truquée.

Propriétés : la probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1. Elle vaut 0 si l'évènement est impossible et 1 si l'évènement est certain.

Une expérience aléatoire peut avoir des résultats qui ne sont pas équiprobables. Par exemple, la rencontre d'un élève au hasard à la sortie du collège est une expérience aléatoire. En supposant que l'on peut rencontrer chaque élève avec la même probabilité, il y a équiprobabilité pour la rencontre d'un individu en particulier. Mais si on s'intéresse à la réalisation d'évènements comme par exemple, « l'élève est un garçon » ou « l'élève est une fille » il n'y a pas d'équiprobabilité. La probabilité que « l'élève est un garçon » advienne est déterminée par la proportion des garçons parmi les élèves (pourcentage). S'il y a 215 garçons pour 232 filles dans ce collège, la probabilité de « l'élève est un garçon » est de $215/(215+232)$, soit environ 0,48. Lorsqu'on rencontre un élève du collège au hasard, il y a environ 48% de chances que ce soit un garçon.

Remarque : l'évènement contraire de « l'élève est un garçon » est « l'élève est une fille ». La somme des probabilités de ces évènements contraires est égale à 1 ou 100%.

Définition : Un *évènement* est un ensemble d'*éventualités* (réalisations particulières, aussi appelées *évènements élémentaires*) donnant un même résultat pour une expérience aléatoire. L'*évènement contraire* d'un évènement A est l'évènement qui est réalisé lorsque A ne l'est pas.

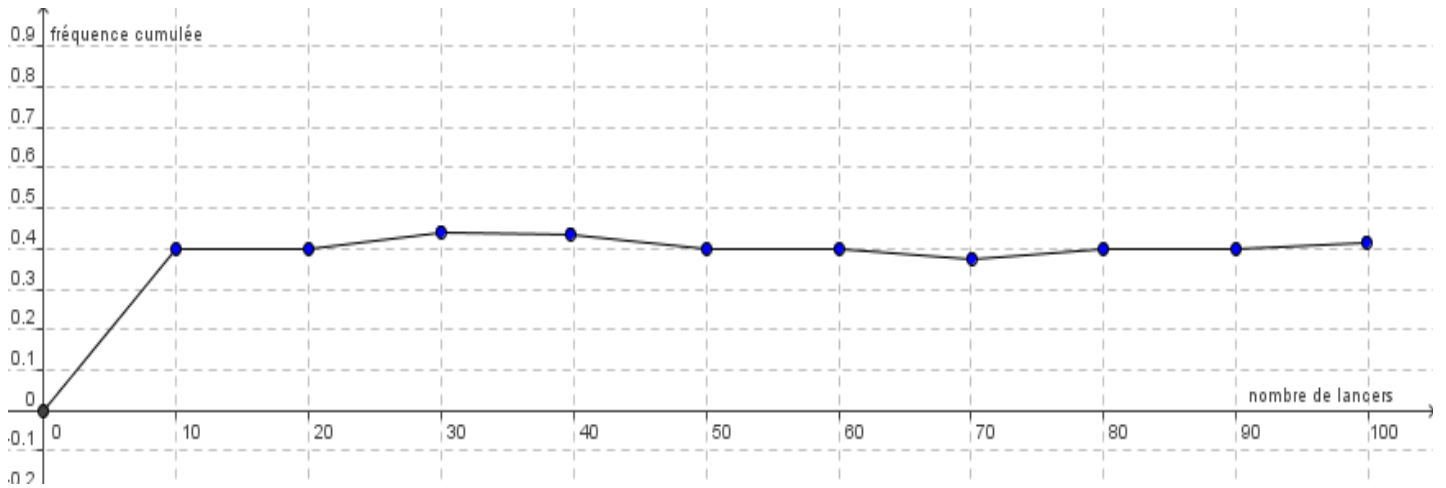
Exemple : Lorsqu'on tire 2 dés et qu'on s'intéresse à la somme des deux dés, l'évènement somme=4 est réalisé pour plusieurs éventualités : le 1^{er} dé donne 1 et le 2^d donne 3 - le 1^{er} dé donne 2 et le 2^d donne 2 - le 1^{er} dé donne 3 et le 2^d donne 1. L'évènement contraire de l'évènement somme=4 est l'évènement somme=3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12.

