Bon courage ! Gérez bien votre temps (durée :2h). Barème : 5 pts par partie

1) Ensembles de nombres

a) Déterminer les ensembles de définition D_1 et D_2 des fonctions f_1 et f_2 :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{(1-2x)(x-2)} \qquad f_2 : x \mapsto \frac{x}{1-2x}-\frac{3}{x-2}$$

Pour f_1, on doit avoir $1-2x\geq 0$ et $x-2\geq 0$ ou bien $1-2x\leq 0$ et $x-2\leq 0$ (les inégalités sont larges car on peut prendre la racine carrée de 0). On pourrait faire un tableau de signes (comme on a fait en cours), mais il n'est pas obligatoire. On doit donc avoir, soit $x\leq\frac{1}{2}$ et $x\geq 2$ ce qui est impossible, soit $x\geq\frac{1}{2}$ et $x\leq 2$ ce qui équivaut à $\frac{1}{2}\leq x\leq 2$. On en déduit qu'il faut choisir x dans $D_1=[\frac{1}{2};2]$.

Pour f_2, on doit avoir $1-2x\neq 0$ et $x-2\neq 0$ (on ne peut pas diviser par 0), donc il faut avoir $x\neq\frac{1}{2}$ et $x\neq 2$. Par conséquent, il faut choisir x dans $D_2=\mathbb{R}-\{\frac{1}{2};2\}=]-\infty;\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2};2[\cup]2;+\infty[$ (notations équivalentes).

b) Simplifier les écritures des ensembles $E=]-\infty;\sqrt{2}]\cap[1;+\infty[$ et $F=[\sqrt{2}-1;\sqrt{2}+1]\cup[1;2\sqrt{2}]$.

$E=[1\ ;\sqrt{2}]$ car $\sqrt{2}>1$.

$F=[\sqrt{2}-1;2\sqrt{2}]$, les nombres en cause étant rangés dans l'ordre suivant :

$\sqrt{2}-1<1<\sqrt{2}+1<2\sqrt{2}$ (valeurs arrondies au millième : $0{,}414<1<1{,}414<2{,}828$)

c) Écrire, en extension, les ensembles $G=\mathbb{Z}\cap]-3;4]$ et $H=\{x\in\mathbb{Z}/\exists n\in\mathbb{N}, x=4n+3 \text{ et } 0\leq x\leq 20\}$.

$G=\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ (on prend les entiers entre -3 exclu et 4 inclus).

$H=\{3;\ 7;\ 11;\ 15;\ 19\}$ (on prend les entiers qui, divisés par 4, donnent un reste égal à 3, compris entre 0 et 4 inclus).

d) Écrire sous la forme d'intervalle ou de la réunion d'intervalles : $\mathbb{R}-[-1;1]$ et $\mathbb{R}-\{-1;1\}$.

Dire (*et justifier*) si les affirmations suivantes sont vraie ou fausse : $[-1;1]\subset\mathbb{N}$; $\{-1;1\}\subset\mathbb{N}$.

$\mathbb{R}-[-1\ ;\ 1]=]-\infty\ ;-1[\cup]1\ ;+\infty[$.

$\mathbb{R}-\{-1\ ;\ 1\}=]-\infty\ ;-1[\cup]-1\ ;\ 1[\cup]1\ ;+\infty[$.

$[-1;1]\subset\mathbb{N}$ est faux (il s'agit d'un intervalle contenant des nombres réels dont la plupart ne sont pas entiers).

$\{-1;1\}\subset\mathbb{N}$ est faux (il s'agit d'un ensemble contenant deux nombres entiers mais l'un d'eux n'est pas positif).

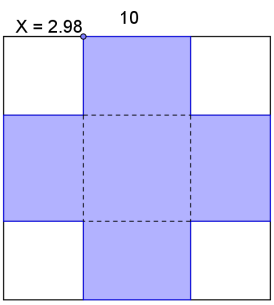
e) Voici l'écriture décimale illimitée du réel a : a = 0,2505050...(5 et 0 se suivent alternativement)

Expliquer pourquoi a appartient à $I=\mathbb{Q}\cap]\frac{1}{4};\frac{13}{50}[$. Déterminer l'écriture fractionnaire de a.

Ce nombre appartient à I car il est rationnel (son écriture décimale est périodique) et il est compris entre $\frac{1}{4}=0{,}25$ et $\frac{13}{50}=0{,}26$.

$a=0{,}2505050...=0{,}25\overline{05}$. Pour écrire a sous forme d'une fraction, comme il y a deux chiffres qui se répètent calculons $100a-a=99a$. On a $100a=25{,}05\overline{05}$. Par soustraction, on trouve $99a$=25,05-0,25=24,8 et donc $990a=248$. Finalement, $a=\frac{248}{990}=\frac{124}{495}$.

