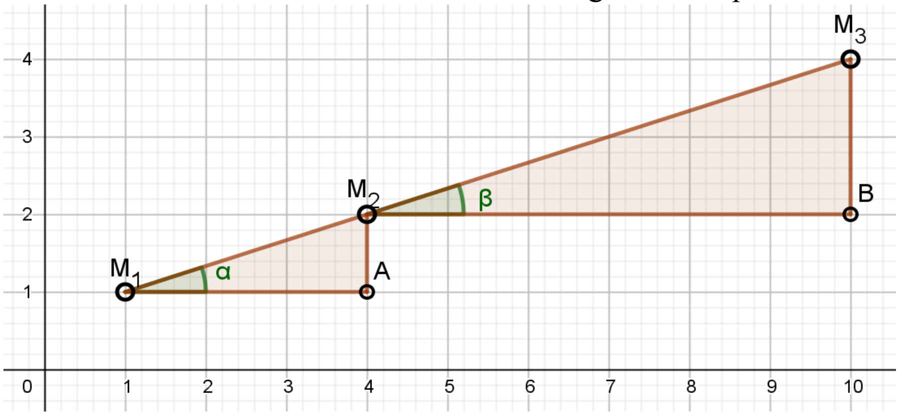
CORRECTION

1. Droite et équation de droite

a) Différentes formes d'équations de droite

Trois points de la courbe représentative d'une même fonction affine $x \mapsto ax+b$ sont alignés. Pourquoi ?



Le taux de variation d'une fonction affine est constant, égal à a (voir chapitre précédent). Pour cette raison, trois points $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ et $M_3(x_3;y_3)$ de la courbe représentative d'une fonction affine sont alignés car les angles α et β que font $[M_1M_2]$ et $[M_2M_3]$ avec l'axe des abscisses sont égaux. En effet, les tangentes de ces angles sont égales puisqu'elles sont égales au coefficient a (le taux de variation de la fonction).

Sur la figure, $\tan\alpha = \frac{M_2A}{M_1A} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = a$ et $\tan\beta = \frac{M_3B}{M_2B} = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = a$; d'où $\tan\alpha = \tan\beta$ et donc $\alpha = \beta$.

On verra plus tard, avec les vecteurs, une façon plus simple de montrer cette propriété.

NB : généralement, cette propriété est admise sans démonstration en 3ème.

Les courbes représentatives des fonctions affines ont pour équation $y=ax+b$. Mais certaines droites ne peuvent pas se mettre sous cette forme. Lesquelles ?

Les courbes représentatives des fonctions affines sont généralement « obliques » (elles montent ou descendent selon que $a>0$ ou $a<0$), parfois « horizontales » (fonctions constantes), mais jamais verticales. Les droites verticales ne représentent aucune fonction. Elles ont pour équation $x=k$, où k est un réel indépendant de x.

Montrer que si un point $M(x;y)$ vérifie l'équation $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ où α, β et γ sont des nombres indépendants de x, alors M est sur une droite d'équation $y=ax+b$ si $\beta\neq0$ et $x=k$ si $\beta=0$.

- Si on a $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ et que $\beta\neq0$, alors $\beta y = -\alpha x-\gamma \Leftrightarrow y = \frac{-\alpha x-\gamma}{\beta} \Leftrightarrow y = \frac{-\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow y = ax-b$, en posant $a = \frac{-\alpha}{\beta}$ et $b = \frac{-\gamma}{\beta}$; ainsi on retrouve l'équation d'une *droite non-verticale*.
- Si on a $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ et que $\beta=0$, alors $\alpha x+\gamma=0$ et donc, si $\alpha\neq0$ on a $\alpha x = -\gamma \Leftrightarrow x = \frac{-\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x = k$, en posant $x = \frac{-\gamma}{\alpha}$; ainsi on retrouve l'équation d'une *droite verticale*.
- Si $\beta=0$ et $\alpha=0$ alors on doit aussi avoir $\gamma=0$ et l'équation devient 0=0. Celle-ci est toujours vraie, le point $M(x;y)$ peut être n'importe où dans le plan : ce cas ne traduit pas l'appartenance à une droite.