Méthodologie empirique : Dans certains cas, il n'est pas du tout évident de déterminer a priori les probabilités des différents évènements possibles. Nous pouvons avoir une idée de celles-ci en réalisant un très grand nombre de fois une même expérience aléatoire et en effectuant des statistiques sur un évènement donné (fréquence moyenne). Par exemple, on peut s'interroger sur la probabilité qu'une punaise retombe sur la tête (pointe en haut) qu'on notera p_{\perp} ou qu'elle retombe sur la pointe ($p=1-p_{\perp}$). Rien ne permet de supposer que ces évènements sont équiprobables. Notons les résultats de 100 lancers de cette punaise (1^{ère} ligne du tableau), en notant le nombre de réalisations de l'évènement "la punaise tombe sur sa tête" (2^{ème} ligne du tableau) et en calculant la fréquence cumulée de cet évènement, sous la forme d'une fraction irréductible (3^{ème} ligne du tableau) :



1 à 10	11 à 20	21 à 30	31 à 40	41 à 50	51 à 60	61 à 70	71 à 80	81 à 90	91 à 100
4	4	5	4	3	4	3	5	4	6
$4/10=2/5$	$8/20=2/5$	$13/30$	$14/33$	$2/5$	$2/5$	$27/70$	$2/5$	$2/5$	$21/50$

Si l'on représente ces résultats sur un graphique en mettant en abscisse le nombre de lancers et en ordonnées la fréquence cumulée obtenue, on obtient ceci:



Au vue de ces résultats on comprend que les fréquences cumulées se rapprochent progressivement d'un nombre qui est la probabilité théorique de l'évènement considéré. Ici la probabilité p est donc environ égale à 42/100. Évidemment, si on poursuit les tirages, on obtiendra une meilleure approximation de la probabilité réelle qui dépend des dimensions et de la forme de la punaise (des calculs compliqués seraient nécessaires pour obtenir directement cette probabilité).

Méthodologie directe et fondamentale des probabilités : Dans la plupart des situations étudiées en probabilité, on utilise (au contraire de cette situation de la punaise) le raisonnement, basé sur un dénombrement des différentes éventualités, pour obtenir, par le calcul, la probabilité d'un évènement donné. On distingue les éventualités équiprobables et on dénombre les éventualités qui réalise l'évènement considéré.

Exemple : Si je veux savoir, lorsque je tire 2 dés, la probabilité d'obtenir au moins un six, je peux faire la liste des éventualités. Il y en a 36, chacune étant équiprobable. Nous avons mis cela dans un tableau avec, en jaunes, les éventualités qui réalisent l'évènement considéré.

2ème dé	1er dé					
	1	2	3	4	5	6
1	NON	NON	NON	NON	NON	OUI
2	NON	NON	NON	NON	NON	OUI
3	NON	NON	NON	NON	NON	OUI
4	NON	NON	NON	NON	NON	OUI
5	NON	NON	NON	NON	NON	OUI
6	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI

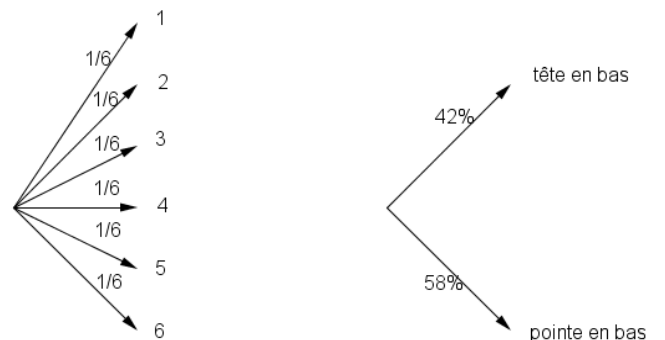
On voit qu'il y a 11 éventualités qui réalisent l'évènement considéré sur 36 éventualités équiprobables. La probabilité de cet évènement est donc 11 sur 36, soit $\frac{11}{36} \approx 0,3055...$ ou encore 30,55% environ.

La formule magique du calcul des probabilités va donc être la suivante : Probabilité de E = $\frac{\text{Nombre de cas favorables à E}}{\text{Nombre de cas possibles}}$. On appelle « cas favorables » les éventualités qui réalise l'évènement E, et « cas possibles » l'ensemble des éventualités de l'expérience aléatoire.

