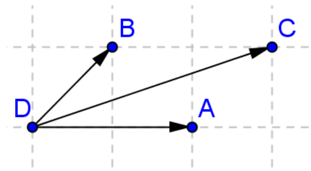
2[de] TD n°1 sur les vecteurs CORRECTION

1) <u>Égalités, Milieu, Parallélogramme & Sommes</u>

a) Traduire les égalités suivantes dans le langage des figures :

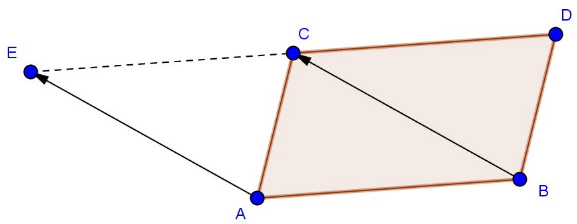


$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ se traduit par : *D* est le milieu de [*AB*].
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ se traduit par : *ABCD* est un parallélogramme.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ se traduit par : *A* est le milieu de [*BC*].
$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$ se traduit par : *ACBD* est un parallélogramme (voir figure ci-dessus).
$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=2\overrightarrow{EC}$ (le vecteur $2\overrightarrow{EC}$ est la somme $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EC}$) se traduit par : *C* est le milieu de [*AB*].
C'est une propriété que l'on peut connaître, mais pour la montrer il suffit de la transformer :
$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB})=2\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$. Et donc $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.
Le point *E* peut être choisi n'importe où, *C* sera toujours le milieu de [*AB*] :

- s'il est en *A*, on a $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$. Même chose s'il est en *B*.
- s'il est en *C*, on a $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CC}=\vec{0}$.
- s'il est en *M*, on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC}$.

b) Simplifier les écritures vectorielles suivantes :
$\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.
$\vec{v}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DE}$ (remplacer les soustractions par l'addition du vecteur opposé)
$\vec{w}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BA}$.

c) Soit un triangle quelconque *ABC* et un point *D* tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
Expliquer comment tracer *D* à partir de *A, B* et *C*.
Faire une figure.
Placer sur la figure le point *E* tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$.
Démontrer vectoriellement que *C* est le milieu de [*ED*].



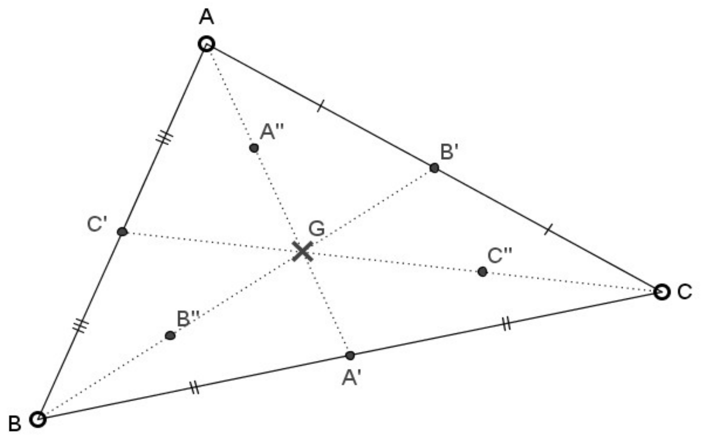
D est le 4[ème] sommet du parallélogramme *ABDC* (règle du parallélogramme),
donc $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$.
De plus, on a $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$
donc $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EC}$, *C* est le milieu de [*ED*].

d) Soit un parallélogramme quelconque *FGHI* dont les diagonales se coupent en *J* et soit *K* un point quelconque du plan. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KH}+\overrightarrow{KI}=4\overrightarrow{KJ}$.
Décomposons : $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KH}+\overrightarrow{KI}=(\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JF})+(\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JG})+(\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JH})+(\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JI})$,
puis regroupons :
$\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KH}+\overrightarrow{KI}=(\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KJ})+(\overrightarrow{JF}+\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{JH}+\overrightarrow{JI})=4\overrightarrow{KJ}+(\overrightarrow{JF}+\overrightarrow{JH})+(\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{JI})$.
Les deux dernières sommes sont égales au vecteur nul, car *J* est le milieu de [*FH*] et de [*GI*].
Donc on obtient bien le vecteur $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KH}+\overrightarrow{KI}=4\overrightarrow{KJ}$ pour tout point *K* du plan.

e) *A, B* et *C* sont trois points distincts. *A', B'* et *C'* sont les milieux respectifs de [*BC*], [*CA*] et [*AB*]. Soit *G* le point défini par l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Montrer que l'on a alors $3\overrightarrow{GA'}=\overrightarrow{AA'}$ et $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AA'}$.
(le vecteur $3\overrightarrow{AG}$ est la somme $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG}$; de même, $3\overrightarrow{GA'}$ est la somme $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GA'}$)
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})=3\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AA'}$ (on a utilisé pour cela la caractérisation de *A'* milieu de [*BC*] montrée dans le 5[ème] égalité du a).
Donc, $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$, ce qui conduit à $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AA'}$.

