1) Ensembles de nombres

a) Déterminer les ensembles de définition D_1 et D_2 des fonctions :

$f_1 : x \mapsto \sqrt{(2-3x)(x-1)}$ $f_2 : x \mapsto \frac{x}{2-3x}-\frac{3}{x-1}$

Pour f_1, on doit avoir $2-3x\geq 0$ et $x-1\geq 0$ ou bien $2-3x\leq 0$ et $x-1\leq 0$ (les inégalités sont larges car on peut prendre la racine carrée de 0). On pourrait faire un tableau de signes (comme on a fait en cours), mais cela équivaut à avoir, soit $x\leq\frac{2}{3}$ et $x\geq 1$ ce qui est impossible, soit $x\geq\frac{2}{3}$ et $x\leq 1$ ce qui équivaut à $\frac{2}{3}\leq x\leq 1$.

On en déduit qu'il faut choisir x dans $D_1=[\frac{2}{3};1]$.

Pour f_2, on doit avoir $2-3x\neq 0$ et $x-1\neq 0$ (on ne peut pas diviser par 0), donc il faut avoir $x\neq\frac{2}{3}$ et $x\neq 1$.

Par conséquent, il faut choisir x dans $D_2=\mathbb{R}-\{\frac{2}{3};1\}$.

b) Simplifier les écritures des ensembles $E=]-\infty;1]\cap]\sqrt{2}-1;+\infty[$ et $F=[\sqrt{2}-1;1]\cup[2-\sqrt{2};5-3\sqrt{2}]$.

$E=]\sqrt{2}-1\ ;\ 1]$

$F=[\sqrt{2}-1;1]$, car le second intervalle est inclus dans le premier, les nombres en cause étant rangés dans l'ordre suivant : $\sqrt{2}-1<2-\sqrt{2}<5-3\sqrt{2}<1$ (valeurs arrondies au millième : $0{,}414<0{,}586<0{,}757<1$).

c) Écrire, en extension, les ensembles $G=\mathbb{Z}\cap[-5;5]$ et $H=\{x\in\mathbb{Z}\,/\,\exists n\in\mathbb{N}, x=8n+1 \text{ et } 80<x<120\}$.

$G=\{-5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$

$H=\{81;\ 89;\ 97;\ 105;\ 113\}$

d) Écrire sous la forme d'intervalle ou de la réunion d'intervalles : $\mathbb{R}-[0;10]$ et $\mathbb{R}-\{0;10\}$.

Dire si les affirmations suivantes sont vraie ou fausse : $[0;10]\subset\mathbb{N}$; $\{0;10\}\subset\mathbb{N}$.

$\mathbb{R}-[0\ ;\ 10]=]-\infty\ ;\ 0[\cup]10\ ;\ +\infty[$

$\mathbb{R}-\{0\ ;\ 10\}=]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ 10[\cup]10\ ;\ +\infty[$

$[0;10]\subset\mathbb{N}$ est faux (il s'agit d'un intervalle contenant des nombres réels dont la plupart ne sont pas entiers).

$\{0;10\}\subset\mathbb{N}$ est vrai (il s'agit d'un ensemble contenant deux nombres entiers).

e) Sachant que $a\in\mathbb{Q}\cap]\frac{1}{5};\frac{1}{4}[$ et $b\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\cap]\frac{1}{5};\frac{1}{4}[$, on donne les écritures décimales illimitées suivantes :

0,2131313131313131313131313131313...(1 et 3 se suivent alternativement)

0,2131131113111131111131111113...(une suite d'un nombre croissant de chiffre 1 alterne avec le chiffre 3)

Identifier lequel de ces nombres est a et lequel est b (justifier) puis écrire a sous la forme d'une fraction.

a=0,2131313131313131313131313131313...=0,2$\overline{13}$.

Pour écrire a sous forme d'une fraction, comme il y a deux chiffres qui se répètent calculons $100a-a=99a$. On a $100a=21{,}3\overline{13}$. Par soustraction, on trouve $100a-a=21{,}3-0{,}2=21{,}1$ et donc $99a=21{,}1$.

Finalement, $a=21{,}1/99=211/990$.

b=0,2131131113111131111131111113... (il s'agit d'un irrationnel, la suite des décimales n'étant pas périodique).