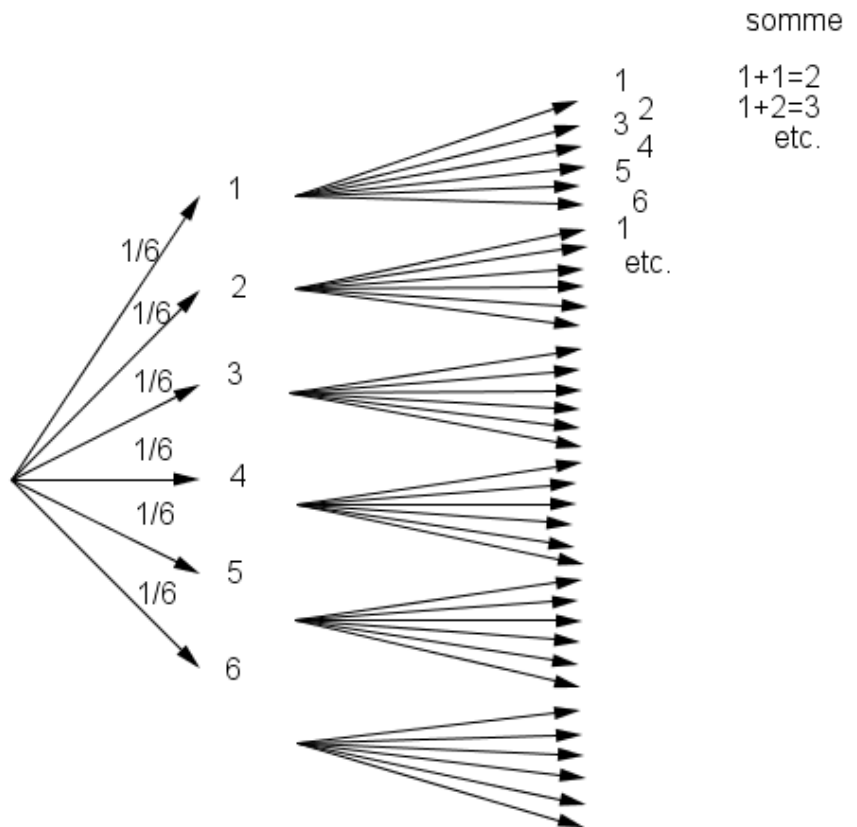
b) Arbres et tableaux pour déterminer la probabilité d'expériences aléatoires

Construire un arbre permet de représenter l'ensemble des résultats possibles pour une expérience aléatoire. Généralement on indique sur les branches de l'arbre leurs probabilités, voici comment on représenterai le tirage d'un dé à 6 faces et celui de la punaise.

Lorsqu'on s'intéresse à des expériences comportant plusieurs épreuves, la construction d'un arbre permet une meilleure analyse des probabilités et facilite les calculs.



Exemple 1 : on tire 2 dés à 6 faces et s'intéresse à la somme obtenue. L'arbre permet de comprendre qu'il y a 36 évènements élémentaires équiprobables. Chaque branche de cet arbre a une probabilité de 1/36. Par contre chaque branche ne conduit pas à un résultat unique. Il y a plusieurs branches qui conduisent au même résultat. Comme précédemment, on peut utiliser un tableau pour résumer l'ensemble des informations recueillies sur notre arbre et effectuer les dénombrements à partir de ce tableau. Mais il se dégage de cette méthode deux règles qui vont nous éviter d'avoir systématiquement recours à des tableaux pour déterminer les probabilités. L'arbre seul suffit à trouver les probabilités si l'on considère que :



- sur une branche, on multiplie les probabilités. Par exemple, on a obtenu 1/36 en multipliant 1/6 par 1/6.
- Entre 2 branches, on additionne les probabilités. Par exemple, pour l'évènement "obtenir une somme égale à 5" on additionne les probabilités des chemins 1-4, 2-3, 3-2 et 4-1 qui ont chacun une probabilité de 1/36. Donc $P(\text{Somme}=5)=1/36+1/36+1/36+1/36+1/36=5/36$.

Les tableaux permettent de consigner les résultats, mais aussi de faire quelques calculs. Voici par exemple le tableau qui donne les sommes obtenues au tirage de 2 dés :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Si l'on compte le nombre d'évènements élémentaires qui conduisent à une somme donnée, on obtient le tableau suivant qui donne les probabilités sous forme de fractions simplifiées:

somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
cas favorables	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
probabilités	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