L'équation $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ est appelée équation cartésienne d'une droite ; l'équation $y=ax+b$ (ou $x=k$) est l'équation réduite. Montrer qu'il y a une infinité d'équation cartésienne pour une même droite.

Si on sait que les coordonnées d'un point vérifient une équation cartésienne $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, avec $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, alors le point est sur une droite. On peut obtenir une autre équation de la même droite en multipliant ou divisant les deux membres de l'égalité par un même nombre $\delta\neq0$.

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha\delta x+\beta\delta y+\gamma\delta=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\delta}x+\frac{\beta}{\delta}y+\frac{\gamma}{\delta}=0$$

Tout cela est assez théorique et abstrait, passons aux exemples.

Exemple n°1 : Soit Δ la droite d'équation réduite $y = 5-2x$.

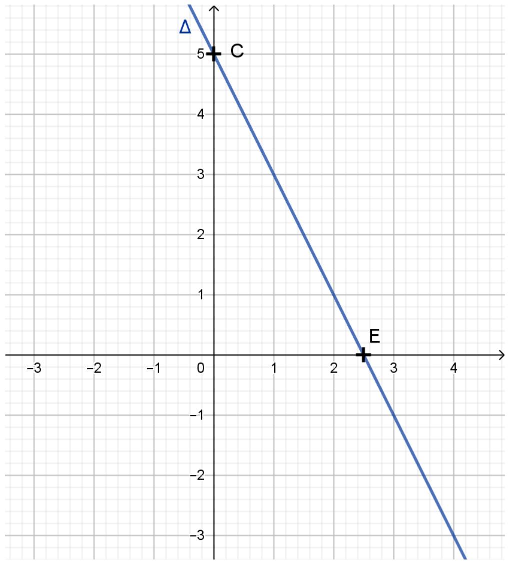
Quel est le coefficient directeur de Δ ? $a = -2$ (le coefficient directeur est le taux de variation de la fonction affine $x \mapsto ax+b$; c'est donc a). Quelle est l'ordonnée à l'origine de Δ ? $b = 5$ (l'ordonnée à l'origine est l'image de 0 par la fonction affine $x \mapsto ax+b$; c'est donc b)

Quelle est l'abscisse du point d'intersection de Δ et de l'axe des abscisses ? C'est l'antécédent de 0 par la fonction affine $x \mapsto ax+b$; c'est donc la solution de l'équation $ax+b=0$. D'une façon générale c'est $x = \frac{-b}{a}$.

Ici, c'est donc $x = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Déterminer l'équation cartésienne de Δ pour laquelle α=1.

Si on a $y=5-2x$, alors on a aussi $0=5-2x-y$ ce qui s'écrit également $-2x-y+5=0$. Sous cette forme, on reconnaît une équation cartésienne avec $\alpha=-2$, $\beta=-1$ et $\gamma=5$. On peut simplifier l'équation en changeant les signes : $2x+y-5=0$. C'est une autre équation cartésienne de la même droite pour laquelle $\alpha=2$, $\beta=1$ et $\gamma=-5$. La question demandait d'avoir un coefficient α=1, pour obtenir cela, il suffit de diviser toute l'égalité par 2. On obtient alors l'équation cartésienne $x+\frac{y}{2}-\frac{5}{2}=0$.



Tracer la droite Δ ci-contre.

Voici la droite Δ, les points E et C sont les intersections de Δ avec les axes. Leurs coordonnées sont E(2,5;0) et C(0;5).

b) <u>Exemple n°2</u> : Soit D la droite d'équation cartésienne $2x+3y-1=0$. Déterminer les coordonnées des points $A(x\,;\,1{,}5)$ et $B(0\,;\,y)$ de D.

