

Révisions de 2^{de}

Correction

le programme

1. Vecteurs et coordonnées
2. Géométrie classique (1 & 2)
3. Géométrie analytique (1 & 2)
4. Transformations algébriques (1 & 2)
5. Puissances et racines carrées (1 & 2)

*Voilà les corrections de ces 9 pages d'exercices de révisions et prolongements
Je n'ai pas pris le temps de vérifier si tout était bien en place mais cela devrait y être
Signalez moi les erreurs ou imperfections si vous en remarquez, cela me permettra de les corriger...*

*Si vous avez des questions précises, vous pouvez également m'envoyer un mail (ph.moutou@free.fr)
Tant que je suis disponible, si cela m'est possible, je peux encore essayer de vous aider par ce moyen.*

Un petit scoop pour finir : l'an prochain j'aurai une 1^{ère}S et donc certains d'entre vous parmi mes futurs élèves... Vous comprendrez que je ne vais pas continuer à retravailler mon cours de 2de (on en restera là pour les exercices de révision) mais vais plutôt chercher quelques sujets intéressants de TD et de DM...

Remarque préliminaire : on utilise souvent cette forme de la règle de Chasles $\vec{AB} = (\vec{CB} - \vec{CA})$, au lieu du classique $\vec{AB} = (\vec{AC} + \vec{CB})$ car cela simplifie le travail. Mais, on arrive bien sûr au même résultat avec la forme classique...

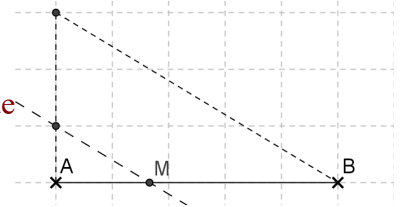
1) Position de point sur une droite

Soient A et B deux points du plan. Déterminer le réel x tel que $\vec{AM} = x \vec{AB}$ dans les cas suivants. En déduire la position précise du point M sur (AB) dans les deux cas.

a) $2 \vec{AM} + \vec{BM} = \vec{0}$. On a, successivement :

$$2 \vec{AM} + (\vec{AM} - \vec{AB}) = \vec{0} ; 3 \vec{AM} - \vec{AB} = \vec{0} ; 3 \vec{AM} = \vec{AB} ; \vec{AM} = \frac{1}{3} \vec{AB} .$$

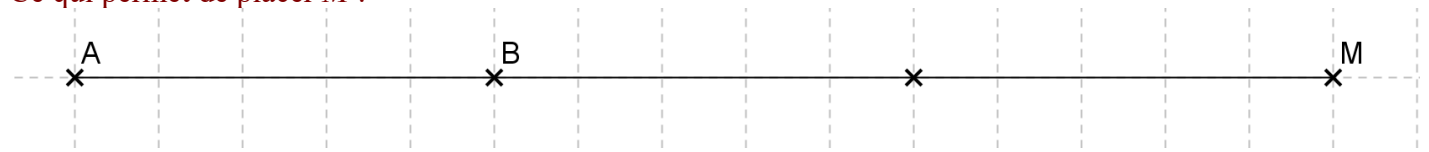
Ce qui permet de placer M par rapport à A et B (la construction géométrique de M utilisant Thalès est facultative, on peut mesurer) :



b) $2 \vec{AM} = 3 \vec{BM}$. On a :

$$2 \vec{AM} = 3(\vec{AM} - \vec{AB}) ; \vec{AM} = 3 \vec{AB} .$$

Ce qui permet de placer M :



2) Position de point sur le plan

Soient A , B et C trois points non-alignés du plan.

Déterminer, si possible, les réels x et y tels que $\vec{AM} = x \vec{AB} + y \vec{AC}$ dans les cas suivants. En déduire les coordonnées du point M dans le repère (A, B, C) .

a) $2 \vec{MC} - \vec{MB} = \vec{AB}$

$$\text{On a } 2(\vec{AC} - \vec{AM}) - (\vec{AB} - \vec{AM}) = \vec{AB} ; 2 \vec{AC} - 2 \vec{AM} - \vec{AB} + \vec{AM} = \vec{AB} ; \vec{AM} = -2 \vec{AB} + 2 \vec{AC} .$$

Ce qui permet de placer M par rapport à A , B et C ou (ce qui revient au même) à donner les coordonnées du point M dans le repère (A, B, C) : $M(-2 ; 2)$.

b) $\vec{MB} - 4 \vec{AB} = 2 \vec{CB}$

$$\text{On a } (\vec{AB} - \vec{AM}) - 4 \vec{AB} = 2(\vec{AB} - \vec{AC}) ; -\vec{AM} = 3 \vec{AB} + 2 \vec{AB} - 2 \vec{AC} ; \vec{AM} = 5 \vec{AB} - 2 \vec{AC} .$$

Ce qui permet de placer M par rapport à A , B et C ou (ce qui revient au même) à donner les coordonnées du point M dans le repère (A, B, C) : $M(5 ; -2)$.

c) $2 \vec{AB} = \vec{MC} + \vec{BC}$

$$\text{On a } 2 \vec{AB} = (\vec{AC} - \vec{AM}) + (\vec{AC} - \vec{AB}) ; \vec{AM} = \vec{AC} + \vec{AC} - \vec{AB} - 2 \vec{AB} ; \vec{AM} = -3 \vec{AB} + 2 \vec{AC} .$$

Ce qui permet de placer M par rapport à A , B et C ou (ce qui revient au même) à donner les coordonnées du point M dans le repère (A, B, C) : $M(-3 ; 2)$.

d) $\vec{BM} - \vec{AM} = \vec{AC}$

$$\text{On a } (\vec{AM} - \vec{AB}) - \vec{AM} = \vec{AC} ; \vec{AM} - \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC} ; \vec{0} = \vec{AB} + \vec{AC} .$$

Cette dernière égalité est fautive en général (pour que ce soit vrai, il faudrait que A , B et C soient confondus) donc on ne peut pas trouver de point M qui la satisfasse. Il n'y a pas de solution, donc pas de coordonnées.

[Pour faire un parallèle avec les nombres : c'est comme l'équation $4(3+x) - 2(1+2x) = 5$ qui conduit à $12 - 2 = 5$. Ceci est toujours faux, il n'y a donc pas de solution à cette équation.]

e) $3 \vec{MA} + 2 \vec{MB} = 4 \vec{MC}$

$$\text{On a } -3 \vec{AM} + 2(\vec{AB} - \vec{AM}) = 4(\vec{AC} - \vec{AM}) ; -5 \vec{AM} + 2 \vec{AB} = 4 \vec{AC} - 4 \vec{AM} ; \vec{AM} = 2 \vec{AB} - 4 \vec{AC} .$$

Ce qui permet de placer M par rapport à A , B et C ou (ce qui revient au même) à donner les coordonnées du point M dans le repère (A, B, C) : $M(2 ; -4)$.

