2de — TD n°1 sur les vecteurs

1) Égalités, Milieu, Parallélogramme & Sommes

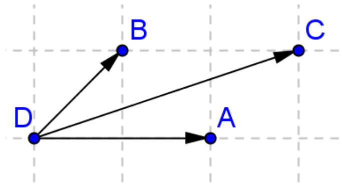
a) Traduire les égalités suivantes dans le langage des figures (*le vecteur* $2\overrightarrow{EC}$ *est la somme* $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EC}$) :

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ se traduit par : *D* est le milieu de [*AB*].

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ se traduit par : *ABCD* est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ se traduit par : *A* est le milieu de [*BC*].

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$ se traduit par : *ACBD* est un parallélogramme (*voir figure ci-contre*)



$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=2\overrightarrow{EC}$ (le vecteur $2\overrightarrow{EC}$ est la somme $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EC}$) se traduit par : *C* est le milieu de [*AB*]. C'est une propriété que l'on peut connaître, mais pour la montrer il suffit de la transformer :

$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB})=2\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$. Et donc $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

Le point *E* peut être choisi n'importe où, *C* sera toujours le milieu de [*AB*] :

- s'il est en *A*, on a $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$. Même chose s'il est en *B*.
- s'il est en *C*, on a $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CC}=\vec{0}$.

s'il est en *M*, on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC}$.

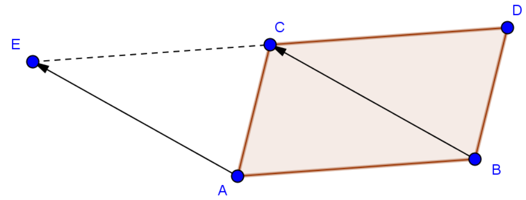
b) Simplifier les écritures vectorielles suivantes (*remplacer les soustractions par l'addition du vecteur opposé*) :

$\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

$\vec{v}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DE}$.

$\vec{w}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BA}$.

c) Soit un triangle quelconque *ABC* et un point *D* tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
Expliquer comment tracer *D* à partir de *A, B* et *C*.
Faire une figure. Placer sur la figure le point *E* tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$.
Démontrer vectoriellement que *C* est le milieu de [*ED*].



D est le 4ème sommet du parallélogramme *ABDC* (*c'est la règle du parallélogramme*), donc $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$.
De plus, on a $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$
donc $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EC}$, *C* est le milieu de [*ED*].

d) Soit un parallélogramme quelconque *FGHI* dont les diagonales se coupent en *J* et soit *K* un point quelconque du plan. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KH}+\overrightarrow{KI}=4\overrightarrow{KJ}$.

Décomposons avec Chasles : $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KH}+\overrightarrow{KI}=(\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JF})+(\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JG})+(\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JH})+(\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JI})$,

Regroupons : $=(\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KJ})+(\overrightarrow{JF}+\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{JH}+\overrightarrow{JI})$

Simplifions et regroupons différemment : $=4\overrightarrow{KJ}+(\overrightarrow{JF}+\overrightarrow{JH})+(\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{JI})$

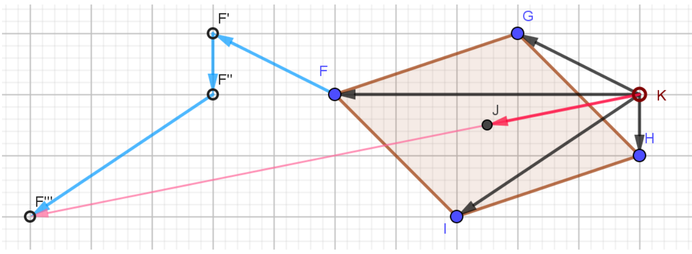
Comme *J* est le milieu de [*FH*] et de [*GI*], on a $\overrightarrow{JF}+\overrightarrow{JH}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{JI}=\vec{0}$.

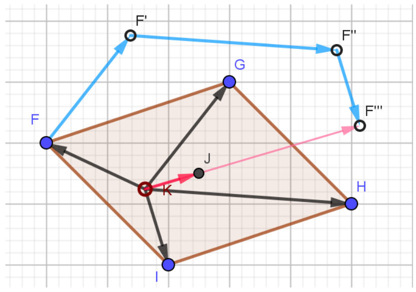
Donc, pour tout point *K* du plan, on obtient bien $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KH}+\overrightarrow{KI}=4\overrightarrow{KJ}$.