2) Fonction définie par une situation géométrique



On découpe les quatre coins d'une feuille carrée de côté 10 *cm*. Les découpes sont des carrés de côté x (voir schéma où x=2,98). La fonction A donne l'aire de la surface restante (grisée sur le schéma) tandis que la fonction V donne le volume de la boîte sans couvercle construite en pliant cette surface selon les pointillés.

a) Déterminer les expressions de $A(x)$ et de $V(x)$.

La longueur et la largeur de la boîte sont égalent (la base est un carré) et valent $10-2x$, la hauteur est x.

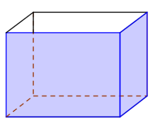
L'aire des cinq faces du patron est $A(x)=10^2-4\times x^2=100-4x^2$.

Le volume de la boîte est donc (volume d'un prisme=aire×hauteur) : $V(x)=(10-2x)^2\times x$.

b) Déterminer l'ensemble de définition D des fonctions A et V.

L'ensemble D de définition des fonctions est donné par les deux conditions sur les dimensions de la boîte qui sont des longueurs et donc, doivent être positives. On doit donc avoir $10-2x\geq 0$ et $x\geq 0$, la première condition étant équivalente à $x\leq 5$, cela revient à prendre x dans $D=[0;5]$.

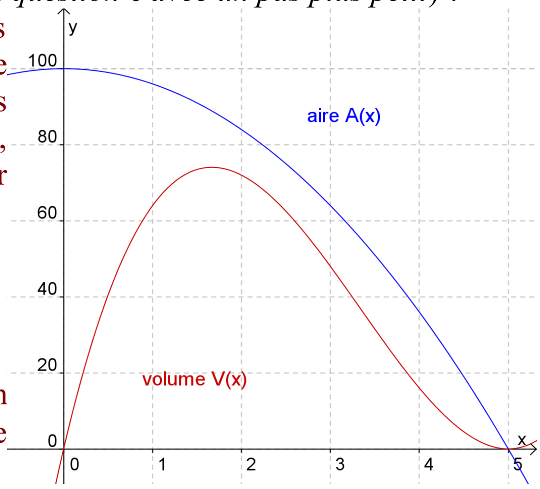
c) Donner un tableau de valeurs pour $V(x)$ (balayer l'intervalle D avec un pas de 0,5).



x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$V(x)=x(10-2x)^2$	0	40,5	64	73,5	72	62,5	48	31,5	16	4,5	0

d) Décrire, d'après le tableau de valeurs précédent, le comportement de la fonction V sur D.
Y a t-il, en particulier, un maximum V_{MAX} sur D ? Si oui, combien vaut-il approximativement et quelle valeur de x, au centième près, permet de l'atteindre (*reprendre si nécessaire la question* c *avec un pas plus petit*) ?

Il semble, d'après ce tableau de valeurs (ce n'était pas demandé, mais le graphique ci-contre le confirme), que la fonction V est croissante pour x compris entre 0 et une valeur x_0 environ égale à 1,5 puis décroissante jusqu'à x=5. On passe de $V(0)=0$ à une valeur maximum, puis on décroît jusqu'à $V(5)=0$. La valeur maximum V_{MAX} atteinte par $V(x)$ semble être supérieure à 73,5 cm^3.



La question attendait une précision du centième pour la valeur de x_0.

x	1,64	1,65	1,66	1,67	1,68	1,69
$V(x)$	74,060	74,069	74,073	74,074	74,071	74,063

D'après le tableau ci-dessus, ce maximum est atteint pour $x_0 \approx 1{,}67$ cm et vaut un peu plus de 74 cm^3. (pour info : la valeur exacte de $x_0=\frac{5}{3}=1{,}\overline{6}$ et le maximum est $V_{MAX}=74{,}\overline{074}$ cm^3).

3) Fonction définie par une situation algébriquement

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2x$.

a) Déterminer l'image par f de -1, de 0 et de 1. Déterminer le ou les antécédent(s) par f de 0.

$f(-1)=(-1)^2-2\times(-1)=1+2=3$; $f(0)=0^2-2\times 0=0+0=0$; $f(1)=1^2-2\times 1=1-2=-1$.

$f(x)=x^2-2\times x=0$ revient à $x^2-2\times x=x(x-2)=0$ et donc, il y a deux solutions, deux antécédents pour 0 par f qui sont $x=0$ et $x=2$.

b) Montrer que $f(x)=(x-1)^2-1$.

$f(x)=x^2-2\times x=(x^2-2\times x+1)-1=(x-1)^2-1$.

c) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[1;+\infty[$, puis sur $]-\infty;1]$.

