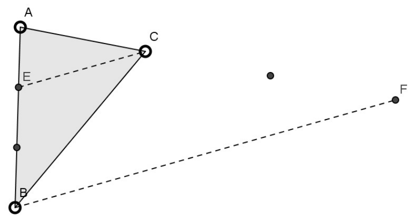
2de TD n°2 sur les vecteurs CORRECTION

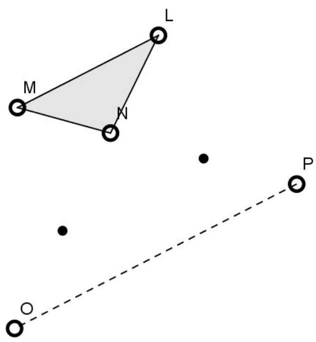
2) Colinéarité et décomposition

a) Tracer un triangle ABC. Placer le point E tel que $\vec{AE}=\frac{1}{3}\vec{AB}$ et le point F tel que $\vec{AF}=3\vec{AC}$.
Démontrer que $\vec{BF}$ et $\vec{EC}$ sont colinéaires.
En déduire que les droites (EC) et (BF) sont parallèles.
Quelle est la valeur du rapport $\frac{BF}{EC}$?



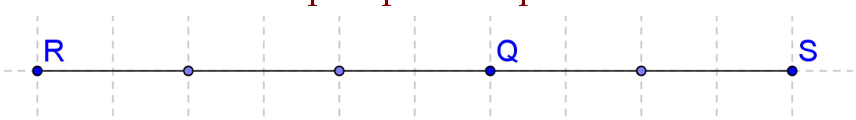
$\vec{BF}=\vec{BA}+\vec{AF}=-1\vec{AB}+3\vec{AC}$ alors que $\vec{EC}=\vec{EA}+\vec{AC}=\frac{-1}{3}\vec{AB}+\vec{AC}$.
On remarque que $3\vec{EC}=-1\vec{AB}+3\vec{AC}=\vec{BF}$.
Les vecteurs sont colinéaires.
On en déduit que les droites (EC) et (BF) sont parallèles.
Le rapport $\frac{BF}{EC}$ vaut 3 car la longueur de $\vec{BF}$ est 3 fois celle de $\vec{EC}$.

b) Tracer un triangle LMN. Placer les points O et P tels que $\vec{NO}=-2\vec{NL}$ et $\vec{MP}=3\vec{MN}$.
Démontrer que les droites (LM) et (OP) sont parallèles.

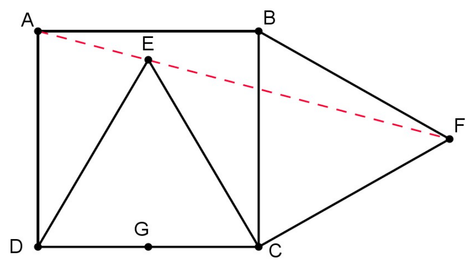


$\vec{OP}=\vec{ON}+\vec{NM}+\vec{MP}$ d'après la relation de Chasles.
$\vec{OP}=2\vec{NL}+\vec{NM}+3\vec{MN}$ d'après les définitions.
$\vec{OP}=2\vec{NL}+2\vec{MN}$ en appliquant la distributivité.
$\vec{OP}=2(\vec{NL}+\vec{MN})$ pour la même raison (distributivité).
$\vec{OP}=2\vec{ML}$ d'après la relation de Chasles.
Conclusion : $\vec{OP}$ et $\vec{ML}$ sont colinéaires, les droites (OP) et (ML) sont parallèles.

c) Tracer un segment [QR] tel que $QR=6$ cm. Soit S, le point définit par $5\vec{SQ}-2\vec{SR}=\vec{0}$.
Exprimer $\vec{QS}$ en fonction de $\vec{QR}$. Placer le point S.
L'égalité peut s'écrire $5\vec{SQ}=2\vec{SR}$ et donc $\vec{SQ}$ et $\vec{SR}$ sont colinéaires. Les droites (SQ) et (SR) sont donc parallèles et, comme elles passent par le même point S, on en déduit que S, Q et R sont alignés. Pour placer S sur (RQ), exprimons $\vec{RS}$ en fonction de $\vec{RQ}$:
$5(\vec{RQ}-\vec{RS})-2\vec{SR}=5\vec{RQ}-3\vec{RS}=\vec{0}$ et donc $5\vec{RQ}=3\vec{RS}$, soit $\vec{RS}=\frac{5}{3}\vec{RQ}$.
On voit maintenant comment on peut placer le point S.