L'illustration montre cette propriété pour un point *K* et un parallélogramme *FGHI* particuliers, dans deux configurations différentes, mais il va de soi que cette propriété reste valable dans toutes les configurations du moment que *FGHI* est un parallélogramme. Sur cette illustration, j'ai tracé les points *F'*, *F''* et *F'''* tels que :

$\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{FF'}$, $\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{F'F''}$ et $\overrightarrow{KI}=\overrightarrow{F''F'''}$

On constate alors que $\overrightarrow{KF'''}=4\overrightarrow{KJ}$, *J* étant le centre du parallélogramme.





e) *A, B* et *C* sont trois points distincts. *A'*, *B'* et *C'* sont les milieux respectifs de [*BC*], [*CA*] et [*AB*].
Soit *G* le point défini par l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Montrer que l'on a alors $3\overrightarrow{GA'}=\overrightarrow{AA'}$ et $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AA'}$.
(*le vecteur* $3\overrightarrow{AG}$ *est la somme* $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG}$ *; de même,* $3\overrightarrow{GA'}$ *est la somme* $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GA'}$)

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})=3\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AA'}$ (on a utilisé pour cela la caractérisation de A' milieu de $[BC]$ montrée dans le 5ème égalité du a).

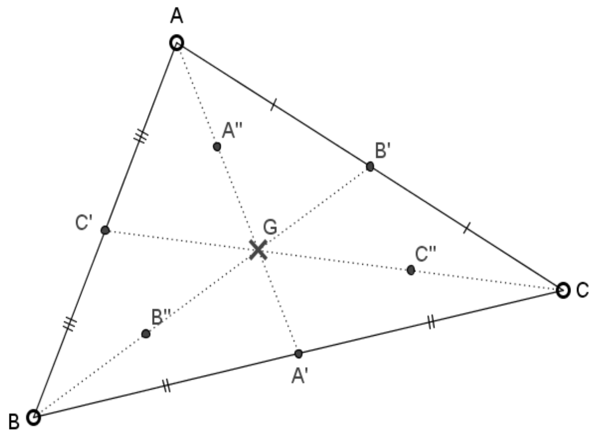
Donc, $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$, ce qui conduit à $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AA'}$.

On trouve l'autre expression en transformant cette dernière : $3(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G})=2\overrightarrow{AA'}$,
d'où $3\overrightarrow{AA'}+3\overrightarrow{A'G}=2\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AA'}+3\overrightarrow{A'G}=\vec{0}$ donc $3\overrightarrow{GA'}=\overrightarrow{AA'}$.

si vous trouvez qu'on a sauté des étapes, il faut reconstituer :
$3(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G})=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G}=2\overrightarrow{AA'}+(\overrightarrow{AA'}+3\overrightarrow{A'G})$.

Donc, si $3(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G})=2\overrightarrow{AA'}$, on doit avoir $\overrightarrow{AA'}+3\overrightarrow{A'G}=\vec{0}$.

Pourquoi ? C'est comme avec les nombres, si $\vec{u}+\vec{v}=\vec{u}$ on doit avoir $\vec{v}=\vec{0}$. En d'autres termes, on peut, dans une égalité vectorielle, enlever ou ajouter le même vecteur des deux côtés du signe =.



En déduire que G appartient à (AA'),
puis placer G sur (AA').

L'égalité $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AA'}$ exprime clairement que A, G et A' sont alignés. La droite (AA') et la droite (AG) doivent avoir la même direction, donc doivent être parallèles. Comme elles ont un point en commun, le point A, elles sont confondues.

$$(AA') \,//\, (AG) \Rightarrow (AA') = (AG)$$

La droite (AA') est une médiane du triangle et G est sur cette médiane, au $\frac{2}{3}$ du sommet A. Le sens de A vers G est le même que celui de A vers A'. Les longueurs sont telles que $3\,AG=2\,AA'$, c'est-à-dire $AG=\frac{2}{3}AA'$.

Quelles égalités vectorielles peut-on écrire avec G, B et B' ?
Même question avec G, C et C'.
Comment s'appelle G ?

On aurait pu faire ce travail avec B et B' au lieu de A et A' et conclure que $3\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BB'}$:
G est sur la médiane (BB'), au $\frac{2}{3}$ du sommet B. On aurait eu aussi $3\overrightarrow{GB'}=\overrightarrow{BB'}$.

