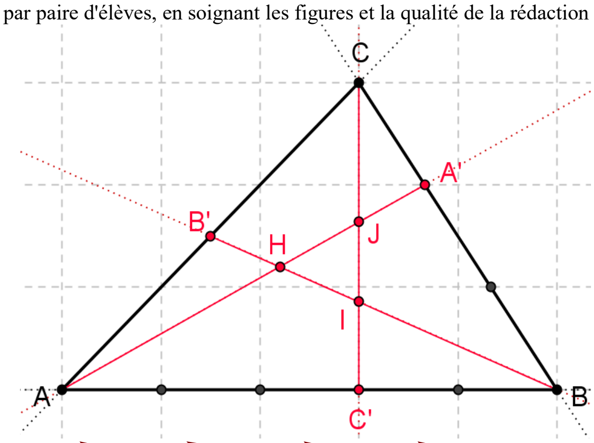
Travail par paire : ne rendre qu'une copie par paire d'élèves, en soignant les figures et la qualité de la rédaction

I] Droites concourantes ou parallèles dans un triangle



ABC est un triangle. On définit trois points A', B' et C' respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB) en posant :

$$\overrightarrow{A'C}=r\,\overrightarrow{A'B}\,,\quad \overrightarrow{C'B}=p\,\overrightarrow{C'A} \text{ et } \overrightarrow{B'A}=q\,\overrightarrow{B'C}$$

où p, q et r sont trois réels différents de 1.

a) Justifier que chacune des égalités ci-dessus définit bien un point unique. Pour cela, exprimer $\overrightarrow{AB'}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA'}$ en fonction de $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BC'}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$.

On sait que $\overrightarrow{AB'}=q\overrightarrow{CB'}=q(\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{AC})$, donc $\overrightarrow{AB'}(1-q)=-q\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB'}=\frac{-q}{1-q}\overrightarrow{AC}=\frac{q}{q-1}\overrightarrow{AC}$.

De même, on a $\overrightarrow{CA'}=r\overrightarrow{BA'}=r(\overrightarrow{CA'}-\overrightarrow{CB})$, donc $\overrightarrow{CA'}(1-r)=-r\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA'}=\frac{-r}{1-r}\overrightarrow{CB}=\frac{r}{r-1}\overrightarrow{CB}$.

On a aussi $\overrightarrow{BC'}=\frac{p}{p-1}\overrightarrow{BA}$.

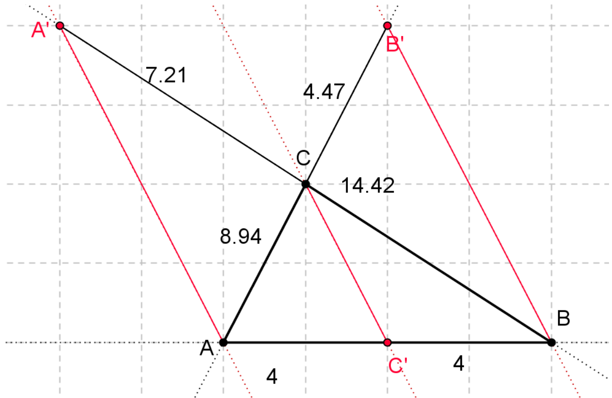
b) Déterminer p, q et r dans le cas illustré ci-contre où on a B' milieu de $[AC]$, C' sur $[BA]$ tel que $BC'=\frac{2BA}{5}$ et A' sur $[BC]$ tel que $CA'=\frac{CB}{3}$.

Comme B' milieu de $[AC]$, on a $\overrightarrow{B'A}=-\overrightarrow{B'C}$ d'où $q=-1$.

C' est sur $[BA]$ tel que $BC'=\frac{2BA}{5}$ donc $\overrightarrow{BC'}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$. On en déduit $\frac{p}{p-1}=\frac{2}{5}$, donc $5p=2(p-1)$, d'où $3p=-2$ et $p=\frac{-2}{3}$.