En remplaçant y par 1,5 on trouve $2x+3\times1{,}5-1=0$ et donc $x=-3{,}5\div2=-1{,}75$. On a donc $A(-1{,}75\,;\,1{,}5)$.
En remplaçant x par 0 on trouve $3y-1=0$ et donc $3y=1$, soit $y=1\div3\approx0{,}\overline{3}$. On a donc $B(0\,;\,0{,}\overline{3})$.

Déterminer l'équation réduite de D.

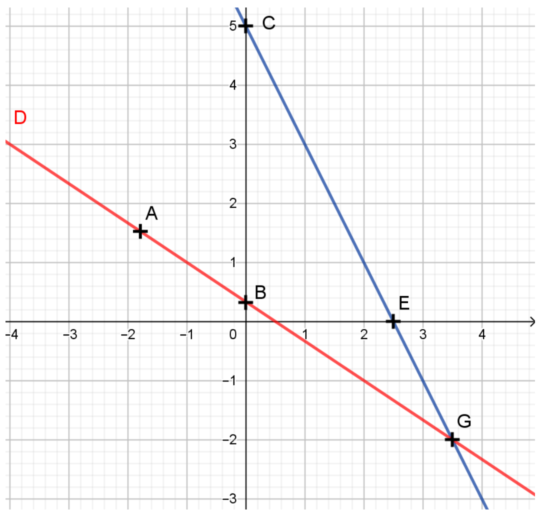
Si on a $2x+3y-1=0$, alors on a aussi $3y=-2x+1$ et en divisant par 3 : $y=\frac{-2}{3}x+\frac{1}{3}$.

Déterminer les coordonnées de G, l'intersection de Δ et de D.

Pour déterminer les coordonnées de l'intersection de Δ et de D, on prend les équations réduites. On doit, en effet, avoir simultanément $y=\frac{-2}{3}x+\frac{1}{3}$ (pour être sur D) et $y=5-2x$ (pour être sur Δ). On doit donc avoir $5-2x=\frac{-2}{3}x+\frac{1}{3}$ c'est-à-dire $\left(-2+\frac{2}{3}\right)x=\frac{1}{3}-5$ (on a regroupé tout ce qui contient x dans un même membre et on mis x en facteur). Effectuons les calculs et divisons par le coefficient de x :

$$\left(-2+\frac{2}{3}\right)x=\frac{1}{3}-5\Leftrightarrow\left(\frac{-6}{3}+\frac{2}{3}\right)x=\frac{1}{3}-\frac{15}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{-4}{3}\right)x=\frac{-14}{3}\Leftrightarrow x=\frac{-14}{3}\div\left(\frac{-4}{3}\right)=\frac{-14}{3}\times\left(\frac{3}{-4}\right)=\frac{7}{2}$$

Ainsi l'abscisse de G est 3,5. Son ordonnée est $y=5-2\times3{,}5=5-7=-2$. On a donc $G(3{,}5\,;\,-2)$.



Tracer la droite D sur la même figure ci-contre. Placer A, B et G.

Pour tracer la droite D, j'ai placé les points connus A et B.
On s'aperçoit que le point G a bien les coordonnées calculées

Vérifier vos résultats.

c) <u>Exemple n°3</u> : Soit $M(2\,;\,-1)$ et $P(5\,;\,3)$ des points d'une droite d. Déterminer l'équation cartésienne de d (méthode suggérée : résoudre un système d'équations)

Les points M et P doivent vérifier l'équation $\alpha x+\beta y+\gamma=0$. On a vu qu'il est possible de choisir une équation cartésienne particulière, par exemple celle qui a $\alpha=1$. On va chercher donc à vérifier l'équation cartésienne standardisée $x+\beta y+\gamma=0$.

$M(2\,;-1)\in d\Leftrightarrow2-\beta+\gamma=0$ et $P(5\,;3)\in d\Leftrightarrow5+3\beta+\gamma=0$. Voilà donc notre système d'équations.