On trouve l'autre expression en transformant cette dernière : $3(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G})=2\overrightarrow{AA'}$,
d'où $3\overrightarrow{AA'}+3\overrightarrow{A'G}=2\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AA'}+3\overrightarrow{A'G}=\vec{0}$ donc $3\overrightarrow{GA'}=\overrightarrow{AA'}$.
si vous trouvez qu'on a sauté des étapes, il faut reconstituer :
$3(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G})=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G}=2\overrightarrow{AA'}+(\overrightarrow{AA'}+3\overrightarrow{A'G})$.
Donc, si $3(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G})=2\overrightarrow{AA'}$, on doit avoir $\overrightarrow{AA'}+3\overrightarrow{A'G}=\vec{0}$.
Pourquoi ? C'est comme avec les nombres, si $\vec{u}+\vec{v}=\vec{u}$ on doit avoir $\vec{v}=\vec{0}$. En d'autres termes, on peut, dans une égalité vectorielle, enlever ou ajouter le même vecteur des deux côtés du signe =.

En déduire que G appartient à (AA'),
puis placer G sur (AA').



L'égalité $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AA'}$ exprime clairement que A, G et A' sont alignés. La droite (AA') et la droite (AG) doivent avoir la même direction, donc doivent être parallèles. Comme elles ont un point en commun, le point A, elles sont confondues.

$$(AA') \,//\, (AG) \Rightarrow (AA') = (AG)$$

La droite (AA') est une médiane du triangle et G est sur cette médiane, au $\frac{2}{3}$ du sommet A. Le sens de A vers G est le même que celui de A vers A'.
Les longueurs sont telles que $3AG=2AA'$, c'est-à-dire $AG=\frac{2}{3}AA'$.

Quelles égalités vectorielles peut-on écrire avec G, B et B' ?
On aurait pu faire ce travail avec B et B' au lieu de A et A' et conclure que $3\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BB'}$: G est sur la médiane (BB'), au $\frac{2}{3}$ du sommet B. On aurait eu aussi $3\overrightarrow{GB'}=\overrightarrow{BB'}$.

Même question avec G, C et C'.
De même, on aurait pu aussi partir de C et conclure que $3\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CC'}$ ou $3\overrightarrow{GC'}=\overrightarrow{CC'}$, soit G est sur la médiane (CC').

Comment s'appelle G ?
En fait, G est sur les trois médianes. C'est leur point de concours appelé « centre de gravité » du triangle.

Montrer que, pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})=3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{MG}+\vec{0}=3\overrightarrow{MG}$.

f) Soient A et B deux points du plan.
Déterminer les entiers x et y tels que $x\overrightarrow{AM}=y\overrightarrow{AB}$ dans les cas suivants :

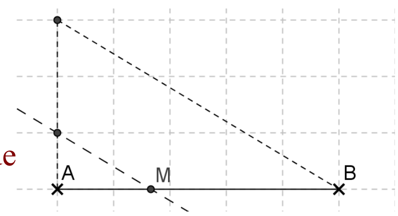
cas n°1 : $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$; cas n°2 : $2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BM}$
cas n°3 : $3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$; cas n°4 : $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

En déduire la position précise du point M sur (AB) dans les deux cas.

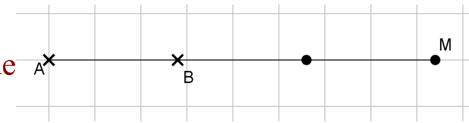
NB : on pourra écrire la relation $x\overrightarrow{AM}=y\overrightarrow{AB}$ sous la forme $\overrightarrow{AM}=\frac{y}{x}\overrightarrow{AB}$ et en déduire que M se place sur (AB) de manière à ce que $AM=\frac{y}{x}AB$ (égalité sur les longueurs) et, si $\frac{y}{x}>0$, avec $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans le même sens, si $\frac{y}{x}<0$ avec $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans sens contraire.
On verra plus tard que la multiplication d'un vecteur par un réel respecte la distributivité sur la somme : $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$ et aussi $k(k'\vec{v})=kk'\vec{v}$, si bien qu'on peut effectuer des transformations vectorielles comme on le faisait avec les nombres.

- cas n°1 : $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

On a, successivement :
$2\overrightarrow{AM}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})=\vec{0}$; $3\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$; $3\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
Ce qui permet de placer M par rapport à A et B (la construction géométrique de M utilisant Thalès est facultative, on peut mesurer).