De même, A' est sur $[BC]$ tel que $CA'=\frac{CB}{3}$ donc $\overrightarrow{CA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$. On en déduit $\frac{r}{r-1}=\frac{1}{3}$ et donc $r=\frac{-1}{2}$.

On constate qu'alors, les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont sécantes en trois points distincts (H, I et J).



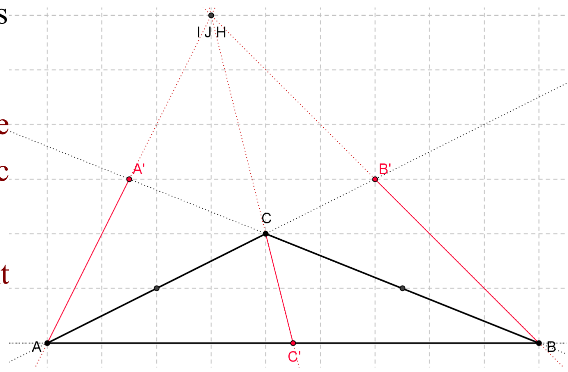
c) Faire une figure en prenant $p=-1$, $q=2$ et $r=\frac{1}{2}$.

On va avoir ici $\overrightarrow{BC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, donc C' milieu de $[BA]$.

De plus, on a $\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{2-1}\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$, ce sera C le milieu de $[AB']$. On a aussi $\overrightarrow{CA'}=\frac{0,5}{0,5-1}\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CB}$, ce sera C le milieu de $[BA']$. On constate qu'alors, les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

En faire une autre en prenant $p=-1$, $q=3$ et $r=\frac{1}{3}$.

Décrire, à chaque fois, la position respective des trois droites (AA'), (BB') et (CC').



On va avoir, ici comme précédemment, C' milieu de $[BA]$.

On aura $\overrightarrow{AB'}=\frac{3}{3-1}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, donc B' est sur $[AC)$ tel que $AB'=\frac{3}{2}AC$. On aura $\overrightarrow{CA'}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}\overrightarrow{CB}=(\frac{1}{3}\times\frac{3}{-2})\overrightarrow{CB}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{CB}$, donc A' est sur $[BC)$ mais pas sur $[BC]$ et $CA'=\frac{1}{2}CB$.

On constate qu'alors, les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

d) On se place dans le repère (A, B, C).

Déterminer les coordonnées de A, B et C ainsi que celles de A', B' et C'.

Par définition, le repère (A, B, C) est constitué des points de coordonnées (0;0), (1;0) et (0;1), donc on a $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$. Pour les autres points, exprimons $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{AC'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: on sait déjà que $\overrightarrow{AB'}=\frac{q}{q-1}\overrightarrow{AC}$, d'où $B'(0;\frac{q}{q-1})$.

Comme $\overrightarrow{CA'}=\frac{r}{r-1}\overrightarrow{CB}$, on a $\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AC}=\frac{r}{r-1}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

et donc $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\frac{r}{r-1}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{r}{r-1}\overrightarrow{AB}+(\frac{-1}{r-1})\overrightarrow{AC}$, d'où $A'(\frac{r}{r-1};\frac{-1}{r-1})$.

Comme $\overrightarrow{BC'}=\frac{p}{p-1}\overrightarrow{BA}$, on a $\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}=\frac{-p}{p-1}\overrightarrow{AB}$

et donc $\overrightarrow{AC'}=\frac{-1}{p-1}\overrightarrow{AB}$, d'où $C'(\frac{-1}{p-1};0)$.

Finalement, les coordonnées cherchées sont $A'(\frac{r}{r-1};\frac{-1}{r-1})$, $B'(0;\frac{q}{q-1})$ et $C'(\frac{-1}{p-1};0)$.