Le plus simple est d'exprimer une des inconnues à partir de la 1ère équation et de la remplacer dans la 2de (méthode dite de substitution) :

$\gamma=\beta-2$ est ce que donne la 1ère équation, la 2de devient $5+3\beta+\beta-2=0$ ce qui permet de déterminer β :

$5+3\beta+\beta-2=0\Leftrightarrow4\beta=-3\Leftrightarrow\beta=\frac{-3}{4}=-0{,}75$.

Il ne reste plus qu'à calculer γ : $\gamma=\beta-2=-0{,}75-2=-2{,}75$.
L'équation de d est $x-0{,}75y-2{,}75=0$.

D'une façon générale, déterminer une équation cartésienne de la droite (MP) avec $M(x_M\,;\,y_M)$ et $P(x_P\,;\,y_P)$.

Ce que nous venons de faire se généralise : $M(x_M\,;y_M)\in d\Leftrightarrow x_M+\beta y_M+\gamma=0$ et donc $\gamma=-x_M-\beta y_M$.

$P(x_P ; y_P) \in d \Leftrightarrow x_P + \beta\, y_P + \gamma = 0$ et, en remplaçant γ, on obtient $x_P + \beta\, y_P - x_M - \beta\, y_M = 0$, soit $x_P - x_M + \beta(y_P - y_M) = 0$ et donc on peut déterminer β : $\beta = \frac{-x_P + x_M}{y_P - y_M} = -\frac{x_P - x_M}{y_P - y_M}$.

Remplaçons cette expression dans $\gamma = -x_M - \beta\, y_M$ pour déterminer γ :

$$\gamma = -x_M + \frac{x_P - x_M}{y_P - y_M}\, y_M = \frac{-x_M(y_P - y_M) + y_M(x_P - x_M)}{y_P - y_M} = \frac{-x_M\, y_P + y_M\, x_P}{y_P - y_M}$$

Vérifions nos formules avec les données de l'exemple précédent : on a $M(2\,;-1)$ et $P(5\,;3)$

$$\beta = -\frac{x_P - x_M}{y_P - y_M} = -\frac{5-2}{3+1} = -\frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{-x_M\, y_P + y_M\, x_P}{y_P - y_M} = \frac{-2\times 3 + (-1)\times 5}{3+1} = \frac{-11}{4} = -2{,}75$$

Le résultat correspond a ce qu'on a trouvé ; les formules permettent ainsi de trouver rapidement l'équation d'une droite dont on connaît deux points. Ces formules constituent un algorithme qui se programme : le programme demande d'entrer les quatre coordonnées et affiche en sortie les coefficients β et γ (α=1).

2. Droites parallèles et demi-plan

a) Deux droites D et D' d'équations réduites $D : y=ax+b$ et $D' : y=a'x+b'$ sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur (ssi $a=a'$). Montrer cela.

Pour montrer que deux droites sont parallèles, on peut rappeler que le coefficient directeur donne la tangente de l'angle que fait la droite avec l'axe des abscisses. Deux droites parallèles déterminent le même angle avec l'axe des abscisses. Les tangentes de ces angles égaux sont égales, elles ont donc même coefficient directeur, et réciproquement.

Une autre façon de montrer cela est de dire que deux droites parallèles n'ont pas de point d'intersection. Or, les coordonnées du point d'intersection se trouvent en résolvant le système constitué par les équations $y=ax+b$ et $y=a'x+b'$.

L'abscisse du point d'intersection doit vérifier l'égalité $ax+b = a'x+b'$, soit $x(a-a')=b'-b$. Cette égalité est toujours vraie (0=0) quand $b'-b=0$ et $a-a'=0$ (soit $b=b'$ et $a=a'$), les deux droites sont alors confondues (donc parallèles). Elle est toujours fausse quand $b'-b\neq 0$ et $a-a'=0$ (soit $b\neq b'$ et a=a'), on obtiendra par exemple 0=1. Il n'y a pas alors de point d'intersection, les deux droites étant parallèles et disjointes.

Quelle est l'équation cartésienne de la parallèle à D : $2x+3y+5=0$ passant par $M(2\,;-1)$?