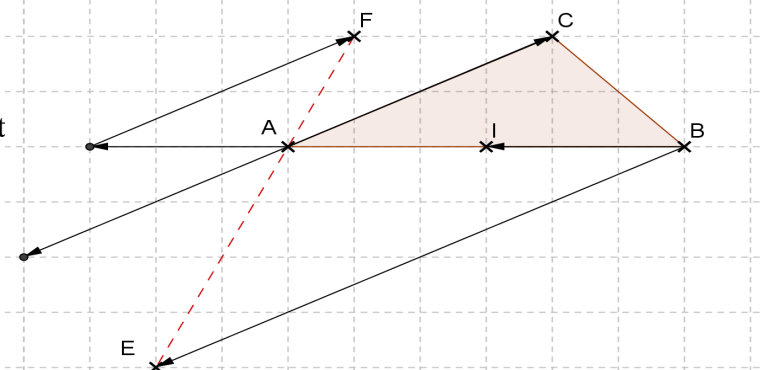
3) Parallélisme

ABC est un triangle.

a) E et F sont des points définis par $\vec{BE} = 2 \vec{CA}$ et $\vec{AF} = \frac{-1}{2} \vec{AB} + \vec{AC}$. Placer E et F sur la figure.

Montrer que $\vec{AE} = \vec{AB} - 2 \vec{AC}$.

On a $\vec{AE} - \vec{AB} = -2 \vec{AC}$ d'où $\vec{AE} = \vec{AB} - 2 \vec{AC}$.



En déduire que l'on a $\vec{AE} = -2\vec{AF}$.

On a $-2\vec{AF} = -2(\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}) = \vec{AB} - 2\vec{AC} = \vec{AE}$.

Que peut-on en déduire pour les points A , E et F ? Ces points sont alignés (droite en pointillés rouges).

b) Soit I le milieu de $[AB]$. Exprimer le vecteur \vec{CI} en fonction des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .

Puisque I est le milieu de $[AB]$, on a $\vec{CA} + \vec{CB} = 2\vec{CI}$, et donc $\vec{CI} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB}) = \frac{1}{2}(-\vec{AC} + (\vec{AB} - \vec{AC})) = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC}$

En déduire que $(CI) \parallel (AF)$.

Comme $\vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}$, on remarque que $\vec{AF} = -(\frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC}) = -\vec{CI}$. Les vecteurs étant colinéaires (ils sont opposés), les droites qui les supportent sont parallèles. On a, de plus, $\vec{AF} = \vec{IC}$ et donc $AFCI$ est un parallélogramme (ce qui se voit sur la figure).

4) Alignement

a) A , B et C sont trois points non-alignés du plan; \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs tels que $\vec{u} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$ et $\vec{v} = -6\vec{AB} + 3\vec{AC}$. Montrer que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

On a deux méthodes : trouver k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou bien utiliser le fait que le déterminant des vecteurs est nul.

Ici, on a $\vec{v} = -6\vec{AB} + 3\vec{AC} = -3(2\vec{AB} - \vec{AC}) = -3\vec{u}$ (ce n'est pas difficile de trouver ce qui se met en facteur)

Autre méthode : les coordonnées de \vec{u} et \vec{v} dans le repère $(O, \vec{AB}; \vec{AC})$ sont $\vec{u}(2; -1)$ et $\vec{v}(-6; 3)$ et $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 2 \times 3 - (-6) \times (-1) = 6 - 6 = 0$ donc les vecteurs sont colinéaires (cette méthode ne permet pas de trouver le coefficient k , mais il n'était pas demandé).

b) $ABCD$ est un parallélogramme.

I , J et K sont des points définis par $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC}$, $3\vec{DJ} = 2\vec{AD} - 3\vec{CB}$ et $\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{0}$.

Montrer que I , J et K sont alignés.

• Allons-y en confiance : on peut essayer de trouver k tel que $\vec{IJ} = k\vec{IK}$.

Comme $3\vec{DJ} = 3(\vec{DA} + \vec{AI} - \vec{IJ}) = 2\vec{AD} - 3\vec{CB}$ (2^{ème} égalité),

on a $-3\vec{IJ} = 2\vec{AD} - 3\vec{CB} - 3\vec{DA} - 3\vec{AI} = 8\vec{BC} - 3\vec{AI}$.

On a simplifié car, $ABCD$ étant un parallélogramme $\vec{AD} = \vec{BC}$.

Remplaçons \vec{AI} par ce que nous dit la 1^{ère} égalité : $-3\vec{IJ} = 8\vec{BC} - 3(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC}) = \frac{-3}{2}\vec{AB} + 6\vec{BC}$.

On trouve finalement $\vec{IJ} = \frac{-1}{2}\vec{AB} + 2\vec{BC}$.

• Il reste à effectuer la même chose pour \vec{IK} :

Comme $\vec{KA} + 2\vec{KB} = 3\vec{KA} + 2\vec{AB} = \vec{0}$ (3^{ème} égalité),

on a $3(\vec{IA} - \vec{IK}) = -2\vec{AB}$, et donc $-3\vec{IK} = -2\vec{AB} - 3\vec{IA} = -2\vec{AB} + 3\vec{AI}$

Remplaçons \vec{AI} par ce que nous dit la 1^{ère} égalité : $-3\vec{IK} = -2\vec{AB} + 3(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC}) = \frac{-1}{2}\vec{AB} + 2\vec{BC} = \vec{IJ}$.

Miracle ? Non, c'était attendu (l'énoncé insinuait qu'il existait un nombre k , il suffisait de le vérifier..).

N'y aurait-il pas une méthode plus simple ?

Faire la figure : ne pas perdre de temps à cela, c'est assez compliqué, on peut se tromper et ce n'est, dans tous les cas, pas une preuve.

Déterminer une équation de la droite (IJ) et vérifier que les coordonnées de K la vérifie : pourquoi pas.

On peut aussi montrer que \vec{IJ} et \vec{JK} sont colinéaires (avec le déterminant, ou en trouvant un coefficient k).

Pour ces deux dernières idées, il faut se situer dans un repère.

Prenons $(A, \vec{AB}; \vec{AD})$, sans oublier que $\vec{AD} = \vec{BC}$ et $\vec{AB} = \vec{DC}$ ($ABCD$ est un parallélogramme).

$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC}$, donc $I(\frac{1}{2}; \frac{2}{3})$.

$3\vec{DJ} = 3(\vec{AJ} - \vec{AD}) = 2\vec{AD} - 3\vec{CB}$, d'où $3\vec{AJ} = 2\vec{AD} - 3\vec{CB} + 3\vec{AD} = 8\vec{AD}$ et donc $J(0; \frac{8}{3})$.

$\vec{KA} + 2\vec{KB} = 3\vec{KA} + 2\vec{AB} = \vec{0}$, d'où $\vec{AK} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ et donc $K(\frac{2}{3}; 0)$.

On trouve sans peine $\vec{IJ}(-\frac{1}{2}; 2)$ et $\vec{JK}(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3})$ et $\det(\vec{IJ}; \vec{JK}) = (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{8}{3}) - (2) \times (\frac{2}{3}) = \frac{8}{6} - \frac{4}{3} = 0$.

Est-ce plus simple ? Vous en jugerez, dans tous les cas ce n'est pas immédiat (il y a du calcul).

