2de TD n°1 sur les vecteurs

1) Égalités, Milieu, Parallélogramme & Sommes

a) Traduire les égalités suivantes dans le langage des figures (*le vecteur* $2\overrightarrow{EC}$ *est la somme* $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EC}$) :

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=2\overrightarrow{EC}$

b) Simplifier les écritures vectorielles suivantes (*remplacer les soustractions par l'addition du vecteur opposé*) :

$\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$

$\vec{v}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}$

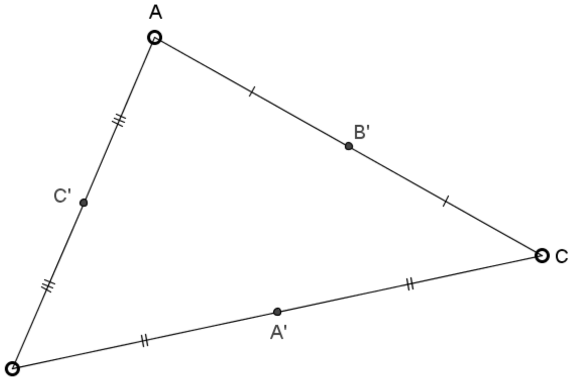
$\vec{w}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$

c) Soit un triangle quelconque *ABC* et un point *D* tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
Expliquer comment tracer *D* à partir de *A, B* et *C*.
Faire une figure. Placer sur la figure le point *E* tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$.
Démontrer vectoriellement que *C* est le milieu de [*ED*].

d) Soit un parallélogramme quelconque *FGHI* dont les diagonales se coupent en *J* et soit *K* un point quelconque du plan. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KH}+\overrightarrow{KI}=4\overrightarrow{KJ}$.

e) *A, B* et *C* sont trois points distincts. *A', B'* et *C'* sont les milieux respectifs de [*BC*], [*CA*] et [*AB*].
Soit *G* le point défini par l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Montrer que l'on a alors $3\overrightarrow{GA'}=\overrightarrow{AA'}$ et $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AA'}$.
(*le vecteur* $3\overrightarrow{AG}$ *est la somme* $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG}$ *;*
de même, $3\overrightarrow{GA'}$ *est la somme* $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GA'}$)
En déduire que *G* appartient à (*AA'*), puis placer *G* sur (*AA'*).
Quelles égalités vectorielles peut-on écrire avec *G, B* et *B'* ?
Même question avec *G, C* et *C'* .
Comment s'appelle *G* ?
Montrer que, pour tout point *M* du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$



f) Soient *A* et *B* deux points du plan.
Déterminer les entiers *x* et *y* tels que $x\overrightarrow{AM}=y\overrightarrow{AB}$ dans les cas suivants :

cas n°1 : $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$; cas n°2 : $2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BM}$

cas n°3 : $3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$; cas n°4 : $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

En déduire la position précise du point *M* sur (*AB*) dans les différents cas.
NB : on pourra écrire la relation $x\overrightarrow{AM}=y\overrightarrow{AB}$ *sous la forme* $\overrightarrow{AM}=\frac{y}{x}\overrightarrow{AB}$ *et en déduire que M se place sur (AB) de manière à ce que* $AM=\frac{y}{x}AB$ *(égalité sur les longueurs) et, si* $\frac{y}{x}>0$ *, avec* $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ *dans le même sens, si* $\frac{y}{x}<0$ *avec* $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ *dans sens contraire.*

2) Colinéarité

a) Tracer un triangle *ABC*. Placer le point *E* tel que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et le point *F* tel que $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.
En déduire que les droites (*EC*) et (*BF*) sont parallèles.
Quelle est la valeur du rapport $\frac{BF}{EC}$?

b) Tracer un triangle *LMN*. Placer les points *O* et *P* tels que $\overrightarrow{NO}=-2\overrightarrow{NL}$ et $\overrightarrow{MP}=3\overrightarrow{MN}$.
Démontrer que les droites (*LM*) et (*OP*) sont parallèles.

c) Tracer un segment [*QR*] tel que *QR*=6 *cm*. Soit *S*, le point définit par $5\overrightarrow{SQ}-2\overrightarrow{SR}=\vec{0}$.
Exprimer $\overrightarrow{QS}$ en fonction de $\overrightarrow{QR}$. Placer le point S.