Comme cette parallèle a même coefficient directeur que D, rappelons l'équation réduite de D : $y = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3}$ (voir plus haut). L'équation de la droite cherchée, notons la d', est $y = \frac{-2}{3}x + b$ où b est tel que $M(2\,;-1) \in d'$. Donc $-1 = \frac{-2}{3}\times 2 + b \Leftrightarrow b = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$. Tiens, on retrouve l'ordonnée à l'origine de D !

C'est normal, la droite D passe par M... Il n'y avait pas besoin de faire tout cela.

Une droite D d'équation cartésienne $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ étant donnée, les droites d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma'=0$ sont parallèles à D. Selon la valeur de γ', les points $M(x;y)$ vérifiant $\alpha x+\beta y+\gamma'=0$ se situent d'un côté ou de l'autre de D.

<u>Exemple n°3 (suite)</u> : Déterminer la valeur de γ' pour les droites d_A, d_B, d_C, et d_D parallèles à (MP) passant par $A(1\,;0)$, $B(0\,;1)$, $C(3\,;-2)$ et $D(4\,;-3)$.

On a vu que l'équation cartésienne de (MP) qui a pour coefficient α=1 est $x - 0{,}75\,y - 2{,}75 = 0$.

Pour la droite d_A passant par $A(1\,;0)$, on a $x - 0{,}75\,y + \gamma = 0$ avec γ vérifiant $1+\gamma=0$ (car $A \in d_A$) donc $\gamma=-1$ et l'équation de d_A est : $x - 0{,}75\,y - 1 = 0$.

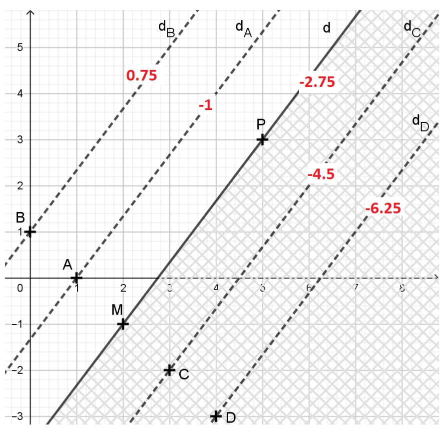
Déterminons la valeur de γ dans le cas général d'une droite d'équation $x - 0{,}75\,y + \gamma = 0$ passant par $M(x;y)$:

$$\gamma = -x + 0{,}75\,y$$

Si $M=B$, on a $\gamma = 0{,}75$ donc d_B : $x - 0{,}75\,y + 0{,}75 = 0$.

Si $M=C$, on a $\gamma = -3 + 0{,}75\times(-2) = -4{,}5$ et d_C : $x - 0{,}75\,y - 4{,}5 = 0$.

Si $M=D$, on a $\gamma = -4 + 0{,}75\times(-3) = -6{,}25$ et d_B : $x - 0{,}75\,y - 6{,}25 = 0$.



En déduire la relation vérifiée par les points du demi-plan hachuré (contenant C et D) :