d) Soit $ABCD$ un carré. On construit les triangles équilatéraux DCE à l'intérieur du carré et BCF à l'extérieur. Exprimer $\vec{AE}$ et $\vec{AF}$ sous la forme d'une décomposition $x\vec{AB}+y\vec{AD}$ où x et y sont des réels à déterminer. On pourra utiliser le point G, milieu de [DC] et pied de la hauteur issue de E et le fait qu'un triangle équilatéral de côté c a pour hauteur $\frac{\sqrt{3}}{2}c$.

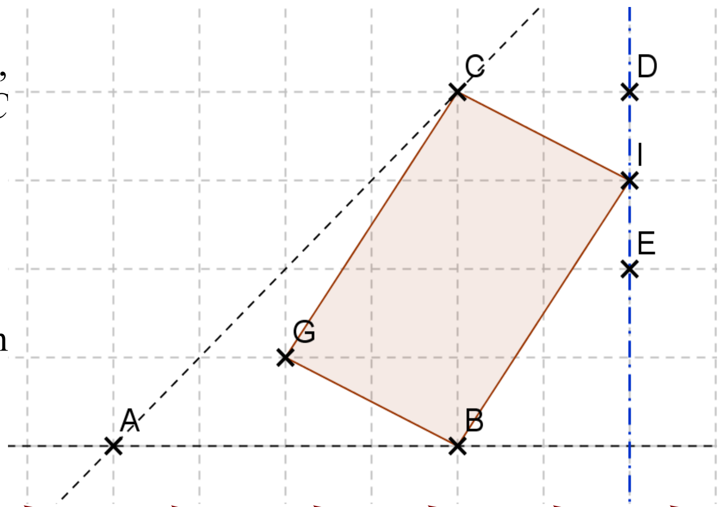


En déduire que $\vec{AE}=z\vec{AF}$ où z est un réel à déterminer, puis que A, E et F sont alignés.
La hauteur d'un triangle équilatéral est $\sqrt{1^2-(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ fois son côté, et donc $\vec{GE}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\vec{AD}$ (le signe – vient du fait que les vecteurs sont de sens opposés).
D'autre part, comme G est le milieu de [DC] et que $ABCD$ est un carré (un parallélogramme particulier) on a : $\vec{DG}=\frac{1}{2}\vec{DC}=\frac{1}{2}\vec{AB}$.
On peut donc décomposer et simplifier $\vec{AE}$ pour écrire
$\vec{AE}=\vec{AD}+\vec{DG}+\text{GE}=\vec{AD}+\frac{1}{2}\vec{AB}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{AD}=\frac{1}{2}\vec{AB}+(1-\frac{\sqrt{3}}{2})\vec{AD}$.

De la même façon, on peut décomposer $\overrightarrow{AF}$ en utilisant un point H situé au milieu de $[BC]$:
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}=(1+\frac{\sqrt{3}}{2})\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
Sinon, la question suggérait de calculer le nombre z tel que $\overrightarrow{AE}=z\overrightarrow{AF}$.
Comme $z\overrightarrow{AF}=z(1+\frac{\sqrt{3}}{2})\overrightarrow{AB}+\frac{z}{2}\overrightarrow{AD}$, on doit avoir :
$z(1+\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1}{2}$ (égalité de composante selon $\overrightarrow{AB}$) et $\frac{z}{2}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (égalité de composante selon $\overrightarrow{AD}$)
La 1ère égalité donne : $z=\frac{1}{2(1+\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}\approx 0{,}26795$.
La 2ème égalité donne : $z=2\times\frac{2-\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$ qui est bien la même valeur.
La conclusion est $\overrightarrow{AE}=(2-\sqrt{3})\overrightarrow{AF}$. Les points A, E et F sont alignés.

On aurait pu montrer que les deux vecteurs sont colinéaires en calculant leur déterminant :
$det(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF})=(1+\frac{\sqrt{3}}{2})(1-\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{\frac{1}{2}\times 1}{2}=1^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-\frac{1}{4}=1-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=1-1=0$.
Le déterminant est nul donc les vecteurs sont colinéaires (cette méthode ne donne pas le coefficient z).
Remarque : D'autres méthodes, plus classiques peuvent être utilisées pour montrer cet alignement, comme le calcul simple des angles. En montrant par exemple que $\widehat{AED}+\widehat{DEC}+\widehat{CEF}=180°$.