5) Centre de gravité

a) Le centre de gravité G du triangle ABC est tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

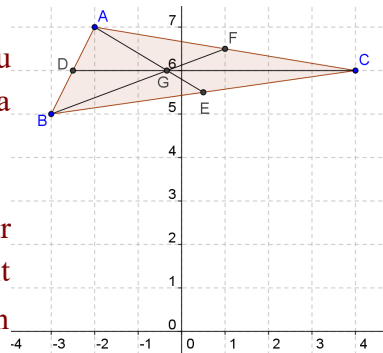
Montrer que, pour tout point M du plan, on a $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = (\vec{MG} + \vec{GA}) + (\vec{MG} + \vec{GB}) + (\vec{MG} + \vec{GC}) = 3\vec{MG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 3\vec{MG} + \vec{0} = 3\vec{MG}$.

b) On donne $A(-2; 7)$, $B(-3; 5)$ et $C(4; 6)$.

Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC .

On peut prendre $M=O$, on a donc $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$ ou $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$. Les coordonnées de G sont donc obtenues avec la formule $G(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3})$ ce qui conduit à $G(\frac{-1}{3}; 6)$.



Bien sûr, on aurait pu faire autrement : soit D le milieu de $[AB]$, D a pour coordonnées $D(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2})$, soit $D(\frac{-5}{2}; 6)$. Ensuite, il faut utiliser le fait que $\vec{CG} = \frac{2}{3}\vec{CD}$. On calcule les coordonnées de ces deux vecteurs, et on en déduit celles de G : d'une part, $\vec{CD}(\frac{-5}{2}-4; 6-6)$, soit $\vec{CD}(\frac{-13}{2}; 0)$ et donc $\frac{2}{3}\vec{CD}(\frac{-13}{3}; 0)$. D'autre part, $\vec{CG}(x-4; y-6)$. On doit donc avoir $x-4 = \frac{-13}{3}$ et $y-6=0$, ce qui conduit à $x=4-\frac{13}{3} = \frac{-1}{3}$ et $y=6$.

6) Natures de triangles

Quelle est la nature du triangle ABC dans les trois cas suivants :

La nature d'un triangle dépend de ses côtés, mais aussi du carré de ses côtés (cela évite les radicaux).

Si $AB^2=AC^2$ le triangle est isocèle en A .

Si $AB^2+AC^2=BC^2$ le triangle est rectangle en A .

On va donc, à chaque fois, calculer les carrés des côtés.

a) $A(1; -1)$, $B(4; -2)$ et $C(4; 3)$

$$AB = (4-1)^2 + (-2+1)^2 = 3^2 + (-1)^2 = 9+1=10$$

$$AC = (4-1)^2 + (3+1)^2 = 3^2 + 4^2 = 9+16=25$$

$$BC = (4-4)^2 + (3+2)^2 = 0^2 + 5^2 = 25$$

Le triangle ABC est isocèle en C .

b) $A(-2; 0)$, $B(1; \sqrt{3})$ et $C(1; -\sqrt{3})$

$$AB = (1+2)^2 + (\sqrt{3}-0)^2 = 3^2 + 3 = 9+3=12$$

$$AC = (1+2)^2 + (-\sqrt{3}-0)^2 = 3^2 + 3 = 9+3=12$$

$$BC = (1-1)^2 + (-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2 = 0 + (-2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$$

Le triangle ABC est équilatéral.

c) $A(2; 5)$, $B(-2; -1)$ et $C(-3; 4)$

$$AB = (-2-2)^2 + (-1-5)^2 = 4^2 + 6^2 = 16+36=52$$

$$AC = (-3-2)^2 + (4-5)^2 = 5^2 + 1^2 = 25+1=26$$

$$BC = (-3+2)^2 + (4+1)^2 = 1^2 + 5^2 = 1+25=26$$

Le triangle ABC est isocèle et rectangle en C .

7) Coordonnées

$ABCD$ est un parallélogramme. I est le milieu de $[AB]$. E est le point tel que $\vec{DE} = \frac{2}{3}\vec{DI}$.

Déterminer les coordonnées des points de la figure dans le repère (A, \vec{AB}, \vec{AD}) .

On a, bien sûr, $A(0; 0)$, $B(1; 0)$ et $C(0; 1)$ car on est dans le repère (A, B, C) .

Comme $ABCD$ est un parallélogramme, on a $D(1; 1)$.

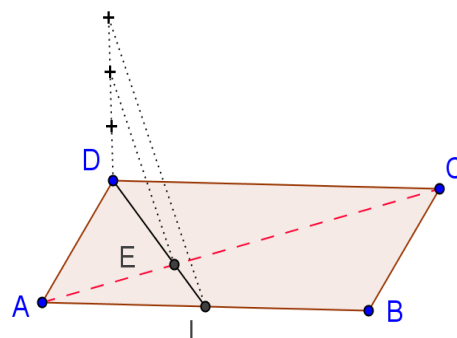
I étant le milieu de $[AB]$, on a $I(\frac{1}{2}; 0)$.

Comme E vérifie $\vec{DE} = \frac{2}{3}\vec{DI}$, on a aussi $\vec{AE} - \vec{AD} = \frac{2}{3}(\vec{AI} - \vec{AD})$ et donc $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$. On en déduit les coordonnées $E(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ (on aurait aussi pu remarquer que E était le centre de gravité du triangle ABD et utiliser la formule de l'exercice 5 ; on aurait aussi, bien sûr, pu utiliser la méthode plus classique appliquée à la fin de l'exercice 5).

Les points A , E et C sont-ils alignés ?

Cela semble le cas sur la figure (vous remarquerez l'astuce utilisant le théorème de Thalès pour placer E).

Vérifions-le en calculant le déterminant de \vec{AE} et \vec{AC} : $\vec{AE}(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, $\vec{AC}(1; 1)$ et $\det(\vec{AE}; \vec{AC}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$. Les points sont bien alignés.



1. Trois sangakus

Trois cercles C_1, C_2 et C_3 de centres O_1, O_2 et O_3 et de rayons respectifs R_1, R_2 et R_3 sont tangents à une droite en A_1, A_2 et A_3 et tangents entre eux (C_1 et C_2 extérieurement et C_3 intérieurement à C_1 et C_2).

a) Montrer que $A_1 A_2 = 2\sqrt{R_1 R_2}$.

Il suffit de placer le point O'_1 sur $[O_1 A_1]$ de manière à avoir $O'_1 A_1 = R_1$. Le triangle $O_1 O'_1 A_1$ est rectangle en O'_1 et on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$(O_1 O'_1)^2 + (O_2 O'_1)^2 = (O_1 O_2)^2$, soit, en remplaçant $O_1 O'_1$ par $R_1 - R_2$ (rectangle $A_1 A_2 O_2 O'_1$) et $O_1 O_2$ par $R_1 + R_2$ (tangence des cercles), $(R_1 - R_2)^2 + (A_1 A_2)^2 = (R_1 + R_2)^2$. En développant et en supprimant $R_1^2 + R_2^2$ des deux côtés de l'égalité, on trouve $-2R_1 R_2 + (A_1 A_2)^2 = 2R_1 R_2$, soit $(A_1 A_2)^2 = 4R_1 R_2$ et, comme $A_1 A_2 > 0$ (distance), on obtient $A_1 A_2 = \sqrt{4R_1 R_2} = 2\sqrt{R_1 R_2}$.

b) Écrire deux autres égalités semblables.