2) Fonction définie algébriquement

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-6x+8$.

a) Déterminer les images par f de -2 et de 2. Déterminer le ou les antécédent(s) par f de 8.

$f(-2)=(-2)^2-6\times(-2)+8=4+12+8=24$; $f(2)=2^2-6\times 2+8=4-12+8=0$.

$f(x)=x^2-6x+8=8$ revient à $x^2-6x=x(x-6)=0$ et donc, il y a deux solutions, deux antécédents pour 0 par f qui sont $x=0$ et $x=6$.

b) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x)=(x-a)^2+b$, où a et b sont des nombres à déterminer.

$f(x)=x^2-6x+8=(x^2-2\times 3\times x+3^2)-3^2+8=(x-3)^2-9+8=(x-3)^2-1$. On a donc $a=3$ et $b=-1$.

Au passage, on peut remarquer que cette forme permet de factoriser :

$f(x)=(x-3)^2-1=(x-3-1)(x-3+1)=(x-4)(x-2)$, mais ce n'était pas demandé.

c) À l'aide de cette expression, montrer que f admet un extremum sur $\mathbb{R}$

(préciser le type d'extremum, sa valeur et celle de x pour lequel il est atteint)

$\forall x\in\mathbb{R}, (x-3)^2\geq 0$, l'égalité étant atteinte pour $x-3=0$, soit pour $x=3$.

Ceci équivaut à $\forall x\in\mathbb{R}, (x-3)^2-1\geq -1$, soit $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq -1$.

La fonction f admet un minimum -1 atteint pour $x=3$.

d) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[a;+\infty[$.

Le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est :

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-3)^2-1-((x_1-3)^2-1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-3)^2-(x_1-3)^2}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-3-(x_1-3))(x_2-3+(x_1-3))}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1-6)}{x_2-x_1}=x_2+x_1-6$.

Sur l'intervalle $[3;+\infty[$, on a $x_1>3$ et $x_2>3$, soit $x_1-3>0$ et $x_2-3>0$. En additionnant ces deux nombres positifs ont obtient donc $(x_1-3)+(x_2-3)>0$, soit $x_1+x_2-6>0$.

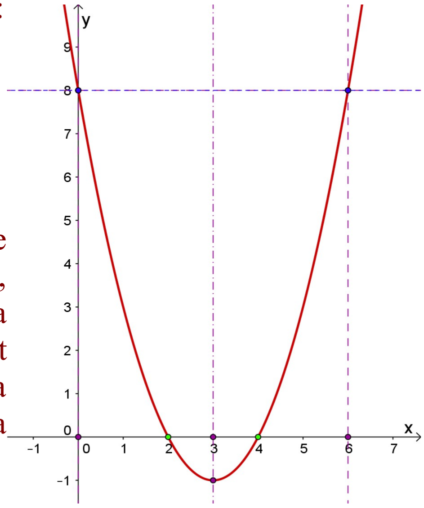
Le taux de variation restant positif, la fonction *f* est croissante sur cet intervalle.

Par un même raisonnement, on montrerait que *f* est décroissante sur $]-\infty;3]$

e) Dresser le tableau de variation de *f* sur ℝ puis tracer une courbe représentant *f* sur $[0;6]$.

D'après ce qui précède, le tableau de variation de la fonction *f* est le suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

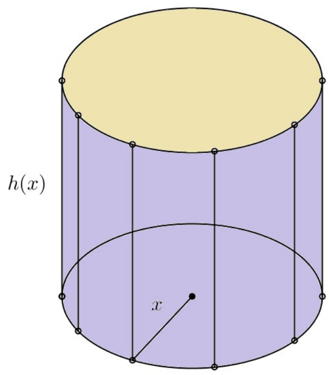


La courbe de cette fonction est une parabole. Elle passe par les points de coordonnées (-2 ; 24) mais ce point n'est pas dans la fenêtre d'affichage, (0 ; 8), (2 ; 0), (3 ; -1), (4 ; 0) et (6 ; 8). Elle est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation *x*=3. Tout cela n'était pas demandé, on voulait juste la courbe qui a été tracée à gauche (logiciel utilisé : GeoGebra). Sur la copie, on pouvait se contenter de placer les points donnés et de tracer la courbe en joignant, d'un trait courbe (pas de segments), ces points.