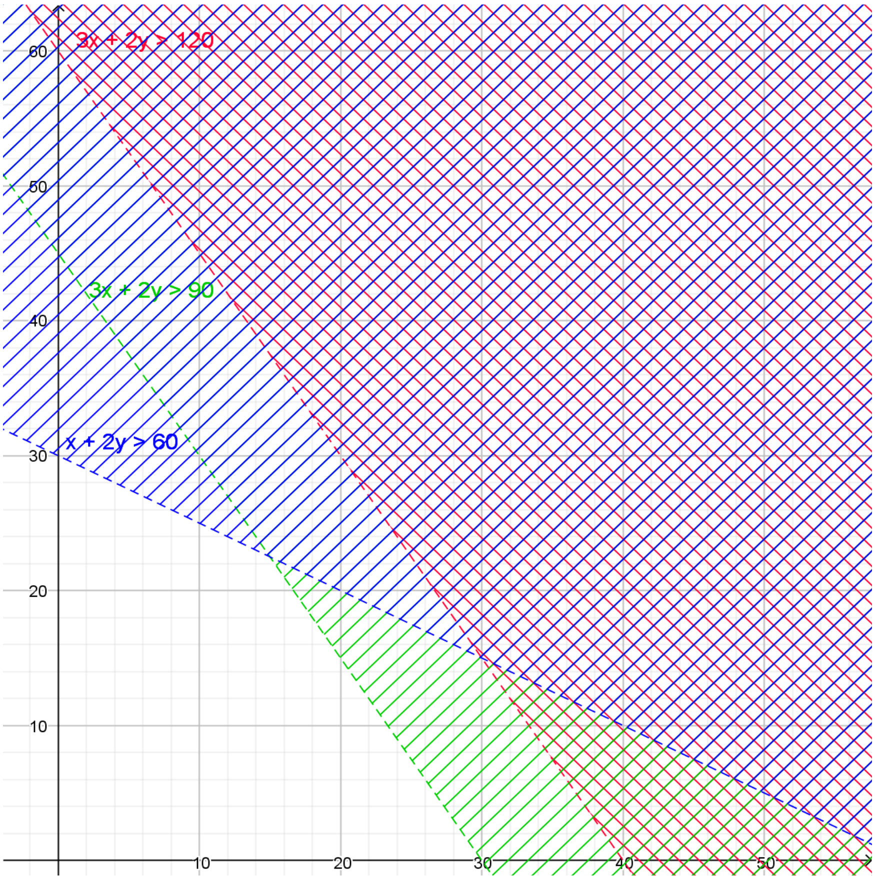
Dans cette zone du plan (un demi-plan) tous les points sont caractérisés par $\gamma < -2{,}75$. Dans l'autre demi-plan (celui contenant les points A et B, on a $\gamma > -2{,}75$.

D'une façon générale, un droite d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ partage le plan en deux demi-plans d'équations $\alpha x+\beta y+\gamma>0$ et $\alpha x+\beta y+\gamma<0$. Une façon pratique de savoir lequel des demi-plans correspond à < et lequel correspond à > consiste à chercher dans quel des demi-plans se trouve l'origine $O(0;0)$. Par exemple, la droite (*MP*) d'équation $x-0{,}75y-2{,}75=0$ partage le plan en deux parties ; celle qui contient l'origine correspond à l'équation $x-0{,}75y-2{,}75<0$. Dans ce demi-plan, si un point se trouve sur une droite d' équation $x-0{,}75y+\gamma=0$, on a $x-0{,}75y=-\gamma$ et donc $-\gamma-2{,}75<0$, soit $\gamma>-2{,}75$.

b) Application :
Un directeur de zoo veut nourrir ses animaux au moindre coût en leur apportant cependant un *minimum* journalier de 120 kg de protides, 90 kg de lipides et 60 kg de glucides. Deux aliments A et B tout préparés lui sont proposés sur le marché. Leurs caractéristiques sont donnés dans le tableau suivant :

	protides	lipides	glucides	Prix
1 sac de l'aliment A contient	3 kg	3 kg	1 kg	4 €
1 sac de l'aliment B contient	2 kg	2 kg	2 kg	2 €

On note x le nombre de sacs de A et y le nombre de sacs de B.
i) Établir le système des contraintes que doivent vérifier les variables x et y (cinq inéquations à écrire).
Pour les protides, on doit avoir $3x+2y\geq 120$.
Pour les lipides, on doit avoir $3x+2y\geq 90$.
Pour les glucides, on doit avoir $x+2y\geq 60$.
On peut remarquer que si $3x+2y\geq 120$, alors $3x+2y\geq 90$ et donc la contrainte sur les lipides est forcément respectée quand celle des protides l'est. Il faut ajouter à ces inéquations la contrainte numérique qui oblige à ce que x et y soient positifs. Le système des contraintes se limite a quatre inéquations : $x\geq 0$, $y\geq 0$, $3x+2y\geq 120$ et $x+2y\geq 60$.