On prend maintenant connaissance du fait que, sur la figure, il y a un 3^{ème} cercle, tangent aux deux autres. On peut appliquer à ce cercle, relativement aux deux autres, ce qu'implique le 1^{er} sangaku : $A_1 A_3 = 2\sqrt{R_1 R_3}$ et $A_2 A_3 = 2\sqrt{R_2 R_3}$.

En déduire que $\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$.

Il faut traduire la présence de A_3 sur le segment $[A_1 A_2]$ par une égalité : $A_1 A_2 = A_1 A_3 + A_3 A_2$.

Remplaçons ces distances par les relations obtenues par le 1^{er} sangaku :

$2\sqrt{R_1 R_2} = 2\sqrt{R_1 R_3} + 2\sqrt{R_3 R_2}$ soit, en divisant l'égalité par $2\sqrt{R_1 R_2 R_3}$ et en simplifiant,

$$\frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{2\sqrt{R_1 R_2 R_3}} = \frac{2\sqrt{R_1 R_3}}{2\sqrt{R_1 R_2 R_3}} + \frac{2\sqrt{R_3 R_2}}{2\sqrt{R_1 R_2 R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$$

c) On dispose huit boules de même rayon r autour d'une boule de rayon R , de manière à ce que les neuf boules soient tangentes à un même plan et tangentes entre elles. On demande de déterminer le rapport $\frac{r}{R}$.

On utilisera le 1^{er} sangaku, la vue par dessus de la situation ci-contre et une des versions de la duplication du cosinus :

$$\cos 2x = 2(\cos x)^2 - 1 = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 1 - 2(\sin x)^2$$

Voici une 2^{ème} application du 1^{er} sangaku, dans l'espace celle-là, qui se résume avec le triangle $A a_1 a_2$, isocèle en A .

Appliquons le 1^{er} sangaku à l'ensemble des deux boules dont les points de contact avec le plan est A et a_1 : $A a_1 = 2\sqrt{Rr}$.

Par ailleurs, si on nomme A' le milieu de $[a_1 a_2]$, on a $a_1 A' = r$. Le triangle $A a_1 A'$ est rectangle en A' et l'angle $\alpha = \widehat{A' A a_1}$ mesure $\frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$ rad, car il y en a 16 de la même forme pour faire le tour du point A . On peut écrire alors :

$$\sin(\widehat{A' A a_1}) = \frac{A' a_1}{A a_1}, \text{ soit } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{r}{2\sqrt{Rr}}.$$

C'est là qu'intervient la formule de duplication du cosinus dans la version : $\cos 2x = 1 - 2(\sin x)^2$ qui implique que $(\sin x)^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

$$\left(\sin \frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{1 - \cos(2 \times \frac{\pi}{8})}{2} = \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}, \text{ et donc, comme } \sin \frac{\pi}{8} > 0,$$

$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$. Mais pour résoudre ce sangaku, il suffit de garder le carré de ce sinus car $(\sin \frac{\pi}{8})^2 = \left(\frac{r}{2\sqrt{Rr}}\right)^2 = \frac{r^2}{4Rr} = \frac{r}{4R}$. On en déduit donc que $\frac{r}{4R} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$, soit $\frac{r}{R} = 2 - \sqrt{2} \approx 0,586$.

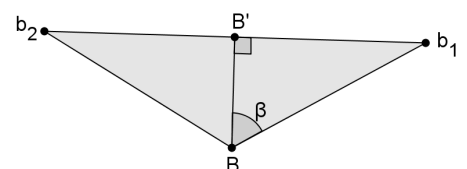
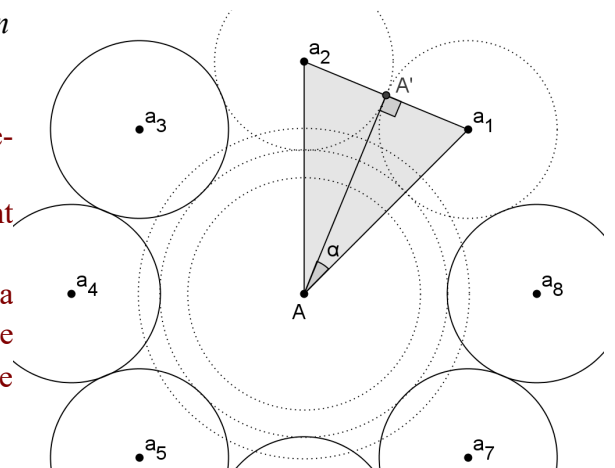
Remarque : on peut s'interroger sur la valeur de ce rapport dans le cas où il y aurait un autre nombre que huit boules autour de la boule centrale. Qu'obtient-on pour le plus petit de ces nombres : 3 ?

Les trois boules périphériques sont d'un rayon supérieur à celui de la boule centrale qu'elles enferme.

La figure de référence implique un angle $\beta = \widehat{B' B b_1} = \frac{\pi}{3}$.

On arrive à $(\sin \frac{\pi}{3})^2 = \frac{r}{4R}$ et donc $(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4} = \frac{r}{4R}$, ce qui conduit à $\frac{r}{R} = 3$.

Les trois boules périphériques ont un rayon triple de la boule centrale.



2. Triangles

a) ABC et DBC sont deux triangles rectangles tels que $AB=7$ et $DC=5$. $[BD]$ et $[AC]$ se coupent en E . F est le pied de la hauteur issue de E dans le triangle BCE . Calculer EF .

Aucune difficulté pour ce *sangaku* européen.

Notons $EF=x$, $BF=a$ et $FC=d$. En appliquant le théorème de Thalès dans les deux triangles ABC et BCD , on obtient :

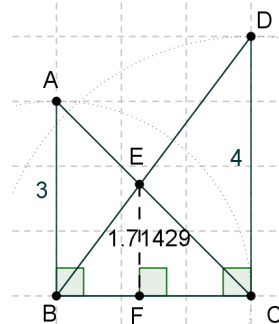
$\frac{CF}{CB} = \frac{EF}{AB}$, soit $\frac{d}{a+d} = \frac{x}{7}$ et $\frac{BF}{BC} = \frac{EF}{CD}$, soit $\frac{a}{a+d} = \frac{x}{5}$. On doit donc résoudre un système à deux équations et trois inconnues : la première s'écrit $d = (a+d) \times \frac{x}{7}$ (car $a+d \neq 0$), soit $d(1 - \frac{x}{7}) = a \times \frac{x}{7}$ et donc $d = \frac{a \times \frac{x}{7}}{(1 - \frac{x}{7})} = \frac{ax}{7-x}$. Remplaçons dans la 2^{ème} équation qui peut s'écrire :

$5a = x \times (a+d)$, on obtient $5a = x \times (a + \frac{ax}{7-x}) = ax \times \frac{7-x+x}{7-x} = \frac{7ax}{7-x}$.

Le coefficient a disparaît par miracle (?!), ouf! dirons-nous car la figure semblait manquer d'une donnée...

On obtient donc $5 = \frac{7x}{7-x}$ qui s'écrit $5(7-x) = 7x$ (car $7-x \neq 0$) ou encore $35 = 12x$. La solution apparaît donc, indépendante de a et donc indépendante de BC : $x = \frac{35}{12} \approx 2,917$.