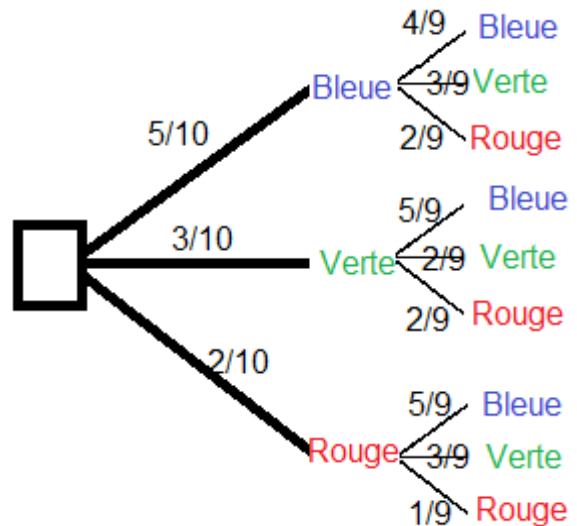
Exemple 2 : Lorsqu'on réalise des épreuves successivement, il peut arriver que la 1ère épreuve modifie les probabilités élémentaires. L'arbre des probabilités prend alors encore plus d'intérêt. Par exemple, lorsqu'on tire successivement dans une urne, 2 boules numérotées. Sachant qu'au départ il y a 5 boules bleues, 3 vertes et 2 rouges. Calculons la probabilité que les 2 boules tirées soient de la même couleur.

Nous voyons alors que la probabilité d'obtenir un tirage d'une seule couleur correspond à la réalisation de 3 événements élémentaires suivants:

- obtenir 2 boules bleues $p_1=20/90$ ($20=5 \times 4$)
- obtenir 2 boules vertes $p_2=6/90$ ($6=3 \times 2$)
- obtenir 2 boules rouges $p_3=2/90$ ($2=2 \times 1$)

Finalement, la probabilité d'obtenir un tirage de la même couleur est $28/90$ ($28=20+6+2$), soit $14/45$ ce qui correspond environ à 31%, un peu moins d'une chance sur 3.

Nous venons de voir là un exemple un peu complexe qu'il est pourtant facile d'analyser si l'on se représente les différents résultats de l'expérience aléatoire, étape par étape, en y associant à chaque fois les probabilités élémentaires et en appliquant les 2 règles citées plus haut pour le calcul des probabilités sur un arbre.



Exemple 3 : La répartition des groupes sanguins dans la population française est la suivante:

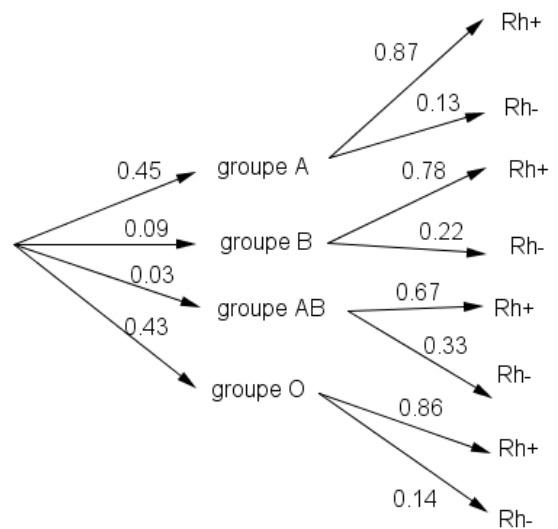
A	B	AB	O
45,00%	9,00%	3,00%	43,00%

Pour chaque groupe la possession du facteur Rhésus est la suivante:

Groupe	A	B	AB	O
Rh+	87,00%	78,00%	67,00%	86,00%
Rh-	13,00%	22,00%	33,00%	14,00%

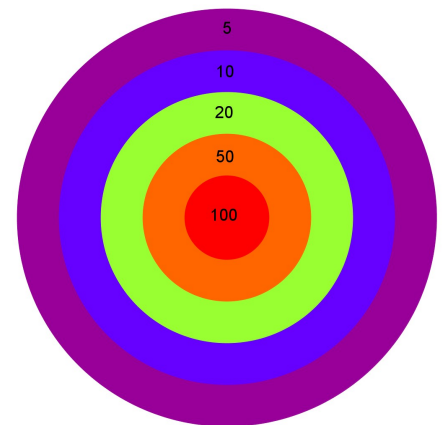
On voudrait savoir la probabilité qu'un français pris au hasard soit de Rhésus Rh-. Pour cela on construit l'arbre ci-contre et on calcule :

$P(\text{Rh-})=0,45 \times 0,13 + 0,09 \times 0,22 + 0,03 \times 0,33 + 0,43 \times 0,14$
 d'où $P(\text{Rh-})=0,1484$, soit environ 15% des français.