ii) Dans le repère orthonormé ci-dessous, représenter les droites qui matérialisent les limites de la zone où sont respectées les contraintes.
iii) Griser la zone où sont respectées les contraintes (on utilisera un raisonnement basé sur les observations de la question a)
La droite $3x+2y=120$ est en rouge et j'ai hachuré en rouge le demi-plan où $3x+2y\geq 120$ (l'origine n'en fait pas partie puisque $3x+2y=0<120$ lorsque x=0 et y=0).
La droite $x+2y=60$ est en bleu et j'ai hachuré en bleu le demi-plan où $x+2y\geq 60$ (l'origine n'en fait pas partie).
Pour être complet, j'ai fait de même pour la contrainte inutile $3x+2y\geq 90$ que j'ai représenté en vert.
Je n'ai pas tracé ni hachuré le domaine où $x\geq 0$ et $y\geq 0$ car il s'agit du 1er quadrant, celui qui est représenté sur la figure (au-dessus de l'axe des abscisses qui a pour équation y=0 et à droite de l'axe des ordonnées qui a pour équation x=0). Les solutions doivent être dans ce quadrant.
La zone qui respecte l'ensemble des contraintes est celle qui a été hachurée en bleu **et** en rouge et qui se situe dans le 1er quadrant.

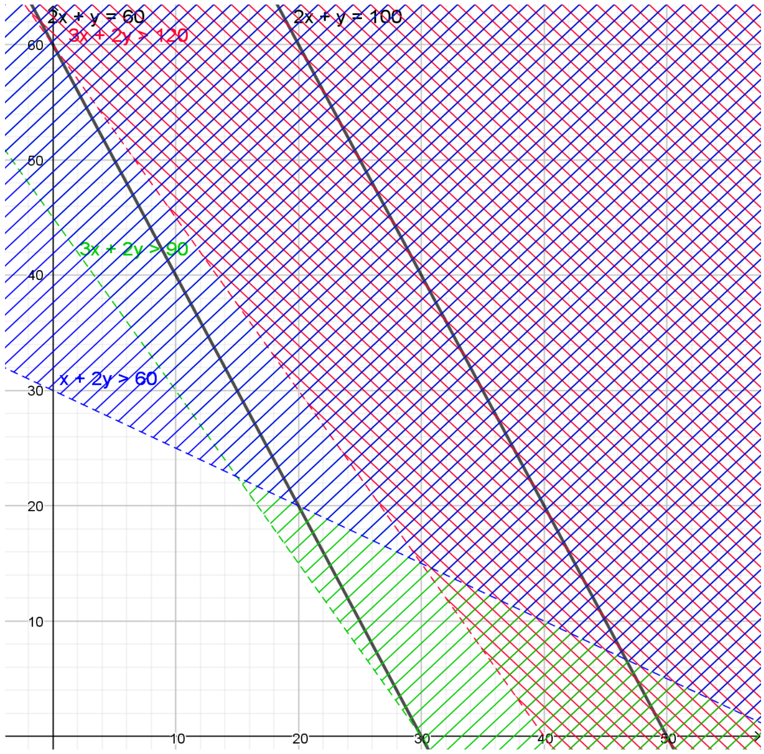
iv) Déterminer le coût $C(x,y)$ de x sacs de A et y sacs de B.
Tracer dans le repère, la droite d'équation $C(x,y)$=200 €. Peut-on répondre aux contraintes avec 200 € ? Si oui, combien valent x et y ? Mêmes questions pour 120 €. Déterminer alors, graphiquement, le coût minimum journalier qui respecte les contraintes ainsi que les valeurs x et y correspondantes.
Le coût des sacs, en euros, est donné par l'expression $C(x,y)=4x+2y$.

Peut-on répondre aux contraintes avec 200 € ? Autrement dit, l'inéquation $4x+2y=200$ a t-elle des solutions qui respectent les contraintes.