Exprimons BC en fonction de a : $BC = a+d = \frac{ax}{5} = \frac{35a}{60} = \frac{7}{12} \times a$, ce qui peut s'écrire aussi $BF = a = \frac{12}{7} \times BC$.



D'une façon générale, on peut exprimer EF en fonction de AB et AC , cette longueur ne dépend jamais de BC : $EF = \frac{AB \times CD}{AB+CD}$.

Par exemple, lorsque $AB=3$ et $CD=4$, on a : $EF = \frac{3 \times 4}{3+4} = \frac{12}{7} \approx 1,7142857...$

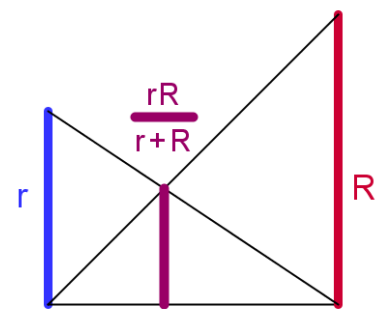
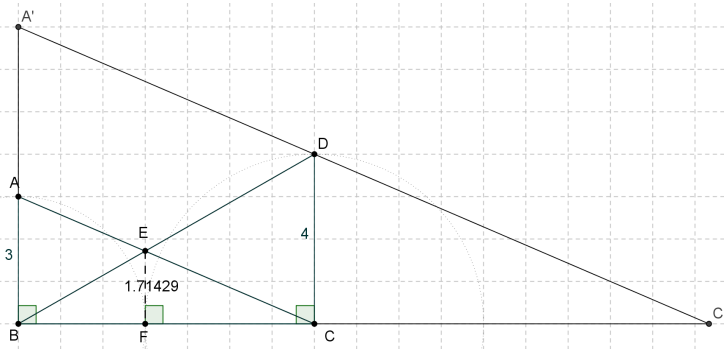
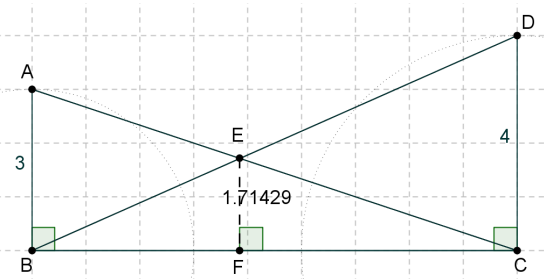
Pourquoi cela ne dépend-il pas de BC ? Peut-on comprendre cette indépendance en dehors de tout calcul algébrique?

A' , tels que $\frac{CD}{A'B} = \frac{EF}{AB}$

Traçons en effet, la parallèle à (AC) passant par D . Elle recoupe (BC) en C' et (AB) en

A' , tels que $\frac{CD}{A'B} = \frac{EF}{AB}$ car les triangles ABC et $A'BC'$ sont semblables (ils ont les mêmes angles, donc les rapports de longueurs sont conservés, l'un est un agrandissement de l'autre). Écrivons ce rapport $\frac{CD}{AB+CD} = \frac{EF}{AB}$, et on comprend tout de suite que $EF = \frac{AB \times CD}{AB+CD}$, indépendamment de BC .

La figure de droite résume cette information capitale et l'un d'entre vous placera peut-être ce beau sangaku au *kinkakuji* (le temple d'or à Kyoto, ce sera plus dans la tradition là-bas que dans la chapelle du Lycée Henri IV...) lors d'une prochaine visite au Japon.



b) ABC est un triangle quelconque.

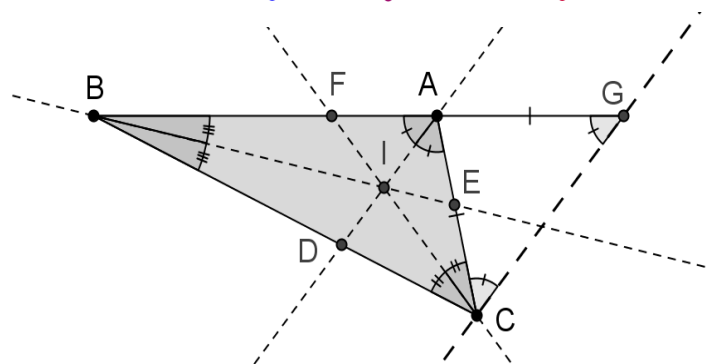
La bissectrice de \widehat{BAC} coupe (BC) en D .

La bissectrice de \widehat{ABC} coupe (AC) en E .

La bissectrice de \widehat{BCA} coupe (AB) en F .

La parallèle à (AD) passant par C coupe (AB) en G .

Coder la figure ci-contre.



On code tous d'abord les angles égaux : il y en a de deux sortes ceux qui sont égaux du fait de la bissectrice, et ceux qui sont égaux du fait du parallélisme (les angles alterne-interne \widehat{DAC} et \widehat{ACG} sont égaux et les angles correspondants \widehat{BAD} et \widehat{AGC} sont égaux).

Montrer que le triangle ACG est isocèle en A .

Le codage fait apparaître deux angles égaux pour ce triangle, les angles \widehat{ACG} et \widehat{AGC} .

Il est donc isocèle, en A puisque les deux autres angles sont égaux.

En posant $k = \frac{BD}{BC}$, montrer que $DC = BC \times (1-k)$ et $AC = BG \times (1-k)$.

On a $k = \frac{BD}{BC} = \frac{BC-DC}{BC}$ et donc $k BC = BC - DC$, d'où $DC = BC \times (1-k)$.

On sait que $AC = AG$ (triangle isocèle), l'autre égalité s'écrit donc $AG = BG \times (1-k)$. Elle provient du théorème de Thalès appliqué aux triangles ABD et GBC , qui donne :

$k = \frac{BD}{BC} = \frac{BA}{BG}$, donc $k BG = BA = BG - AG$ qu'on transforme en $AG = BG \times (1-k)$ sans difficulté.

Montrer alors que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Comme $\frac{BD}{BC} = \frac{BA}{BG}$ (Thalès), on a $\frac{BG}{BC} = \frac{BA}{BD}$. Mais $\frac{BG}{BC} = \frac{BG \times (1-k)}{BC \times (1-k)} = \frac{AC}{DC}$.

On en déduit que $\frac{DC}{AC} = \frac{BD}{BA}$, ce qui peut s'écrire aussi $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$ ou à l'inverse $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

La solution de Vincelot est plus directe :

$\frac{DB}{DC} = \frac{k BC}{DC} = \frac{k BC}{(1-k)BC} = \frac{k}{1-k}$ et $\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{(1-k)BG} = \frac{BG-AG}{(1-k)BG} = \frac{BG-(1-k)BG}{(1-k)BG} = \frac{k BG}{(1-k)BG} = \frac{k}{1-k}$. On a donc $\frac{DB}{DC} = \frac{k}{1-k} = \frac{AB}{AC}$.

On appelle I le centre du cercle inscrit au triangle ABC .

Évaluer les rapports $\frac{ID}{IA}$, $\frac{IE}{IB}$ et $\frac{IF}{IC}$.

En appliquant ce qui vient d'être montré aux trois bissectrices :

$\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}$ (triangles ABD et ACD), $\frac{IE}{IB} = \frac{AE}{AB} = \frac{CE}{CB}$ (triangles ABE et BCE), et $\frac{IF}{IC} = \frac{AF}{AC} = \frac{BF}{BC}$.