3) <u>Fonction définie par une situation géométrique</u>

On fabrique une boîte cylindrique de rayon *x*, de manière à avoir une aire des parois (les deux bases et la face latérale) constante, égale à 1 dm^2.

a) Montrer* que la hauteur de la boîte dépend de *x* de la façon suivante $h(x)=\frac{1}{2\pi x}-x$ et que le volume de la boîte s'écrit alors $V(x)=\frac{x}{2}-\pi x^3$.



L'aire du cylindre de rayon *x* et de hauteur *h* est $A=2\pi x^2+h\times 2\pi x$ (le premier terme correspond aux deux bases, le second à l'aire latérale qui est un rectangle de côtés *h* et $2\pi x$).

Comme *A*=1, on obtient $1-2\pi x^2=h\times 2\pi x$, d'où $h=\frac{1-2\pi x^2}{2\pi x}=\frac{1}{2\pi x}-\frac{2\pi x^2}{2\pi x}=\frac{1}{2\pi x}-x$.

Le volume de la boîte est égal à $h\pi x^2=\left(\frac{1}{2\pi x}-x\right)\pi x^2=\frac{\pi x^2}{2\pi x}-x(\pi x^2)=\frac{x}{2}-\pi x^3$.

b) Déterminer l'intervalle *I* dans lequel ces fonctions prennent leurs valeurs.

Ces fonctions sont définies pour *x*≥0 car *x* est une longueur et pour *h*≥0 car *h* est aussi une longueur. Donc $\frac{1}{2\pi x}-x\geq 0$, ce qui s'écrit $\frac{1-2\pi x^2}{2\pi x}\geq 0$. Comme *x*≥0, le dénominateur est positif. Pour que *h*≥0, il faut que $1-2\pi x^2\geq 0$ c'est-à-dire $x^2\leq\frac{1}{2\pi}$ et donc $x\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

La plus grande valeur que peut prendre *x* est $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0{,}399$.

On pouvait trouver cette valeur en cherchant le rayon *x* maximum (lorsque *h*=0) car l'aire est toute entière dans les deux bases et donc on a $2\pi x^2=1$, ce qui conduit à $x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

L'intervalle *I* est donc [0 ; $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$].

c) Donner un tableau de valeurs pour la fonction V

(prendre pour cela une dizaine de valeurs de *x* régulièrement espacées dans l'intervalle *I*).

x	0	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2	0,24	0,28	0,32	0,36	0,4
$V(x)=x/2-\pi x^3$	0	0,0198	0,0384	0,0546	0,0671	0,0749	0,0766	0,0710	0,0571	0,0334	-0,0011

Pour que ce soit régulier, on a pris un pas de 0,04, ce qui nous conduit à onze valeurs. La dernière (0,04) est en dehors de *I* de peu. On le voit à l'image qui est négative, ce qui ne se peut pas avec une longueur.

d) Montrer à l'aide de ce tableau, que la fonction *V* admet un maximum *M* sur *I* ?

Les volumes passent de 0 à 0 en restant, évidemment, toujours positifs. Obligatoirement, il doit y avoir un maximum. On voit que ce maximum est approximativement de 0,0766 cette valeur étant atteinte pour *x*=0,24 *dm*. En réalité, il faut rechercher ce maximum pour des valeurs de *x* dans l'intervalle [0,2;0,28].

e) En affinant un peu cette recherche, déterminer au *mm* près, la valeur x_0 de *x* qui permet d'atteindre ce maximum ?

Donner une valeur approchée de *M*= $V(x_0)$.

x	0,2	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,3
$V(x)=x/2-\pi x^3$	0,07	0,0759	0,0765	0,0768	0,0766	0,0759	0,0748	0,0732	0,0710	0,0684	0,0652

Pour déterminer au *mm* près, la valeur x_0 de x qui permet d'atteindre ce maximum, on a pris un pas de 0,01 (0,01 *dm*=1 *mm*). Le maximum, dans ce tableau, a été obtenu pour x=0,23 (bleuté). Si on veut affiner encore (ce n'était pas demandé), au dixième de *mm* près, la valeur la plus proche de x_0 est 23,0 *mm*.

x	0,226	0,227	0,228	0,229	0,230	0,231	0,232
$V(x)=x/2-\pi x^3$	0,076736	0,076753	0,076765	0,076773	0,0767762	0,0767755	0,076770

En première, vous verrez que la valeur x_0 cherchée annule $\frac{1}{2}-3\pi x^2$.