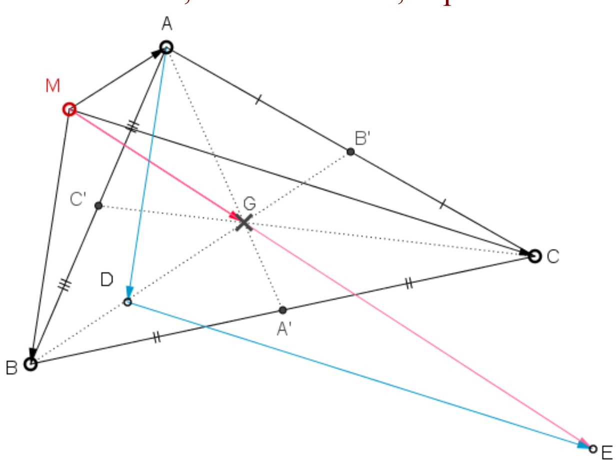
De même, on aurait pu aussi partir de C et conclure que $3\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CC'}$ ou $3\overrightarrow{GC'}=\overrightarrow{CC'}$, soit G est sur la médiane (CC'). En fait, G est sur les trois médianes. C'est leur point de concours appelé « centre de gravité » du triangle. On retiendra cette caractérisation vectorielle du centre de gravité G d'un triangle ABC :

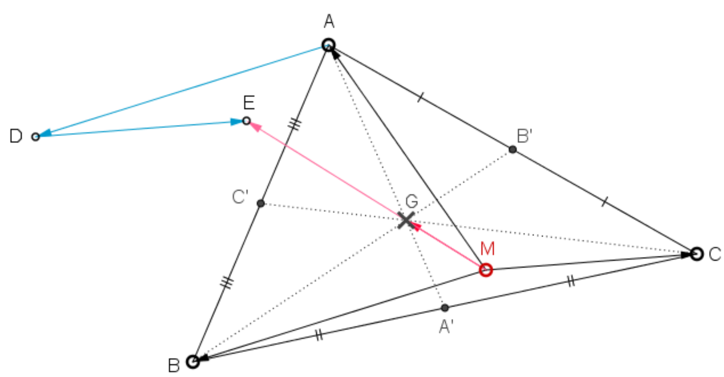
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

Montrer que, pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

C'est facile maintenant, il suffit de décomposer les vecteurs contenant le point M en appliquant la relation de Chasles, de la même façon qu'à l'exercice précédent on avait décomposé les vecteurs contenant le point K :
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})=3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{MG}+\vec{0}=3\overrightarrow{MG}$.

Voici deux configurations qui illustrent cette propriété. Sur cette illustration, j'ai tracé les points D et E tels que : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{MC}$. On constate alors que $\overrightarrow{ME}=3\overrightarrow{MG}$, G étant le centre de gravité du triangle ABC. Bien sûr, si M vient en G, le point E vient également se superposer à G.





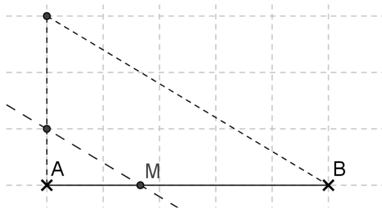
f) Soient A et B deux points du plan.
Déterminer les entiers x et y tels que $x\,\overrightarrow{AM}=y\,\overrightarrow{AB}$ dans les cas suivants :

cas n°1 : $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$; cas n°2 : $2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BM}$; cas n°3 : $3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$; cas n°4 : $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

En déduire la position précise du point M sur (AB) dans les différents cas.

NB : on pourra écrire la relation $x\overrightarrow{AM}=y\overrightarrow{AB}$ sous la forme $\overrightarrow{AM}=\frac{y}{x}\overrightarrow{AB}$ et en déduire que M se place sur (AB) de manière à ce que $AM=\frac{y}{x}AB$ (égalité sur les longueurs) et, si $\frac{y}{x}>0$, avec $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans le même sens, si $\frac{y}{x}<0$ avec $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans sens contraire.

- cas n°1 : $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$



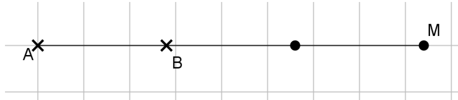
On a, successivement :

$2\overrightarrow{AM}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})=\vec{0}$; $3\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$; $3\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Ce qui permet de placer M par rapport à A et B

(*la construction géométrique de M utilisant Thalès est facultative, on peut mesurer*).

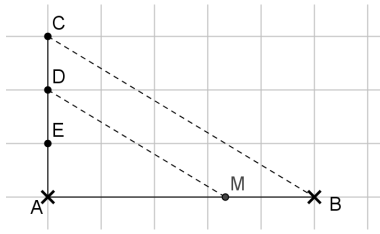
- cas n°2 : $2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BM}$



On a, successivement :

$2\overrightarrow{AM}=3(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})$; $\vec{0}=3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$, ce qui permet de placer *M*.