Je trace, en noir, la droite d'équation $4x+2y=200$ simplifiée en $2x+y=100$ et je regarde si elle traverse la zone où les contraintes sont respectées. Oui, elle la traverse. Il y a de multiples solutions, par exemple le point de coordonnées (40;20).

Je trace aussi la droite d'équation $4x+2y=120$ simplifiée en $2x+y=60$ qui correspond a un coût égal à 120 €. Cette 2ème droite de coût est à gauche de la 1ère, et elle ne coupe le domaine des solutions qu'en un point : le point de coordonnées (0;60).

On comprend que toutes les droites de coût sont parallèles et que celle qui correspond au coût minimum est la droite $4x+2y=120$ puisque si on diminue encore le coût, on ne va plus avoir de solution qui respecte les contraintes. La solution la plus économique est donc de prendre 0 sac d'aliment A et 60 sacs d'aliment B. On paiera 120 € et on aura 120 kg de protides, 120 kg de lipides et 120 kg de glucides.



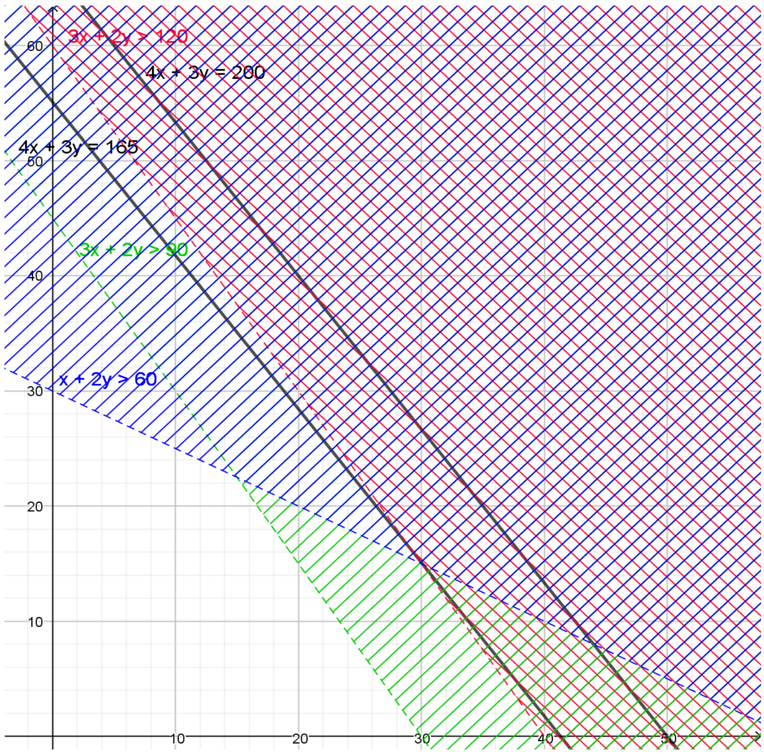
Remarque : Cette solution dépend des paramètres. Imaginons que le prix du sac d'aliment B augmente et passe à 3 € (au lieu de 2) dans que l'aliment A ne change ses prix.

Dans ce cas les droites de coût ont une pente différente. J'ai tracé celle qui correspond à un coût de 200 €. Il y a encore beaucoup de solutions comme par exemple le point de coordonnées (20;40).

On peut baisser le coût journalier en restant dans la zone des contraintes jusqu'à une limite qui correspond au point de coordonnées (30;15) où se croisent les deux droites de contraintes. Pour trouver le coût journalier minimum, il faut alors chercher l'équation de la droite de coût qui passe par ce point :

$4x+3y=C_{mini}$ avec le point $M(30;15)$ sur la droite, ce qui conduit à

$$C_{mini}=4\times30+3\times15=165$$



Le coût minimum qui respecte alors les contraintes est 165 € pour 30 sacs de A et 15 sacs de B et on aura 120 kg de protides, 120 kg de lipides et seulement 60 kg de glucides (mais cela suffit).