Cela conduit à la valeur exacte, qui est un nombre irrationnel, $x_0=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\approx 0{,}230329433\ dm$.

Le maximum du volume de la boîte est

$M=V(x_0)\approx\frac{0{,}23}{2}-\pi(0{,}23)^3\approx 0{,}076776\ dm^3$.

<u>Pour information</u> : voici à droite, les courbes de ces fonctions V et h.

La hauteur correspondant au maximum du volume est égale à $h\approx\frac{1}{2\pi\times 0{,}23}-0{,}23\approx 0{,}46$, soit 46 *mm*.

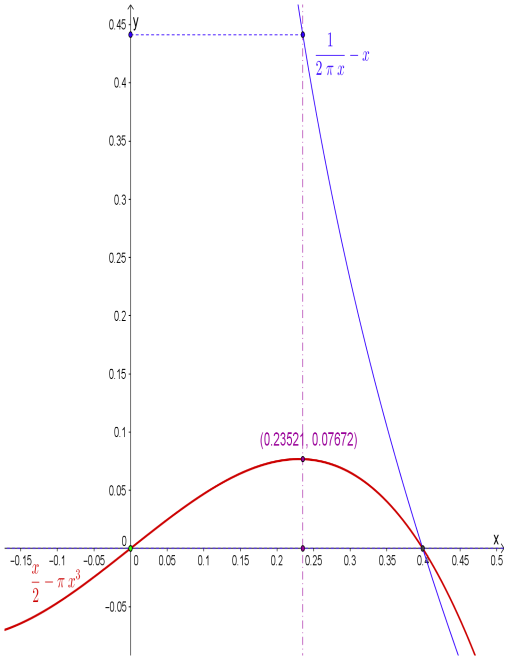
La valeur exacte est $h=\frac{\sqrt{6\pi}}{2\pi}-\frac{1}{\sqrt{6\pi}}=\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{\pi}}\approx 0{,}460658866\ dm$.

Tant qu'on y est, le rapport *hauteur*/*rayon* est égal à

$\frac{h}{x}=\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{\pi}}\div\frac{1}{\sqrt{6\pi}}=\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{\pi}}\times\sqrt{6\pi}=2$!

Autrement dit, pour une boîte cylindrique dont l'aire des parois est constante, le maximum du volume est atteint lorsque le diamètre et la hauteur sont égaux.

Ce problème a une utilité économique et écologique, par exemple dans la réalisation de boîtes de conserve, canettes, etc. Le matériau des parois ayant un coût, si on veut minimiser ce coût, il faut maximiser le volume contenu par une certaine unité d'aire...



4) <u>Fonction définie par un algorithme</u>

La fonction F est définie sur $\mathbb{N}$ par l'algorithme suivant :

Algorithme
P=2 Saisir N Pour I allant de 1 à N P=P×(2I)×(2I)÷(2I-1)÷(2I+1) Fin de boucle Afficher P

a) Comment faut-il comprendre l'instruction

P=P×(2I)×(2I)÷(2I-1)÷(2I+1) écrite dans l'algorithme ?

Cette instruction est une affectation : on utilise l'ancienne valeur de P pour calculer la quantité P×(2I)×(2I)÷(2I-1)÷(2I+1). Une fois calculée, on l'affecte à la mémoire P, écrasant l'ancienne valeur avec cette nouvelle valeur.

b) Lorsqu'on saisit N=0, cet algorithme affiche un nombre noté F(0).

Lorsqu'on saisit N=1 et N=2, les nombres affichés sont F(1) et F(2).

D'un façon générale, lorsqu'on saisit N, l'algorithme affiche F(N).

Déterminer les valeurs exactes de F(0), F(1) et F(2).

$F(0)=2$ car on n'entre pas dans la boucle lorsque N=0. La valeur de P affichée est la valeur d'initialisation.