- cas n°3 : $3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$



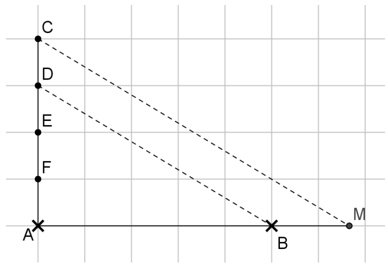
On a, successivement :

$3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}$; $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$; $3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,

ce qui permet de placer M

(*la construction géométrique de M utilisant Thalès est facultative, on peut mesurer*).

- cas n°4 : $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$



On a, successivement :

$\overrightarrow{AB}+3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$; $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{AB}=\vec{0}$; $3\overrightarrow{AM}=4\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$,

ce qui permet de placer M

(*la construction géométrique de M utilisant Thalès est facultative, on peut mesurer*).

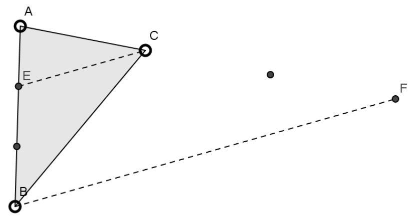
2) <u>Colinéarité</u>

a) Tracer un triangle ABC. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et le point F tel que $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.

En déduire que les droites (EC) et (BF) sont parallèles.

Quelle est la valeur du rapport $\frac{BF}{EC}$?



$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-1\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ alors que $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

On remarque que $3\overrightarrow{EC}=-1\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$.

Les vecteurs sont colinéaires.

On en déduit que les droites (EC) et (BF) sont parallèles.

Le rapport $\frac{BF}{EC}$ vaut 3 car la longueur de $\overrightarrow{BF}$ est 3 fois celle de $\overrightarrow{EC}$.

b) Tracer un triangle LMN. Placer les points O et P tels que $\overrightarrow{NO}=-2\overrightarrow{NL}$ et $\overrightarrow{MP}=3\overrightarrow{MN}$.

Démontrer que les droites (LM) et (OP) sont parallèles.

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MP}$ d'après la relation de Chasles.

$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{NL}+\overrightarrow{NM}+3\overrightarrow{MN}$ d'après les définitions.

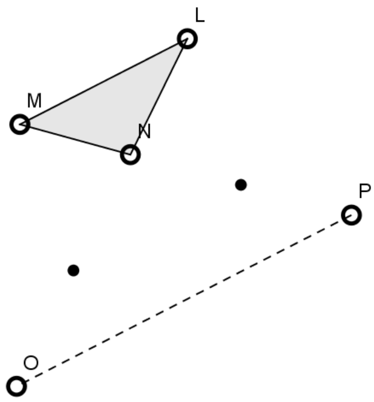
$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{NL}+2\overrightarrow{MN}$ en appliquant la distributivité.

$\overrightarrow{OP}=2(\overrightarrow{NL}+\overrightarrow{MN})$ pour la même raison (distributivité).

$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{ML}$ d'après la relation de Chasles.

Conclusion : $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{ML}$ sont colinéaires,

les droites (OP) et (ML) sont parallèles.



c) Tracer un segment [QR] tel que QR=6 *cm*.

Soit S, le point défini par $5\overrightarrow{SQ}-2\overrightarrow{SR}=\vec{0}$.

Exprimer $\overrightarrow{QS}$ en fonction de $\overrightarrow{QR}$. Placer le point S.

L'égalité peut s'écrire $5\overrightarrow{SQ}=2\overrightarrow{SR}$ et donc $\overrightarrow{SQ}$ et $\overrightarrow{SR}$ sont colinéaires. Les droites (SQ) et (SR) sont donc parallèles et, comme elles passent par le même point S, on en déduit que S, Q et R sont alignés. Pour placer S sur (RQ), exprimons $\overrightarrow{RS}$ en fonction de $\overrightarrow{RQ}$:

$5(\overrightarrow{RQ}-\overrightarrow{RS})-2\overrightarrow{SR}=5\overrightarrow{RQ}-3\overrightarrow{RS}=\vec{0}$ et donc $5\overrightarrow{RQ}=3\overrightarrow{RS}$, soit $\overrightarrow{RS}=\frac{5}{3}\overrightarrow{RQ}$.

On voit maintenant comment on peut placer le point S.