3) Coordonnées



a) A, B et C étant trois points non-alignés, quelles sont les coordonnées de A, B et C dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?
Soient D, E, I et G les points définis par :
$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,
I milieu de $[DE]$ et $G(\frac{1}{4};\frac{1}{4})$.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$,
I étant le milieu de $[DE]$ on a :
$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}+1\times\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AC})$ donc $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}\times\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\times\overrightarrow{AC})=\frac{3}{4}\times\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\times\overrightarrow{AC}$.
Déterminer les coordonnées de D, E et I puis placer D, E, I et G sur la figure.
D'après les égalités précédentes (et celle de l'énoncé pour E), on a :

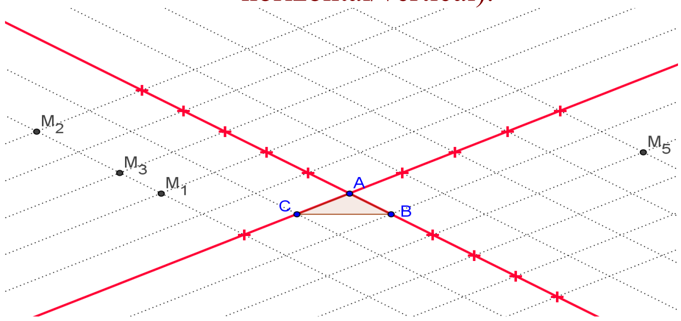
$D(\frac{1}{2};1)$, $E(1;\frac{1}{2})$ et $I(\frac{3}{4};\frac{3}{4})$, ainsi que $G(\frac{1}{4};\frac{1}{4})$

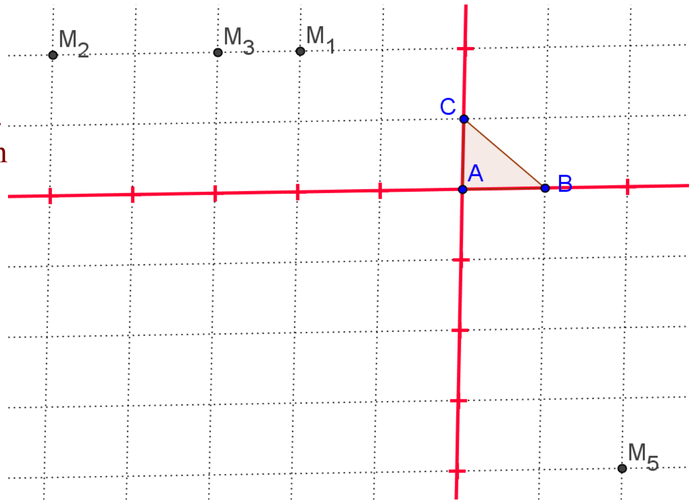
NB : Les points sont reportés dans la figure avec les coordonnées ou avec les égalités vectorielles (cela revient au même).
Montrer que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-1;1)$ et que celles de $\overrightarrow{ED}$ sont $(\frac{-1}{2};\frac{1}{2})$.
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-1\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$.
Dans la base $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$, les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$ sont donc bien $(-1;1)$.
$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$ d'après la relation de Chasles « soustractive »
(on peut écrire $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$ qui est plus simple parfois à utiliser),
donc $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-(\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AC}$ (on a remplacé $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ par ce que l'on avait obtenu et on a utilisé les propriétés du calcul vectoriel).
Finalement, $\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{DE}=\frac{-1}{2}\times\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AC}$.
Dans la base $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$, les coordonnées de $\overrightarrow{ED}$ sont donc bien $(\frac{-1}{2};\frac{1}{2})$.
En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?
On peut écrire, $\overrightarrow{ED}=\frac{-1}{2}\times\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires.
Les droites (EB) et (BC) sont par conséquent parallèles.
Montrer que les points A, G et I sont alignés.
D'après les coordonnées de G et de I, $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\times\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\times\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\times\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\times\overrightarrow{AC}=3\times(\frac{1}{4}\times\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\times\overrightarrow{AC})=3\times\overrightarrow{AG}$. $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont donc colinéaires.