$F(1)=2\times\frac{2\times 2}{(2-1)\times(2+1)}=2\times\frac{4}{1\times(3)}=\frac{8}{3}\approx 2{,}666\ldots$, on entre une fois dans la boucle (avec I=1) pour N=1.

$F(2)=2\times\frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}=2\times\frac{4}{3}\times\frac{16}{15}=\frac{128}{45}\approx 2{,}8444\ldots$, on entre deux fois dans la boucle (I=1 puis I=2) pour N=2.

c) Traduire cet algorithme dans le langage de votre calculatrice (écrire le programme sur la copie), puis le programmer sur la calculatrice.

Algorithme	Casio	TI
P=2 Saisir N Pour I allant de 1 à N P=P×(2I)×(2I)÷(2I-1)÷(2I+1) Fin de boucle Afficher P	2→P ?→N For 1→I To N P×(2I)×(2I)÷(2I-1)÷(2I+1)→ P Next P◢	2→P Input N For (I,1,N) P×(2I)×(2I)÷(2I-1)÷(2I+1)→ P End Disp P

d) Tester le programme sur les valeurs N=0, N=1 et N=2 ; puis compléter le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	5	10	20	50	100	1000
$F(n)$	2	2.666	2.844	3.002	3.067	3.103	3.126	3.133	3.140

e) Modifier le programme pour qu'il détermine la 1ère valeur de N pour laquelle π-F(N)<0,01 (écrire le programme sur la copie). Déterminer cette valeur de N.

Il faut utiliser une boucle « Tant que » pour atteindre ce but.

Algorithme	Casio	TI
P=2 I=0 Tant que π-P≥0,01 I=I+1 P=P×(2I)×(2I)÷(2I-1)÷(2I+1) Fin de boucle Afficher I	2→P 0→I While π-P≥0,01 I+1→I P×(2I)×(2I)÷(2I-1)÷(2I+1)→ P End I◢	2→P 0→I While π-P≥0,01 I+1→I P×(2I)×(2I)÷(2I-1)÷(2I+1)→ P End Disp I

NB : le nombre π est celui que l'on connaît, que la calculatrice connaît, dont la valeur est 3,141592654 environ. Cet algorithme est destiné à calculer une valeur approchée de π, selon la formule due à Wallis (1655), une des premières qui donne π. Son inconvénient est de donner très très lentement de nouvelles décimales. Ici, la question porte sur ce point.

Pour que π-F(N)<0,01, on trouve que N=78.

On a F(78)≈3.131603563 et π-F(78)≈0.009989089<0,01

<u>Pour information</u> : On peut utiliser ce dernier programme pour constater la lenteur de cette formule pour donner de meilleures approximations de π.

Pour que π-F(N)<0,001, on trouve que N=785.

On a F(785)≈3.14059294 et π-F(785)≈0.00099971<0,001

Pour que π-F(N)<0,0001, on trouve que N=7854.

On a F(7854)≈3.14149266 et π-F(7854)≈0.0000999918<0,0001

Pour que π-F(N)<0,00001, on trouve que N=78540.

On a F(78540)≈3.141582653 et π-F(78540)≈0.000009999897<0,00001

Pour que π-F(N)<0,000001, on trouve que N=785397.

On a F(785397)≈3.14159165359 et π-F(785397)≈0.00000099999962<0,000001

En gros, il faut multiplier par dix le nombre de valeurs pour gagner un seul chiffre de précision.

On peut remarquer que le calcul ne se fait pas avec les valeurs exactes, ce qui peut poser, au bout d'un certain moment des problèmes, car les erreurs dues aux arrondis prennent de plus en plus de poids. Si on devait calculer, ne serait-ce que F(78)≈3.1316035636209354, sans simplification, le numérateur est égal à :

2342775144037985982309467034536967663319730552047143948774435467386023048228786667838968851827859580
9869779827083721410953940729120797555493926361759484803055217829537109601934755867951162090526438870
239466976097680047412906091298859612372992000000000000000000000000000000000000

et le dénominateur à :

7481071905950759083944557298950593025253061307561251739998906597011965050368760724791823184074876777
0622279394982717547606659808597041550233358659085891232059974516118865692071018486246439724398136454
41534692134008765950661525172353718086486982617834655684418976306915283203125

Je vous laisse imaginer la dimension des numérateurs et dénominateur de F(785397)...