Démontrer qu'une équation cartésienne de la droite (BB') est : $qx+(q-1)y=q$.
On a $\overrightarrow{BB'}(-1;\frac{q}{q-1})$ et $\overrightarrow{BM}(x-1;y)$, d'où $M(x;y)\in(BB')$ se traduit par $det(\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{BM})=0$, soit $-y-(x-1)\frac{q}{q-1}=0$ ou, en multipliant par $q-1\neq 0$, $y(q-1)+(x-1)q=0$ ce qui conduit à $qx+(q-1)y=q$ qui est une forme cartésienne de l'équation de la droite (BB').

Démontrer qu'une équation cartésienne de la droite (CC') est : $(1-p)x+y=1$.
On a $\overrightarrow{CC'}(\frac{-1}{p-1};-1)$ et $\overrightarrow{CM}(x;y-1)$, d'où $M(x;y)\in(CC')$ se traduit par $det(\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{CM})=0$, soit $(y-1)(\frac{-1}{p-1})+x=0$ ou, en multipliant par $p-1\neq 0$, $-(y-1)+x(p-1)=0$ ce qui conduit à $(1-p)x+y=1$ qui est une forme cartésienne de l'équation de la droite (CC').
Déterminer les coordonnées du point H, intersection de (BB') et (CC'), s'il existe.
Pour le point H, intersection de (BB') et (CC'), on doit avoir $(1-p)x+y=1$ et $qx+(q-1)y=q$. De la 1ère équation on tire $y=1-(1-p)x$ que l'on substitue au y de la 2de : $qx+(q-1)(1-(1-p)x)=q$.
Développons $qx+q-1-(q-1)(1-p)x=q$ puis factorisons $x(q-(q-1)(1-p))=1$ et réduisons $x(q-q+1+pq-p)=1$, il reste $x(1+p(q-1))=1$, d'où $x=\frac{1}{1+p(q-1)}$.

Expliciter les conditions d'existence de H.
Ce point H n'existe que si le dénominateur est différent de zéro, soit pour $1+p(q-1)\neq 0$.
Déterminons maintenant l'ordonnée de H quand il existe : $y=1-\frac{1-p}{1+p(q-1)}=\frac{1+p(q-1)-1+p}{1+p(q-1)}=\frac{pq}{1+p(q-1)}$.
Finalement, les coordonnées de H quand il existe sont $H(\frac{1}{1+p(q-1)};\frac{pq}{1+p(q-1)})$.

e) Donner une équation de la droite (AA'), puis montrer que H appartient à la droite (AA') si, et seulement si, $pqr=-1$.
On a $\overrightarrow{AA'}(\frac{r}{r-1};-\frac{1}{r-1})$ et $\overrightarrow{AM}(x;y)$, d'où $M(x;y)\in(AA')$ se traduit par $det(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AM})=0$, soit $(\frac{r}{r-1})y+(\frac{1}{r-1})x=0$ ou, en multipliant par $r-1\neq 0$, $ry+x=0$ ce qui conduit à $x+ry=0$ qui est une forme cartésienne de l'équation de la droite (AA').
$H\in(AA')$ si, et seulement si, ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite c'est-à-dire si, et seulement si, $\frac{1}{1+p(q-1)}+\frac{pqr}{1+p(q-1)}=0$. Multiplions par $1+p(q-1)\neq 0$ (condition d'existence de H) : on obtient alors $1+pqr=0$, ce qui est bien la formule annoncée.