Les droites (AI) et (AG) étant parallèles, les points A, I et G sont alignés
(d'après le 5ème postulat d'Euclide, il n'y a qu'une seule droite passant par A parallèle à la droite (AI)).
Montrer que $GBIC$ est un parallélogramme.
Il faut montrer que les vecteurs $\vec{GB}$ et $\vec{CI}$ sont égaux.
Avec les coordonnées de points c'est facile car $\vec{GB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_G\, ;\, y_B - y_G)$, or $B(1;0)$ et $G(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4})$, donc $\vec{GB}$ a pour coordonnées $(1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\,;\,0-\frac{1}{4}=\frac{-1}{4})$.
De même, $\vec{CI}$ a pour coordonnées $(x_I - x_C\, ;\, y_I - y_C)$, or $I(\frac{3}{4}\,;\,\frac{3}{4})$ et $C(0;1)$, donc $\vec{CI}$ a pour coordonnées $(\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4}\,;\,\frac{3}{4}-1=\frac{-1}{4})$. Les deux vecteurs $\vec{GB}$ et $\vec{CI}$ ayant des coordonnées égales sont égaux, le quadrilatère $GBIC$ est un parallélogramme.
Sans les coordonnées de points et la relation existant entre celles-ci et les coordonnées de vecteurs, on aurait pu faire du calcul vectoriel :
$\vec{GB}=\vec{AB}-\vec{AG}=\vec{AB}-(\frac{1}{4}\times\vec{AB}+\frac{1}{4}\times\vec{AC})=\frac{3}{4}\times\vec{AB}-\frac{1}{4}\times\vec{AC}$ (on retrouve les coordonnées de $\vec{GB}$),
$\vec{CI}=\vec{AI}-\vec{AC}=\frac{3}{4}\times\vec{AB}+\frac{3}{4}\times\vec{AC}-\vec{AC}=\frac{3}{4}\times\vec{AB}-\frac{1}{4}\times\vec{AC}$ (on retrouve les coordonnées de $\vec{CI}$).
La conclusion est inchangée.

b) Soient A, B et C trois points non-alignés du plan.
Déterminer, si possible, les réels x et y tels que $\vec{AM}=x\vec{AB}+y\vec{AC}$ dans les cas suivants.
En déduire, à chaque fois, les coordonnées du point M dans le repère (A, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$).
Nous allons utiliser massivement la relation de Chasles « soustractive » qui a le mérite de donner directement les deux vecteurs de la décomposition à partir du même point choisi.
$2\vec{MC}-\vec{MB}=\vec{AB}$
On a $2\vec{MC}-\vec{MB}=\vec{AB}=2(\vec{AC}-\vec{AM})-(\vec{AB}-\vec{AM})=\vec{AB}$ et donc $2\vec{AC}-2\vec{AM}-\vec{AB}+\vec{AM}=\vec{AB}$ et, en regroupant $\vec{AM}=-2\vec{AB}+2\vec{AC}$.
Cette relation permet de placer M par rapport à A, B et C ou (ce qui revient au même) à donner les coordonnées du point M dans le repère (A, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$) : $M(-2\,;\,2)$.
$\vec{MB}-4\vec{AB}=2\vec{CB}$
On a $(\vec{AB}-\vec{AM})-4\vec{AB}=2(\vec{AB}-\vec{AC})$; $-\vec{AM}=3\vec{AB}+2\vec{AB}-2\vec{AC}$; $\vec{AM}=-5\vec{AB}+2\vec{AC}$.
Ce qui permet de placer M par rapport à A, B et C ou (ce qui revient au même) à donner les coordonnées du point M dans le repère (A, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$) : $M(-5\,;\,2)$.
$2\vec{AB}=\vec{MC}+\vec{BC}$
On a $2\vec{AB}=(\vec{AC}-\vec{AM})+(\vec{AC}-\vec{AB})$; $\vec{AM}=\vec{AC}+\vec{AC}-\vec{AB}-2\vec{AB}$; $\vec{AM}=-3\vec{AB}+2\vec{AC}$.
Ce qui permet de placer M par rapport à A, B et C ou (ce qui revient au même) à donner les coordonnées du point M dans le repère (A, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$) : $M(-3\,;\,2)$.
$\vec{BM}-\vec{AM}=\vec{AC}$
On a $(\vec{AM}-\vec{AB})-\vec{AM}=\vec{AC}$; $\vec{AM}-\vec{AM}=\vec{AB}+\vec{AC}$; $\vec{0}=\vec{AB}+\vec{AC}$.
Cette dernière égalité est fausse en général (pour que ce soit vrai, il faudrait que A, B et C soient confondus) donc on ne peut pas trouver de point M qui la satisfasse. Il n'y a pas de solution, donc pas de coordonnées.
[*Pour faire un parallèle avec les nombres :*
c'est comme l'équation $4(3+x)-2(1+2x)=5$ *qui conduit à* $10=5$. *Ceci est toujours faux.*
Il n'y a donc pas de solution à cette équation.]
$3\vec{MA}+2\vec{MB}=4\vec{MC}$
On a $-3\vec{AM}+2(\vec{AB}-\vec{AM})=4(\vec{AC}-\vec{AM})$; $-5\vec{AM}+2\vec{AB}=4\vec{AC}-4\vec{AM}$; $\vec{AM}=2\vec{AB}-4\vec{AC}$.
Ce qui permet de placer M par rapport à A, B et C ou (ce qui revient au même) à donner les coordonnées du point M dans le repère (A, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$) : $M(2\,;\,-4)$.
$\vec{AM}+\vec{BC}=\vec{AC}+\vec{BM}$
On a $\vec{AM}-\vec{BM}=\vec{AC}-\vec{BC}$ ce qui s'écrit $\vec{AM}+\vec{MB}=\vec{AC}+\vec{CB}$ ou $\vec{AB}=\vec{AB}$.
Cette égalité étant toujours vraie, le point M peut être placé n'importe où.
[*Pour faire un parallèle avec les nombres :*
c'est comme l'équation $4(2+x)-2(1+2x)=6$ *qui conduit à* $6=6$. *Ceci est toujours vrai.*
Il y a donc une infinité de solution à cette équation. N'importe quelle valeur réelle convient pour x.]