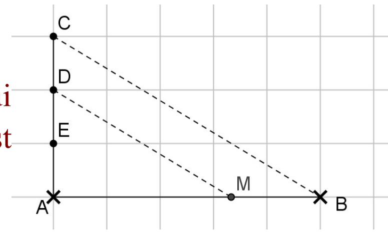


- cas n°2 : $2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BM}$



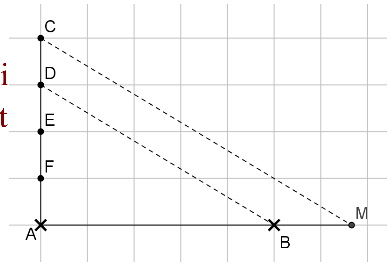
On a, successivement :
$2\overrightarrow{AM}=3(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})$; $\vec{0}=3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$, ce qui permet de placer *M*.

- cas n°3 : $3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$



On a, successivement :
$3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}$; $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$; $3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, ce qui permet de placer *M* (la construction géométrique de *M* utilisant Thalès est facultative, on peut mesurer).

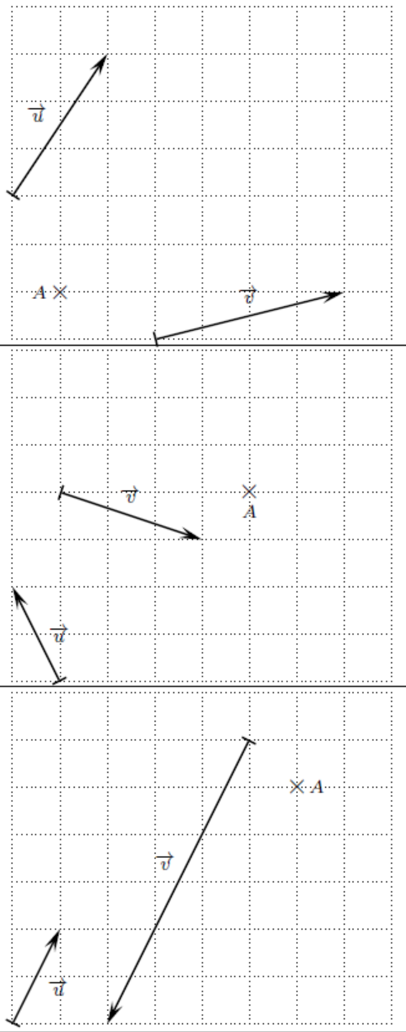
- cas n°4 : $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$



On a, successivement :
$\overrightarrow{AB}+3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$; $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{AB}=\vec{0}$; $3\overrightarrow{AM}=4\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, ce qui permet de placer M (la construction géométrique de M utilisant Thalès est facultative, on peut mesurer).

Somme de vecteurs

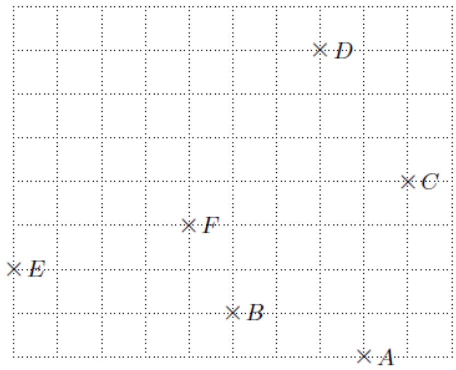
Ex 5 Construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ d'origine A.



Ex 6 Construction :

1) Construire les points M et N définis par :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}$

2) Calculer : $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$. Conclure.



Ex 7 Simplifier les sommes vectorielles suivantes :

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB})$

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DB} - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

4) $\overrightarrow{BA} - (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{AD}$

Ex 8 Entourer la (ou les) bonne(s) réponse(s). $ABCD$ est un losange de centre O.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$	a $\overrightarrow{BD}$	b $\overrightarrow{AO}$	c $\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} =$	a $\overrightarrow{OD}$	b $\overrightarrow{BA}$	c $\overrightarrow{OC}$
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} =$	a $\overrightarrow{AC}$	b $\overrightarrow{0}$	c $\overrightarrow{CA}$
$OA + AD =$	a AC	b 0	c BD

Ex 9 $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O.

1) Exprimer les sommes suivantes en fonction d'un vecteur défini par deux points de la figure.

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

b) $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BO}$

c) $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DO}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$

2) Construire en laissant les traits de construction les points N et P tels que :

a) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA}$.

b) $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.

Ex 10 Cinq points O, A, B, C, D sont tels que :
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$
Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Ex 11 Si l'on a $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0}$, est-il possible que les points A, B, C, D, E et F soient tous distincts ?