Justifier alors le théorème de Ceva[1] : les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si, et seulement si, $pqr=-1$.
Nous avons déjà bien dégrossi le problème : on sait que lorsque les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes on a, nécessairement, $pqr=-1$. Mais lorsque $pqr=-1$, a t-on forcément des droites concourantes ? Non, on le sait avec l'exemple $p=-1$, $q=2$ et $r=\frac{1}{2}$ car alors les droites sont parallèles. D'ailleurs, on l'a dit : le point H n'existe que si $1+p(q-1)\neq 0$. Dans notre exemple, on a $1+p(q-1)=1-(2-1)=0$ et donc ce point n'existe pas : les droites (BB') et (CC') n'étant pas sécantes, sont parallèles. Comme $pqr=-1$, on a $r=\frac{-1}{pq}$? Il nous faut découvrir si, à cette condition, la droite (AA') est parallèle aux deux autres.
Lorsque $1+p(q-1)=0$, on a $p=\frac{-1}{q-1}$.
La droite (BB') qui a pour équation cartésienne $qx+(q-1)y=q$ a pour équation réduite $y=\frac{-q}{q-1}x+\frac{q}{q-1}$, soit $y=pqx-pq$ (on a remplacé $\frac{-1}{q-1}$ par p, ou plutôt $\frac{1}{q-1}$ par $-p$).
La droite (CC') : $(1-p)x+y=1$ a pour équation réduite $y=1-(1-p)x=(p-1)x+1$. Ces droites sont parallèles car les coefficients directeurs sont égaux (en effet $p-1=pq$, car $1+p(q-1)=0$).
Qu'en est-il de (AA') ? L'équation cartésienne de cette droite est $x+ry=0$, ce qui s'écrit $y=\frac{-1}{r}x$, ou, en remplaçant r par $-\frac{1}{pq}$ (car $pqr=-1$), $y=pqx$. La pente de cette droite étant la même que les deux autres, les trois droites sont parallèles.

Pour résumer, quand (BB')//(CC')
La conclusion de cette étude :
a) $pqr=-1$ et $p-1\neq pq$: les trois droites sont concourantes.
b) $pqr=-1$ et $p-1=pq$: les trois droites sont parallèles.
c) $pqr=-1$: les trois droites sont concourantes ou parallèles.

[1] Giovanni Ceva (1647-1734) est un mathématicien italien qui énonça ce théorème en 1678, après Yusuf Al-Mu'taman qui le démontra au XIe siècle. L'histoire est injuste car elle garde le nom de Ceva et oublie celui d'Al-Mu'taman, ce roi savant qui régna à Saragosse de 1081 à 1085.

II] Équations de droites et maximisation du bénéfice

Un brasseur produit des tonneaux de bière[2] blonde et de bière brune.

Pour produire un tonneau de bière blonde, il utilise 3 kg de maïs, 140 g de houblon et 20 kg de malt.
Pour produire un tonneau de bière brune, il utilise 6 kg de maïs, 140 g de houblon et 10 kg de malt.
Le brasseur dispose dans sa réserve de 240 kg de maïs, 6 160 g de houblon et 620 kg de malt.
Sachant qu'il veut vendre un tonneau de bière blonde en faisant un bénéfice de 35 € et un tonneau de bière brune en faisant un bénéfice de 50 €, la question est « combien de tonneaux de chaque sorte doit-il produire pour maximiser son bénéfice ? » Pour répondre à cette question :

a) Appeler x le nombre de tonneaux de bière blonde et y le nombre de tonneaux de bière brune. Déterminer les contraintes portant sur x et y (*des inégalités*). Déterminer aussi l'expression $B(x,y)$ du bénéfice du brasseur.
Comme on ne peut pas dépasser la valeur de chacun des stocks de matière première, on a :

- Pour le maïs, on doit avoir $3x+6y\leq 240$ (valeurs en kg), soit $x+2y\leq 80$.
- Pour le houblon, on doit avoir $140x+140y\leq 6160$ (valeurs en g), soit $x+y\leq 44$.
- Pour le malt, on doit avoir $20x+10y\leq 620$ (valeurs en kg), soit $2x+y\leq 62$.