Pour illustrer cet exercice (mais ce n'était pas demandé dans la consigne), on peut noter les quatre points M constructibles M_1, M_2, M_3 et M_5 (le point M_4 n'est pas constructible et le point M_6 peut être choisi n'importe où). Nous avons choisi deux triangles ABC pour montrer qu'on s'éloigne parfois du repère orthogonal habituel (à droite horizontal/vertical).





c) $ABCD$ est un parallélogramme. L est le milieu de $[AB]$. I, J, K et E sont définis par :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \;;\; 3\overrightarrow{DJ}=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB} \;;\; \overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0} \;;\; \overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DL}$$

Les points A, E et C sont-ils alignés ? [Déterminer les coordonnées des points dans le repère $(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})$]

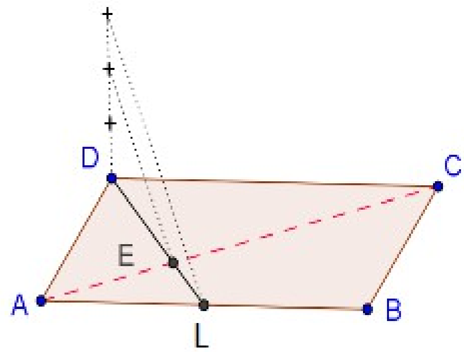
On a, bien sûr, $A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$ et $D(0\ ;\ 1)$ car on est dans le repère $(A,\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, on a $C(1\ ;\ 1)$ (c'est la règle du parallélogramme).

L étant le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et donc $L(\frac{1}{2}\ ;\ 0)$.

Comme E vérifie $\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DL}$, on a aussi $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AD})$ et donc $\overrightarrow{AE}=(1-\frac{2}{3})\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

On en déduit que les coordonnées de E sont $E(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3})$.

Les points A, E et C sont-ils alignés ? Cela semble le cas sur la figure (vous remarquerez l'astuce utilisant le théorème de Thalès pour placer E).



Vérifions-le en calculant le déterminant de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AE}(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3})$, $\overrightarrow{AC}(1\ ;\ 1)$

on a donc $det(\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$. Les points sont bien alignés.

Si vous n'avez pas envie de calculer le déterminant, on peut aussi chercher à exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc bien colinéaires. La conclusion en découle.