On pourra montrer au préalable que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b+d} = \frac{a+c}{b+d}$

C'est une propriété méconnue dont la réciproque est vraie aussi.

Les nombres b et d étant non nuls :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a = \frac{cb}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{\frac{cb}{d} + c}{b+d} = \frac{\frac{cb}{d} + \frac{cd}{d}}{b+d} = \frac{c \times b + d}{b+d} = \frac{c}{d}$$

Calculer le produit $P = \frac{ID}{IA} \times \frac{IE}{IB} \times \frac{IF}{IC}$.

D'après la propriété précédente $\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA} = \frac{BD+CD}{BA+CA} = \frac{BC}{BA+CA}$,

$\frac{IE}{IB} = \frac{AE}{AB} = \frac{CE}{CB} = \frac{AE+CE}{AB+CB} = \frac{AC}{AB+CB}$ et $\frac{IF}{IC} = \frac{AF}{AC} = \frac{BF}{BC} = \frac{AF+BF}{AC+CB} = \frac{AB}{AC+CB}$.

On a donc $\frac{ID}{IA} \times \frac{IE}{IB} \times \frac{IF}{IC} = \frac{BC}{BA+CA} \times \frac{AC}{AB+CB} \times \frac{AB}{AC+CB} = \frac{BC \times AC \times AB}{(BA+CA)(AB+CB)(AC+CB)}$.

Avec les notations abrégées $BC=a$, $AC=b$ et $AB=c$, cela donne $P = \frac{abc}{(c+b)(c+a)(b+a)}$.

c) ABC est un triangle équilatéral de côté c .

M est un point quelconque intérieur au triangle.

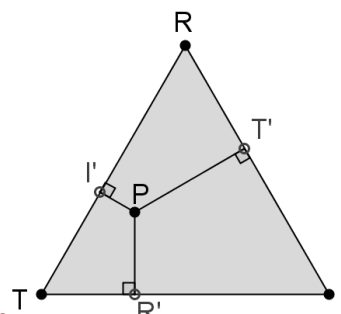
Exprimer la somme des distances de M aux trois côtés de ABC en fonction de c .

On sait que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4} \times c^2$

(car chacune de ses hauteurs mesure $\cos \frac{\pi}{6} \times c = \frac{\sqrt{3}}{2} \times c$).

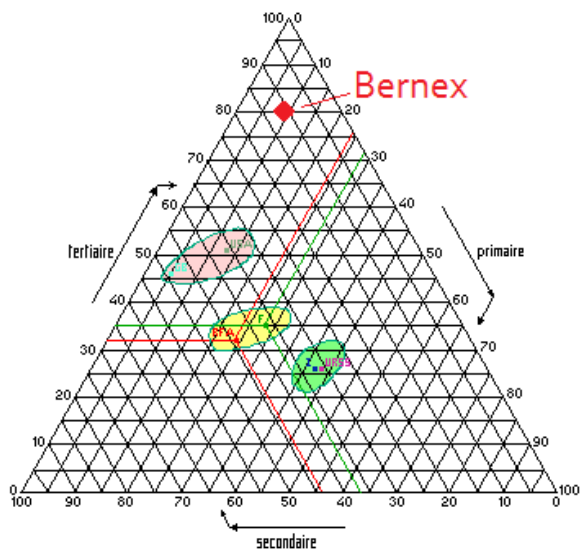
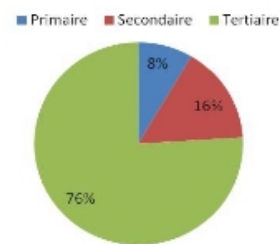
Or, cette aire peut se décomposer en la somme des aires des trois triangles de sommet P : $A_{TRI} = A_{TRP} + A_{IPR} + A_{RPT} = \frac{TI \times PR' + IR \times PT' + RT \times PI'}{2} = \frac{c \times PR' + c \times PT' + c \times PI'}{2} = \frac{c}{2} \times (PR' + PT' + PI')$.

De ces deux égalités, on tire celle-ci $\frac{\sqrt{3}}{4} \times c^2 = \frac{c}{2} \times (PR' + PT' + PI')$ qui, après simplification par $\frac{c}{2}$, donne $PR' + PT' + PI' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times c$ qui n'est autre que l'expression de la hauteur commune (valeur obtenue sans peine lorsque P est sur l'un des sommets du triangle). La somme de ces distances est donc constante si c est fixé.

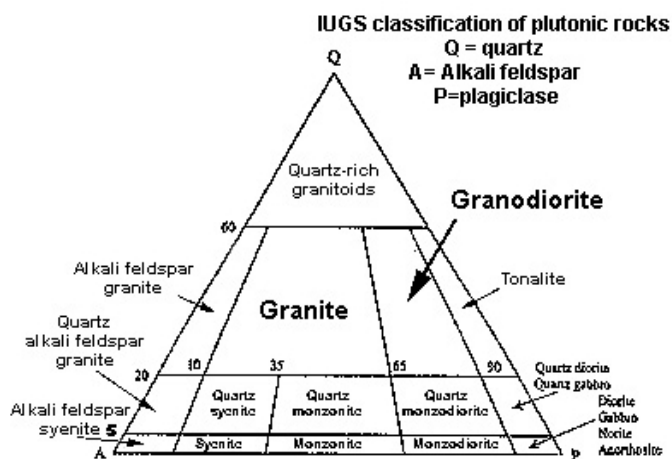


On utilise cette propriété pour représenter les répartitions d'une population entre trois parties. Par exemple, les emplois dans la commune de Bernex (CH, canton de Genève) se répartissent entre les secteurs primaire (8%),

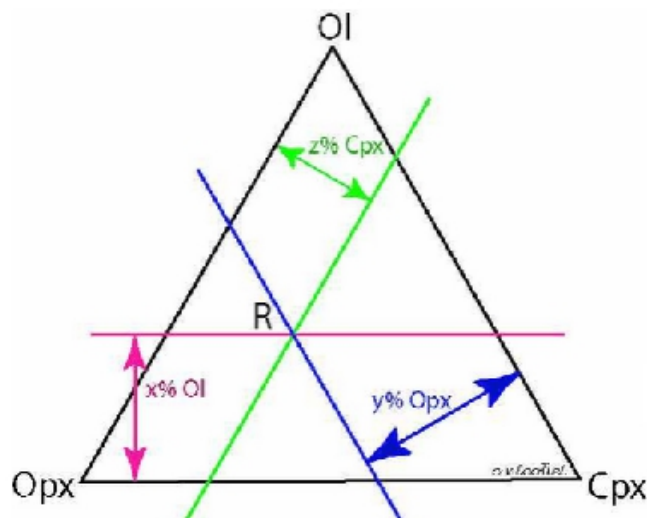
secondaire (16%) et tertiaire (76%). Ceci est habituellement représenté avec un diagramme circulaire (voir ci-contre). Mais celui-ci permet difficilement de rendre compte des évolutions dans le temps ou selon d'autres paramètres (localisation géographique, agrégats, etc.). La propriété citée est alors employée : on place un point dans un triangle équilatéral selon ses coordonnées triangulaires (8;16;76). Cela permet de situer par exemple ce point comparativement aux moyennes nationales (F, GB, I, USA, URSS(!)). On voit ici que Bernex est une ville de services avec des secteurs primaires et secondaires assez bas comparativement aux moyennes nationales. Paris (0;37;63), serait complètement sur le bord de la représentation. Deux autres représentations qui utilisent ce système de coordonnées triangulaires, dans le domaine géologique cette fois :



le triangle de gauche donne les diverses appellations utilisées pour les roches plutoniques (dont font partie les granites) selon la répartition en quartz, feldspath alcalin et plagioclase (les trois composants minéraux principaux de ce type de roche) ; celui de droite est extrait d'un sujet de bac où il était question d'expliquer la transformation d'une lherzolite en harzburgite (ne me demandez pas ce que ce sont ces roches, ni comment l'une se transforme en l'autre, j'ai un peu tout oublié), ces roches se composant principalement d'olivine, d'orthopyroxène et de clinopyroxène, il est utile d'employer une telle représentation.