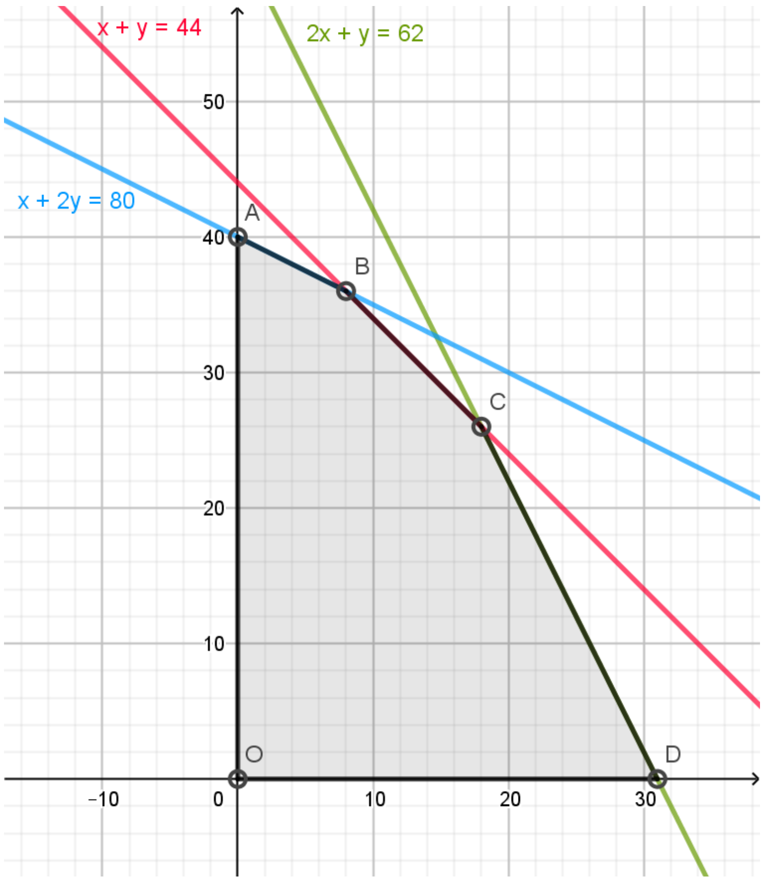
Il faut ajouter à ces inéquations les deux contraintes sur les mesures qui doivent être positives. Cela oblige à prendre x et y positifs. Le système des contraintes se limite à cinq inéquations :

$$x\geq 0\ ,\ \ y\geq 0\ ,\ \ x+2y\leq 80\ ,\ \ x+y\leq 44\ \text{ et }\ 2x+y\leq 62$$

Le bénéfice du brasseur, en euros, est donné par l'expression $B(x,y)=35x+50y$.

b) Représenter graphiquement le domaine des contraintes (*le colorier ou le hachurer en justifiant*), puis tracer les droites correspondant à un bénéfice de 500 €, 1000 €, 1500 €, 2000 € et 2500 €. Y a t-il des solutions qui respectent les contraintes pour ces deux derniers chiffres d'affaires ?
Il faut tracer les cinq droites : les deux axes (d'équation y=0 et x=0) et les droites d'équation :

$$D_{maïs}: x+2y=80\ ,\quad D_{houblon}: x+y=44\ \text{ et }\ D_{malt}: 2x+y=62$$



Ces cinq droites délimitent un pentagone convexe à l'intérieur duquel se situent les couples de coordonnées (x ; y) qui respectent les contraintes. En effet,

- pour avoir $x\geq 0$ on doit être à droite de l'axe des ordonnées ;
- pour avoir $y\geq 0$ on doit être au-dessus de l'axe des abscisses ;
- pour avoir $x+2y\leq 80$ on doit être en-dessous de la droite $D_{maïs}$ (pour s'en assurer on peut vérifier que l'origine (0 ; 0) appartient au domaine des contraintes) ;
- pour avoir $x+y\leq 44$ on doit être en-dessous de la droite $D_{houblon}$ (pour la même raison : l'origine (0 ; 0) appartient au domaine des contraintes) ;
- pour avoir $2x+y\leq 62$ on doit être en-dessous de la droite D_{malt} (idem). Voilà donc, en grisé, le domaine où les contraintes sont respectées.