c) Jeux et probabilités

Le dénombrement qui conduit au calcul de la probabilité peut être un calcul d'aire (ou le calcul d'une autre grandeur, donc pas exactement un dénombrement d'objets identifiés) comme par exemple avec cette cible. Si les rayons des différents cercles sont 1, 2, 3, 4 et 5, alors les aires des anneaux correspondants aux différentes zones de cette cible sont :



$$(1^2 - 0^2)\pi = 1\pi, (2^2 - 1^2)\pi = (4 - 1)\pi = 3\pi, (3^2 - 2^2)\pi = (9 - 4)\pi = 5\pi, (4^2 - 3^2)\pi = (16 - 9)\pi = 7\pi \text{ et } (5^2 - 4^2)\pi = (25 - 16)\pi = 9\pi.$$

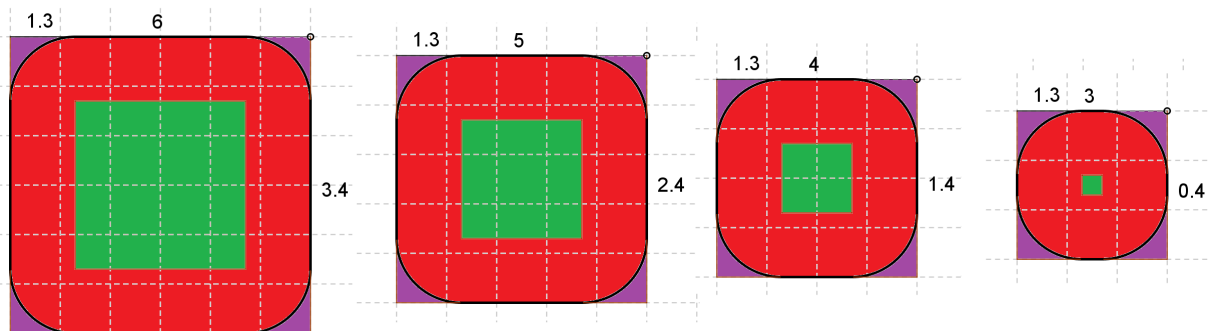
La probabilité de toucher une zone particulière va être estimée égale au rapport entre l'aire de cette zone (assimilée au nombre de cas favorables) et l'aire de la cible (assimilée au nombre de cas possibles). La zone centrale de cette cible a donc une probabilité de $\frac{\pi}{5^2 \times \pi} = \frac{1}{25}$. Les autres probabilités sont calculées de façon identiques. On obtient les probabilités suivantes :

Zone « 100 »	Zone « 50 »	Zone « 20 »	Zone « 10 »	Zone « 5 »
$\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$	$\frac{3}{25} = \frac{12}{100}$	$\frac{5}{25} = \frac{20}{100}$	$\frac{7}{25} = \frac{28}{100}$	$\frac{9}{25} = \frac{36}{100}$

On peut s'interroger, dans cette situation sur la moyenne qu'on obtiendra en atteignant la cible au hasard : $100 \times \frac{4}{100} + 50 \times \frac{12}{100} + 20 \times \frac{20}{100} + 10 \times \frac{28}{100} + 5 \times \frac{36}{100} = \frac{400 + 600 + 400 + 280 + 180}{100} = 18,6$. Mais bien évidemment, si l'on tire sur la cible, on a des chances de la rater. La probabilité de cet événement est plus difficile à calculer! En effet, l'aire de la surface extérieure à la cible est potentiellement très élevée...

Jeux d'adresse et jeux de hasard - Jeux favorables et jeux défavorables

Le jeu de franc carreau consiste à lancer un palet circulaire sur un carrelage. On gagne « franc carreau » si le palet ne touche pas les bords du carrelage. Calculons la probabilité p de faire un « franc carreau » lorsqu'on joue à ce jeu avec une pièce de 2 euros sur un carrelage dont les carreaux font x cm de côtés.



