Devoir de 3ème : Triplets de Pythagore

Dans ce devoir, nous allons examiner plusieurs méthodes qui donnent des triplets de nombres entiers (a, b, c) tels que $a^2+b^2=c^2$ (relation de Pythagore) donnant les longueurs entières des côtés de triangle rectangles.

1. La méthode d'Euclide (citée dans ses *Éléments*)

Considérons le programme suivant : 1-Choisir 2 nombres entiers positifs m et n.
2-Calculer a le double de leur produit, b la différence entre leurs carrés et c la somme de leurs carrés.

a) Calculer les triplets (a, b, c) donnés par ce programme lorsque m=1 et n=2, puis lorsque m=2 et n=3. Vérifier que ces triplets sont bien des triplets de Pythagore.

b) À l'aide d'un tableur, remplir les colonnes A et B en donnant toutes les paires possibles de nombres entiers m et n distincts compris entre 1 et 10 (1 et 2, 1 et 3, … 2 et 3, … jusqu'à 9 et 10, pour ceux qui utilisent la calculatrice rassurez-vous car il n'y a que 46 paires possibles...). Remplir les colonnes C, D et E en calculant les nombres a, b et c obtenus à l'aide des paires (m ; n) trouvées dans les colonnes A et B et du programme de calcul. Vérifier, toujours à l'aide du tableur, que les triplets (a, b, c) obtenus sont des triplets pythagoriciens.

c) Montrer que ce programme permet de trouver des triplets de Pythagore quelques soient les entiers m et n.

2. Transformation des triplets pythagoriciens

a) Transformation 1 : Montrer qu'en multipliant chaque entier d'un triplet de Pythagore (a, b, c) par un entier k>1 on trouve toujours un autre triplet de Pythagore. Ce nouveau triplet **peut ne pas être** obtenu par la méthode décrite dans le programme (on ne demande pas de prouver cela). Un triplet qui ne peut être obtenu par cette méthode est dit *primitif* et se reconnaît car il est formé de nombres premiers entre eux.

b) Transformation 2 : Considérons un triplet pythagoricien (a, b, c) et calculons le nouveau triplet d'entiers (a', b', c') de manière à ce que $a'=a+2b+2c$, $b'=2a+b+2c$ et $c'=2a+2b+3c$. Cette transformation d'un triplet pythagoricien donne t-elle toujours un autre triplet pythagoricien ? Essayez cette transformation sur les triplets (3, 4, 5) et (5, 12, 13) et testez si, pour les triplets obtenus, on a bien $a'^2+b'^2=c'^2$.

c) Vérifier dans le cas général que pour un triplet pythagoricien donné (a, b, c), le triplet (a', b', c') défini précédemment est un bien un triplet pythagoricien. On utilisera avec profit cette identité remarquable $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$.

3. Combinaison de triplets pythagoriciens

Définition du « produit » : pour tous triplets (a, b, c) et (a', b', c') tels que $a<b$ et $a'<b'$, on appelle « produit » le triplet (a'', b'', c'') tel que $a''=bb'-aa'$, $b''=ab'+ba'$ et $c''=cc'$.

a) Calculer le triplet (a'', b'', c'') correspondant au « produit » des triplets (3, 4, 5) et (5, 12, 13) et montrez que ce triplet est primitif c'est-à-dire formé de nombres premiers entre eux.

b) Montrer que, tels qu'on les a défini, les nombres a'', b'' et c'' sont bien dans une relation pythagoricienne. On retiendra de cela que le « produit » ainsi défini permet de considérer que certains triplets sont « premiers » (que l'on ne peut obtenir par un « produit ») alors que d'autres sont composés (pas « premiers »). Le triplet **(0 ,1, 1)** joue le même rôle dans ce produit que le 1 dans le produit des nombres. Vérifiez cela.

c) Pour reconnaître un triplet « premier », il suffit de considérer le plus grand des nombres (l'hypoténuse du triangle) et de montrer que ce nombre est un nombre premier qui peut se mettre sous la forme $4k+1$, où k est un entier supérieur ou égal à 1. Par exemple (3, 4, 5) est un triplet « premier » car 5 est premier et $5=4\times1+1$, (5, 12, 13) est un autre triplet « premier » car 13 est premier et $13=4\times3+1$, mais (7, 24, 25) n'est pas un triplet « premier » malgré le fait que $25=4\times6+1$ car 25 étant multiple de 5 n'est pas premier. En fait ce triplet est le « carré » du triplet (3, 4, 5). Trouvez tous les triplets pythagoriciens « premiers » dont le plus grand nombre est inférieur à 100 parmi cette liste des triplets primitifs (nombres premiers entre eux).

3, 4, 5	5, 12, 13	7, 24, 25	9, 40, 41	11, 60, 61	13, 84, 85	15, 8, 17	21, 20, 29	33, 56, 65	35, 12, 37
39, 80, 89	45, 28, 53	55, 48, 73	63, 16, 65	65, 72, 97	77, 36, 85				