Les sommets de ce pentagone *OABCD* sont importants car, selon les cas, ce sera l'un d'eux qui donnera la solution optimale.
Les coordonnées de ces points se trouvent en résolvant les systèmes des équations prises deux par deux.

---

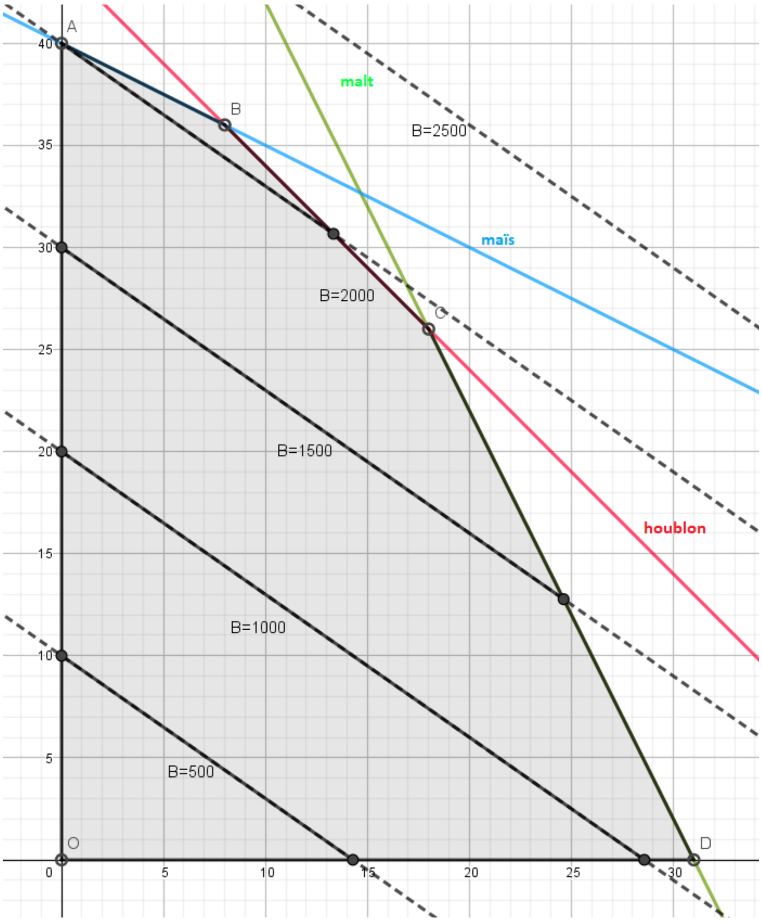
[2] Pour encourager l'achat de leurs produits, les marques d'alcool ont développé des stratégies spécifiques destinées à attirer les jeunes (source : jeunes.alcool-info-service.fr). Ce sujet de DM ne fait pas partie de ces stratégies. Nous rappelons que **l'abus d'alcool est dangereux pour la santé.**

Sur notre graphique, GeoGebra facilite le travail car ces coordonnées peuvent se lire directement :

$O(0\,;\,0)$, $A(0\,;\,40)$, $B(8\,;\,36)$, $C(18\,;\,26)$, $D(0\,;\,31)$

Ajoutons à ce graphique les droites d_{500}, d_{1000}, d_{1500}, d_{2000} et d_{2500}, correspondant à un bénéfice de 500 €, 1000 €, 1500 €, 2000 € et 2500 €. Ces droites ont pour équations $35x+50y=500$, $35x+50y=1000$, $35x+50y=1500$, $35x+50y=2000$ et $35x+50y=2500$, soit après simplification par 5 :