Adapted from LeMaitre, R., 1989, A classification of Igneous Rocks and Glossary of Terms.



Vous remarquerez que les géologues ne disposent pas la légende comme les économistes : les premiers indiquent les pôles (là où se trouve les 100% d'un minéral) : Quartz-feldspath Alcalin-Plagioclase ou OLivine-d'OrthoPyroXène-ClinoPyroXène), tandis que les seconds indiquent les échelles (là où on lit les compositions allant de 0% à 100% pour un secteur) : Primaire-Secondaire-Tertiaire. Dans ce dernier mode, il est nécessaire d'indiquer une orientation (de 0 vers 100), sinon on pourrait s'y perdre.

1. Angles d'un triangle

a) ABC est un triangle acutangle (trois angles aigus).

L'angle géométrique \widehat{BAC} a pour mesure α , avec $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Montrer que l'aire \mathcal{A} du triangle ABC se calcule par la formule :

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}}{2}, \text{ notée aussi } \frac{bc \sin \alpha}{2}.$$

En déduire deux autres expressions de \mathcal{A} .

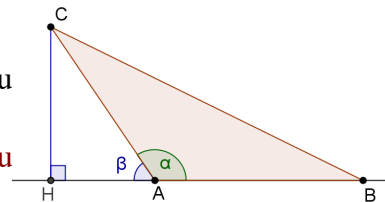
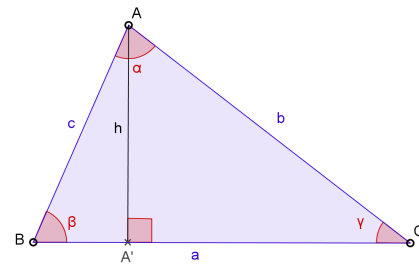
On sait que l'aire d'un triangle ABC peut s'écrire $\frac{BC \times AA'}{2}$ où $[AA']$ est la

hauteur issue de A . Mais $\frac{AA'}{AB} = \sin \widehat{CBA}$, donc $\mathcal{A} = \frac{BC \times AB \times \sin \widehat{CBA}}{2}$, égalité notée aussi, avec les notations de la figure, $\frac{ac \sin \beta}{2}$. De même, avec chacun des sommets.

$$\text{On a donc } \mathcal{A} = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

Montrer que, si le triangle ABC est obtusangle en A , la formule de l'aire mise au point pour un triangle acutangle est encore valable.

$\sin \widehat{CAB} = \sin(\pi - \widehat{CAH}) = \sin \widehat{CAH} = \frac{CH}{CA}$, donc $CH = CA \times \sin \widehat{CAB}$ et l'aire du triangle obtusangle en A s'exprime bien sous la forme trouvée $\mathcal{A} = \frac{AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}}{2}$.



b) ABC est un triangle isocèle en A .

Montrer que la base principale BC se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$BC = 2 AB \sin \frac{\alpha}{2}. \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BA'}{BA} = \frac{\frac{BC}{2}}{BA} = \frac{BC}{2BA}.$$

c) ABC est un triangle quelconque dont le cercle circonscrit a pour rayon R . O étant le centre du cercle circonscrit, on note C' le symétrique de C par rapport à O . Justifier que $\widehat{BAC} = \widehat{BC'C}$.

A et C' étant sur un même cercle, les angles \widehat{BAC} et $\widehat{BC'C}$ interceptent le même arc de ce cercle. Ils sont donc égaux.

Combien mesure $\widehat{CBC'}$? Pourquoi ?

B étant un point du cercle de diamètre $[CC']$, l'angle $\widehat{C'BC}$ est droit.

Montrer alors que $\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{2R}$.

On en déduit que $\sin \widehat{BC'C} = \frac{BC}{CC'} = \frac{BC}{2R}$, mais comme $\widehat{BAC} = \widehat{BC'C}$, on a bien $\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{2R}$.

Dans le cas d'un triangle obtusangle, montrer que cette relation reste vraie.

Si le triangle ABC est obtusangle en A , le centre O du cercle circonscrit est extérieur au triangle, et donc le point C' aussi. L'angle intercepté par \widehat{BAC} est le grand arc BC alors que l'angle intercepté par $\widehat{BC'C}$ est le petit arc BC . Ces angles ne sont plus égaux. Le plus petit $\widehat{BC'C}$ mesure la moitié de l'angle au centre \widehat{BOC} , soit $\frac{\widehat{BOC}}{2}$, alors que le plus grand \widehat{BAC} mesure la moitié de $2\pi - \widehat{BOC}$, c'est-à-dire $\pi - \frac{\widehat{BOC}}{2}$. Mais ces deux angles ont le même sinus car $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$.

La relation est donc inchangée dans ce cas.

En déduire que, avec les notations précédentes, on a toujours :

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

La relation précédente s'écrit $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$ ou bien $2R = \frac{a}{\sin \alpha}$. Elle est bien évidemment vraie pour les trois points (il suffit de faire ce raisonnement qu'on a fait en partant du sommet A en partant du sommet B ou de C). On retient que les trois rapports sont égaux : $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ (ils sont égaux au diamètre du cercle circonscrit).

d) L'idée de la démonstration de cette "loi des sinus" (question c) est tirée du livre



de H.S.M. Coxeter et S.L. Greitzer "Redécouvrons la géométrie" (*Geometry Revisited*, 1967, édité en France aux éditions Dunod en 1971, puis réimprimé par les éditions Jacques Gabay en 1997). L'ouvrage commence par cette propriété et donne les quatre exemples que voici (on pourra les chercher à titre d'approfondissement) :

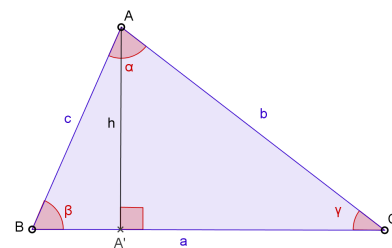
- Montrer que dans tout triangle ABC , même si l'un des angles B et C est obtus, on a $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$. Appliquer la loi des sinus pour obtenir la "formule d'addition" $\sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta$.