Le taux de variation de f entre deux valeurs différentes x_1 et x_2 est :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-1)^2-1-((x_1-1)^2-1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-1)^2-(x_1-1)^2}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-1-(x_1-1))(x_2-1+(x_1-1))}{x_2-x_1}$$, d'où

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)}{x_2-x_1}=x_2+x_1-2.$$

Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, on a $x_1>1$ et $x_2>1$, donc $x_1-1>0$ et $x_2-1>0$ et, en additionnant ces deux nombres positifs ont obtient donc $(x_1-1)+(x_2-1)>0$, soit $x_1+x_2-2>0$. Le taux de variation restant positif, la fonction f est croissante sur cet intervalle.

Par un même raisonnement, on montre que f est décroissante sur $]-\infty;1]$

d) Montrer que f admet un minimum m sur $\mathbb{R}$. Pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint?

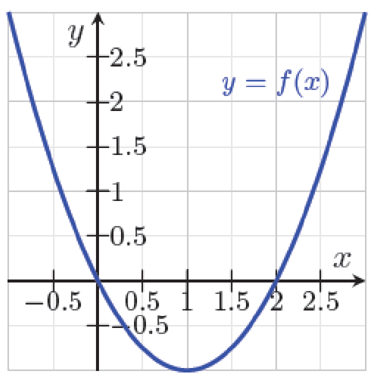
La fonction est décroissante jusqu'à x=1, puis croissante. Elle passe donc par un minimum égal à $f(1)=-1$.
On aurait pu montrer cela sans l'étude du sens de variation : $\forall\ x\in\mathbb{R}, (x-1)^2\geq 0$, l'égalité étant atteinte pour $x-1=0$, soit pour $x=1$. Par conséquent, $\forall\ x\in\mathbb{R}, (x-1)^2-1\geq -1$, c'est-à-dire $\forall\ x\in\mathbb{R}, f(x)\geq -1$.
La fonction f admet donc un minimum sur $\mathbb{R}$. Ce minimum est atteint pour $x=1$.

e) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$, puis tracer la courbe représentative de f pour $x\in[-1;3]$.

Le tableau de variation est tracé ci-contre et la courbe est à droite (0,5 point hors barème car on n'avait pas eu le temps de voir cela en cours).

NB : on peut utiliser la calculatrice graphique pour avoir l'allure de la courbe. Il faut alors régler la fenêtre d'affichage sur

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



les paramètres :
xmin=-1, xmax=3, ymin=-1, xmax=3
On pouvait aussi placer quelques points (on a déjà calculé les images de -1,0,1 et 2) et tracer la courbe qui passe par ces points (pas à la règle!).

4) <u>Fonction définie par un algorithme</u>

La fonction f est définie sur $\mathbb{N}$ par l'algorithme suivant qui :

$Y=0,7$
$A=2,9$
Saisir N
Pour I allant de 1 à N
    $Y=A\times Y\times(1-Y)$
Fin de la boucle « Pour »
Afficher Y

a) Comment appelle t-on une instruction comme $Y=A\times Y\times(1-Y)$?
Comment faut-il comprendre ce type d'égalité ?
Cette instruction est une affectation.
$A\times Y\times(1-Y)$ est calculé à partir de l'ancienne valeur de Y.
Le résultat de ce calcul est mis dans la mémoire Y : on écrase l'ancienne valeur de Y avec la nouvelle qu'on vient de calculer.

b) Lorsqu'on prend $N=0$ qu'affiche cet algorithme ? *(Expliquer)*
Si $N=0$, on n'entre pas dans la boucle.
L'algorithme affiche la valeur initiale de Y qui est 0,7.

Lorsqu'on prend $N=1$ qu'affiche cet algorithme ? *(Expliquer)*
Si $N=1$, on entre un seule fois dans la boucle et calcule : $2,9\times0,7\times(1-0,7)=0,609$
L'algorithme affiche la valeur finale de Y qui est 0,609.
Lorsqu'on prend $N=2$ qu'affiche cet algorithme ? *(Expliquer)*
Si $N=2$, on fait un 2$^{\text{ème}}$ tour de boucle et calcule : $2,9\times0,609\times(1-0,609)=0,6905451$
L'algorithme affiche la valeur finale de Y qui est 0,6905451 ou 0,690545 selon le nombre de chiffres affichés.

c) Traduire cet algorithme dans le langage de votre calculatrice (les utilisateurs de Numworks remplacerons « Saisir N » par « $N=3$ »).