$7x+10y=100$, $7x+10y=200$,
$7x+10y=300$, $7x+10y=400$ et
$7x+10y=500$



Si on examine les deux derniers bénéfices (2000 et 2500), on remarque que la droite représentant le dernier (2500) ne traverse pas le domaine où sont respectées les contraintes. la droite représentant l'avant-dernier (2000) traverse ce domaine. Il reste à voir si il y a des couples de valeurs entières qui pourraient être solution :

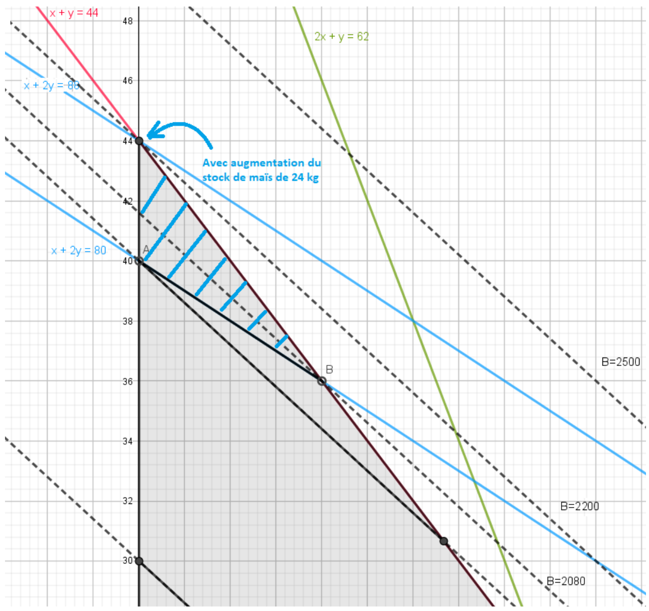
Le point $A(0\,;\,40)$ convient ; ensuite l'équation étant $7x+10y=400$, ce qui s'écrit aussi $y=-0{,}7x+40$, on constate que pour revenir sur un entier, il faut aller de 10 en 10. Pour $x=10$ on trouve $y=-7+40=33$. Et puis c'est tout pour cette valeur du bénéfice. Si le brasseur veut faire un bénéfice de 2000 €, il doit vendre 40 tonneaux de bière brune (et aucun de bière blonde) ou alors 10 tonneaux de bière blonde et 33 tonneaux de bière brune.

c) Déduire de la question précédente la solution qui respecte les contraintes en maximisant le bénéfice.

La question posée au début peut être envisagée maintenant : est-ce possible de faire davantage que 2000 € de bénéfice ? Et bien oui, d'après le graphique, on voit que la droite de bénéfice, parallèle aux autres, qui passe le plus haut du domaine, tout en le traversant est la droite qui passe par le point $B(8\,;\,36)$. Ce point ayant des coordonnées entières correspond à une solution où $x=8$ et $y=36$. Le bénéfice pour cette solution est égal à $B(8{,}36)=35\times 8+50\times 36=2080$ €. Si le brasseur veut faire un bénéfice maximum, il doit vendre 36 tonneaux de bière brune et 8 tonneaux de bière blonde. Son bénéfice sera alors de 2080 €.

d) Le brasseur voudrait investir en augmentant sa capacité de stockage en maïs ou en malt, les autres paramètres restant stables. Quel est le meilleur choix, économiquement parlant, pour cet investissement ?

Pour le maïs, on a $3x+6y\leq 240$ (soit $x+2y\leq 80$). Avec une augmentation du stock de maïs de z, la contrainte devient $3x+6y\leq 240+z$. z étant positif, la nouvelle bordure du domaine est repoussée vers le haut, parallèlement à la bordure originale $[AB]$ concernant le maïs (droite bleue du graphique). L'augmentation peut aller jusqu'à ce que le point B rencontre le point A. Cela arrive à l'endroit où la droite du houblon coupe l'axe des ordonnées, soit au point A' de coordonnées $A'(0\,;\,44)$.