Le diamètre d'une pièce de 2 euros est 2,6 cm. Les zones contenant la pièce « franc carreau » a l'allure donnée par la figure ci-dessous. En vert la zone où le centre de la pièce doit être, en rouge et violet la zone où il ne doit pas être. Les zones rouge et verte sont les endroits atteints par une partie de la pièce « franc carreau », la zone violette n'étant jamais atteinte. En fait, la probabilité cherchée est égale au rapport entre l'aire de la zone verte et le carreau. Le côté de la zone verte est $x - 2,6$, et donc la probabilité p vaut $\frac{(x-2,6)^2}{x^2}$. Le tableau ci-dessous nous donne les valeurs de p lorsque x varie.

x	2,6	3	3,4	3,8	4,2	4,6	5	5,4	5,8	6,2	6,6	7	7,4	7,8	8,2	8,6
p	0	0,02	0,06	0,1	0,15	0,19	0,23	0,27	0,3	0,34	0,37	0,4	0,42	0,44	0,47	0,49

À partir de quelle taille de carreau ce jeu est-il favorable au joueur (un jeu est favorable si l'on a plus d'une chance sur 2 de gagner) ? Nous pourrions répondre, au vu du graphique ci-contre (ou du tableau) que c'est à partir de 8,8 environ.

Le calcul nous donne pour $x=8,8$ une probabilité p égale à :

$$\frac{(8,8-2,6)^2}{8,8^2} = \left(\frac{6,2}{8,8}\right)^2 = \left(\frac{31}{44}\right)^2 = \frac{961}{1936} \approx 0,496384.$$

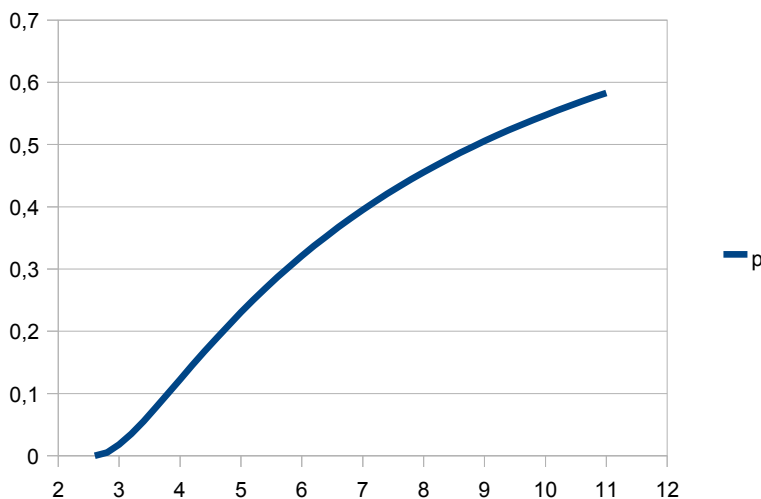
Pour trouver la valeur exacte de x qui sépare les jeux favorables des jeux défavorables, il faut résoudre l'équation $\frac{(x-2,6)^2}{x^2} = 0,5$ qui revient

à (produits en croix) : $(x-2,6)^2 = 0,5x^2$ et donc

à $(x-2,6)^2 - 0,5x^2 = 0$. Factorisons le membre de gauche à l'aide de la 3^{ème} identité remarquable :

$(x-2,6)^2 - (\sqrt{0,5}x)^2 = (x-2,6-\sqrt{0,5}x)(x-2,6+\sqrt{0,5}x) = 0$. Le 1^{er} facteur s'annule pour $x(1-\sqrt{0,5}) = 2,6$ c'est-à-dire pour $x = \frac{2,6}{(1-\sqrt{0,5})} \approx 8,876955$ qui est la valeur cherchée ; le 2^d facteur s'annule, quant à lui,

pour $x(1+\sqrt{0,5}) = 2,6$ c'est-à-dire pour $x = \frac{2,6}{(1+\sqrt{0,5})} \approx 1,5230$ qui est une valeur inférieure à 2,6 donc impossible.



Les jeux d'adresse demandent la maîtrise d'un geste pour réussir au mieux une épreuve. Le jeu des fléchettes (cible ci-dessus), le tir à l'arc ou au pistolet, les pétanques, le billard, sont des jeux d'adresse ; le jeu de franc carreau en est un aussi, jusqu'à un certain point. Si le carreau est très proche, on peut viser et donc le joueur utilise son adresse pour réussir au mieux l'épreuve. Lorsqu'on éloigne le carreau du joueur, le jeu devient de plus en plus aléatoire, sensible à des variations si minimes des conditions de tir et de l'environnement (vitesse du vent par exemple) que l'adresse ne suffit plus, comme au jeu de golf. Cela reste pourtant un jeu où l'adresse a sa part et le hasard la sienne. Les joueurs expérimentés anticipent la réaction de l'environnement et contrôlent la force et la précision de leurs gestes avec plus d'efficacité...