Casio	TI	Numworks
0,7→Y 2,9→A ?→N For 1→I To N A×Y×(1-Y)→Y Next Y◢	0,7 $^{\text{STO}}$→Y 2,9 $^{\text{STO}}$→A Input N For (I,1,N) A×Y×(1-Y) $^{\text{STO}}$→A End Disp Y	y=0,7 a=2,9 n=3 [input non disponible] for i in range(n) : y=a×y×(1-y) print(y)

Avant de donner les résultats pour $n=3$, $n=4$ etc. vérifier que votre programme donne bien les valeurs déjà calculées (pour $n=0$, $n=1$ et $n=2$).

d) Compléter le tableau des valeurs de f suivant :

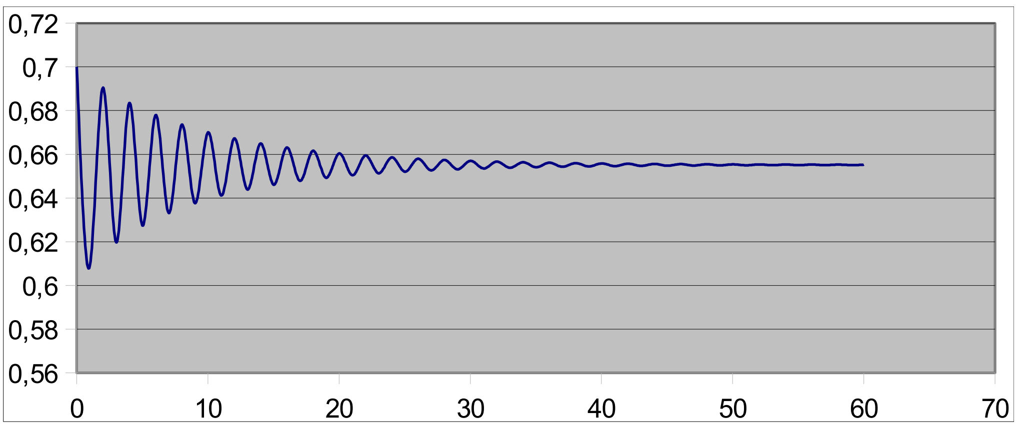
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	0,7	0,609	0,691	0,620	0,683	0,627	0,678	0,633	0,674

Nous donnons les résultats avec trois chiffres derrière la virgule, mais dès $n=2$ il y en a davantage.

e) Que peut-on dire de $f(n)$ quand n devient très grand ($n=10$, 100, 1000) ?
J'ai ajouté une autre valeur mais ma calculatrice prend beaucoup de temps pour la calculer et c'est la même que pour $n=1000$...pour les 10 chiffres qu'elle affiche du moins.

n	0	10	100	1 000	10 000
$u_a(n)$	0,7	0,6700497854	0,6551735620	0,6551724138	0,6551724138

Ce qui nous éclaire mieux sur le comportement de cette fonction est la courbe ci-dessous (réalisée au tableur) : on voit que celle-ci oscille mais finit par se stabiliser quand n augmente.
Cette fonction est une curiosité découverte par R.



May, G. Oster et J. Yorke. Citée dans "Le bizarre incident du chien pendant la nuit" de Mark Haddon, elle s'appelle la fonction logistique.

Bonus (2 pts) :

a) Simplifier le produit $P=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{2017}\right)$.

Avant tout, il faut mettre chacun des facteurs au même dénominateur, et c'est toujours : $1-\frac{1}{n}=\frac{n}{n}-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$.

$P=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{2017}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{2016}{2017}=\frac{1}{2017}$.

b) Quel est l'ensemble F des entiers n positifs inférieurs à 40 pour lesquels la fraction $P=\frac{15}{n+1}$ n'est pas irréductible ?

« n'est pas irréductible » équivaut à « est simplifiable ». Pour que P soit simplifiable, il faut que le numérateur et le dénominateur de cette fraction comporte un facteur différent de 1 au moins en commun. Or $15=3\times 5$, il faut donc que $n+1$ soit un multiple de 3 ou de 5. Autrement dit que n s'écrive $3k-1$ ou bien $5k-1$, k étant un entier quelconque.

Les multiples de 3 sont : $\{0, 3, 6, 9, \ldots\}$ donc les nombres de $\{2, 5, 8, \ldots\}$ (j'ai enlevé -1 qui n'est pas positif) conviennent pour F ; de même, les multiples de 5 sont : $\{0, 5, 10, 15, \ldots\}$ donc les nombres de $\{4, 9, 14, \ldots\}$ conviennent pour F. Finalement, en extension :

$F=\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38\}\cup\{4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39\}$, soit

$F=\{2, 4, 5, 9, 8, 11, 14, 17, 19, 20, 23, 24, 26, 29, 32, 34, 35, 38, 39\}$.

En compréhension, c'est plus facile mais c'est long tout de même et délicat car les parenthèses sont obligatoires du fait de la priorité du « et » sur le « ou » :

$F=\{\ x\in\mathbb{N}, \exists k\in\mathbb{N}, (x=3k-1 \text{ ou } x=5k-1) \text{ et } x<40\ \}$.