Le bénéfice pour cette solution est égal à :

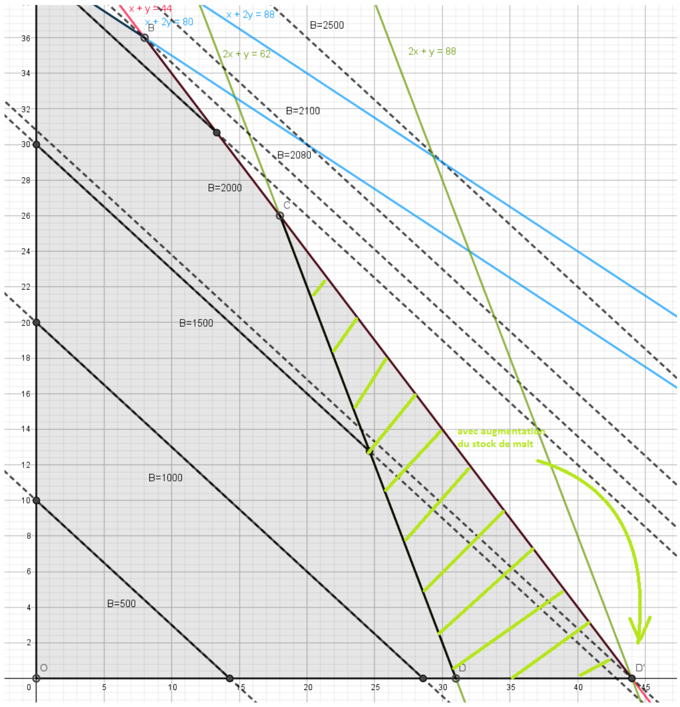
$B(0{,}44)=35\times 0+50\times 44=2200$ €.

Pour arriver à cette solution, le brasseur doit augmenter son stock de maïs de combien ?

On va avoir $3\times 0+6\times 44=240+z \Leftrightarrow z=264-240=24$.

Il faut augmenter le stock de maïs de 24 kg, soit avoir un stock de maïs de 264 kg. Avec cette solution, le brasseur ne fera plus que de la bière brune ($x=0$: plus de bière blonde) et il obtiendra un bénéfice de 2200 €, soit 120 € de mieux.

Pour le malt, on a $20x+10y \leq 620$ (soit $2x+y \leq 62$). Avec une augmentation du stock de malt de z, la contrainte devient $20x+10y \leq 620+z$. z étant positif, la nouvelle bordure du domaine est repoussée vers la droite, parallèlement à la bordure originale [CD] concernant le malt (droite verte du graphique). L'augmentation peut aller jusqu'à ce que le point C rencontre le point D. Cela arrive à l'endroit où la droite du houblon coupe l'axe des abscisses, soit au point D' de coordonnées $D'(44 ; 0)$. On constate que pour ces valeurs de x et y, le bénéfice est très inférieur à ce qu'il était : $B(44,0)=35\times 44+50\times 0=1540$ €, soit 540 € de moins que le bénéfice maximum original. Bien sûr, dans ces conditions, on pourra continuer à produire 36 tonneaux de bière brune et 8 tonneaux de bière blonde (soit le point B du graphique), puisque ce point fait toujours partie du domaine des contrainte. Le bénéfice sera donc inchangé, égal à 2080 €.



La conclusion de cette étude est qu'un investissement ne sera profitable que s'il augmente le stock de maïs. Dans ce cas, en ajoutant 10% au stock de maïs (24 kg représente 10% de 240 kg), on élève le bénéfice de 5,7% environ (120 € d'augmentation par rapport au 2080 € de bénéfice initialement).

L'augmentation du stock de malt ne conduit qu'à des frais (et peut-être certains avantages qui ne sont pas dits par l'énoncé), mais en aucun cas, ils ne permettent d'augmenter le bénéfice.