Montrer que I, J et K sont alignés.

On peut essayer de trouver k tel que $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{IK}$. Décomposons ces deux vecteurs dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

- Comme $3\overrightarrow{DJ}=3(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ})=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}$ (d'après l'égalité qui définit le point J),

soit $3\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}$,

on a donc $3\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{AI}=8\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AI}$.

On a pu simplifier car, $ABCD$ étant un parallélogramme, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Remplaçons $\overrightarrow{AI}$ par ce que nous dit la 1ère égalité (celle qui définit le point I):

$3\overrightarrow{IJ}=8\overrightarrow{BC}-3(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC})=\frac{-3}{2}\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{BC}$. On trouve finalement $\overrightarrow{IJ}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$.

- Il reste à effectuer la même chose pour $\overrightarrow{IK}$:

Comme $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KA}+2(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB})=3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (égalité définissant le point K), soit $3\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{AB}$,

on a $3(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IK})=-2\overrightarrow{AB}$, et donc $-3\overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AI}$.

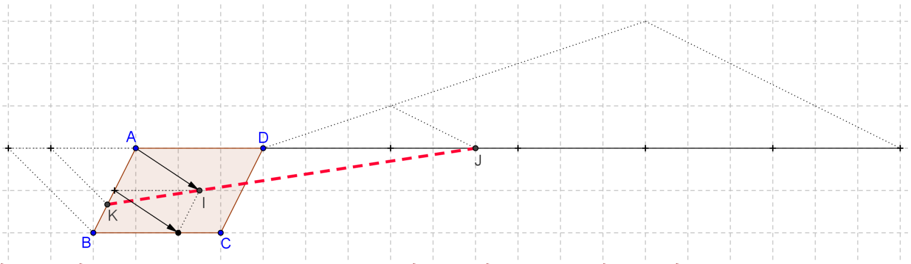
Remplaçons $\overrightarrow{AI}$ par ce que nous dit la 1ère égalité : $-3\overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{AB}+3(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC})=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IJ}$.

On a finalement $-3\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IJ}$. $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont donc colinéaires, les points I, J et K sont alignés.

Le résultat était attendu (l'énoncé insinuait qu'il existait un nombre k, il suffisait de le vérifier..).

N'y a t-il pas une méthode plus simple ? On peut penser faire la figure : ne pas perdre de temps à cela. C'est assez compliqué. On peut se tromper. Ce n'est, dans tous les cas, pas une preuve. Néanmoins, nous avons fait une figure où l'on voit que les points sont bien alignés. Pour la construction des points, il faut revenir aux définitions vectorielles de l'énoncé. Pour placer *J*, nous sommes partis de l'égalité un peu transformée : $3\overrightarrow{DJ}=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AD}=5\overrightarrow{AD}$, soit $\overrightarrow{DJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}$ (vous remarquerez l'astuce utilisant le théorème de Thalès pour placer *J*). Pour placer *K*, nous sommes partis de l'égalité un peu transformée : $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et avons également utilisé le théorème de Thalès pour placer *K*.

On aurait pu déterminer une équation de la droite (*IJ*) et vérifier que les cordonnées de *K* la vérifie.
On peut aussi montrer que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires avec les coordonnées des points et des vecteurs et le calcul du déterminant).



Situons-nous dans le repère $(A,\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})$ sans oublier que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (*ABCD* est un parallélogramme).

- $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, donc $I(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{2}{3})$.
- $3\overrightarrow{DJ}=3(\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AD})=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}$, d'où $3\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{AD}=8\overrightarrow{AD}$ et donc $J(0\ ;\ \frac{8}{3})$.
- $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, d'où $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et donc $K(\frac{2}{3}\ ;\ 0)$.

On trouve alors que $\overrightarrow{IJ}(-\frac{1}{2}\ ;\ 2)$ et $\overrightarrow{JK}(\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{8}{3})$
et $det(\overrightarrow{IJ}\ ;\ \overrightarrow{JK})=(\frac{-1}{2})\times(\frac{-8}{3})-(2)\times(\frac{2}{3})=\frac{8}{6}-\frac{4}{3}=0$.
Est-ce plus simple ?
Vous en jugerez.
Dans tous les cas ce n'est pas immédiat, il y a du calcul... Mais peut-être y a t-il plus simple encore ?