La première égalité vient de la somme $BC = BA' + A'C$ qui s'écrit :

$a = c \cos \beta + b \cos \gamma$. Remplaçons b et c par ce que nous indique la loi des sinus : $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ et $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$. Il vient $a = \frac{a \sin \gamma \cos \beta}{\sin \alpha} + \frac{a \sin \beta \cos \gamma}{\sin \alpha}$, soit $\sin \alpha = \sin \gamma \cos \beta + \sin \beta \cos \gamma$.

Il ne reste plus qu'à rappeler que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ et donc que $\sin \alpha = \sin(\pi - \gamma - \beta) = \sin(\beta + \gamma)$, utilisant encore cette propriété de la fonction sinus : $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$.

Cette formule d'addition $\sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta$ se décline avec le cosinus et avec une soustraction à la place de l'addition. Ces études font partie des joies trigonométriques de la classe de 1^{ère}...



- Dans tout triangle ABC , on a : $a(\sin \beta - \sin \gamma) + b(\sin \gamma - \sin \alpha) + c(\sin \alpha - \sin \beta) = 0$.

Évaluons cette expression E en remplaçant $\sin \alpha$ par $\frac{a}{2R}$, $\sin \beta$ par $\frac{b}{2R}$ et $\sin \gamma$ par $\frac{c}{2R}$, puis simplifions en multipliant par $2R$:

$$E = a\left(\frac{b}{2R} - \frac{c}{2R}\right) + b\left(\frac{c}{2R} - \frac{a}{2R}\right) + c\left(\frac{a}{2R} - \frac{b}{2R}\right) = a(b - c) + b(c - a) + c(a - b).$$

Il ne reste plus qu'à développer et réduire :

$$E = ab - ac + bc - ba + ca - cb = 0.$$

- Dans tout triangle ABC , on a $A_{ABC} = \frac{abc}{4R}$.

On a vu que $A_{ABC} = \frac{bc \sin \alpha}{2}$.

Remplaçons $\sin \alpha$ par $\frac{a}{2R}$, cela donne $A_{ABC} = \frac{bc \frac{a}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R}$.

- Si p et q sont les rayons de deux cercles passant par un point A et tangents en B et C , respectivement, à la droite (BC) , on a : $p q = R^2$, R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .

(la figure n'est pas présente dans le livre et a été ajoutée par mes bons soins)

Les triangles isocèles tracés correspondent aux deux cercles passant par A et tangents en B et C , respectivement, à la droite (BC) . On peut leur appliquer la formule vue au 1b) : pour le triangle AO_1B par exemple, on a $\sin \frac{\widehat{AO_1B}}{2} = \frac{BA}{2p}$.

Or, $\frac{\widehat{AO_1B}}{2} = \widehat{HO_1B}$ étant complémentaire de $\widehat{O_1BH}$ est égal à \widehat{ABC} . Donc, on peut écrire $\sin \widehat{ABC} = \frac{BA}{2p}$ et aussi $BA = 2p \sin \widehat{ABC}$. De même, on a $CA = 2q \sin \widehat{ACB}$.

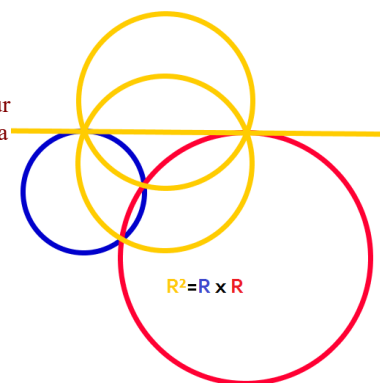
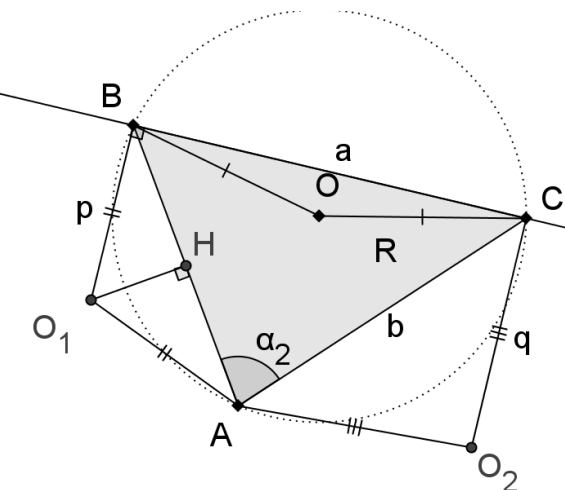
Remplaçons maintenant par ce qu'implique la loi des sinus : $\sin \widehat{ABC} = \frac{b}{2R}$ et $\sin \widehat{ACB} = \frac{c}{2R}$.

On obtient $BA = c = 2p \frac{b}{2R}$ et $CA = b = 2q \frac{c}{2R}$.

On en déduit que le produit bc vaut $bc = 2p \frac{b}{2R} 2q \frac{c}{2R} = 4pq \frac{bc}{4R^2}$.

Simplifions par $4bc$ et multiplions par R^2 , on obtient $R^2 = pq$.

Et voilà notre nouveau *sangaku*, bien dans la tradition avec ces cercles tangents... Nous avons ajouté sur cette figure le 2^{ème} cercle passant par l'intersection des deux cercles tangents (en bleu et rouge) : il a même rayon que le premier (sauriez-vous prouver cette propriété ?)



1. Repère

ABC est un triangle. On se place dans le repère (A, \vec{AB}, \vec{AC}) .

Rappeler quelles sont les coordonnées de A, B et C dans ce repère ?

Par définition d'un repère, les coordonnées demandées sont $A(0;0), B(1;0)$ et $C(0;1)$.

Car $\vec{AA}=\vec{0}=0\vec{AB}+0\vec{AC}$, $\vec{AB}=1\vec{AB}+0\vec{AC}$ et $\vec{AC}=0\vec{AB}+1\vec{AC}$.

a) a, b et c sont trois réels non nuls tels que $a+b+c \neq 0$.

Soit M le point défini par l'égalité $a\vec{MA}+b\vec{MB}+c\vec{MC}=\vec{0}$.

Déterminer les coordonnées de M en fonction de a, b et c .

On a $\vec{0}=a\vec{MA}+b(\vec{MA}+\vec{AB})+c(\vec{MA}+\vec{AC})=(a+b+c)\vec{MA}+b\vec{AB}+c\vec{AC}$, d'où

$-(a+b+c)\vec{MA}=(a+b+c)\vec{AM}=b\vec{AB}+c\vec{AC}$, et en divisant par $a+b+c \neq 0$, $\vec{AM}=\frac{b}{a+b+c}\vec{AB}+\frac{c}{a+b+c}\vec{AC}$.

Les coordonnées de M sont donc $M(\frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{a+b+c})$.

Montrer que $(AM) \parallel (BC)$ si et seulement si $b+c=0$.

$(AM) \parallel (BC)$ si et seulement si $\det(\vec{AM}, \vec{BC})=0$.

Or on a $\vec{AM}(\frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{a+b+c})$ et $\vec{BC}(-1;1)$, donc $\det(\vec{AM}, \vec{BC})=\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=\frac{b+c}{a+b+c}$.

$(AM) \parallel (BC)$ si et seulement si $\frac{b+c}{a+b+c}=0$, et comme $a+b+c \neq 0$, si et seulement si $b+c=0$.

b) α est un réel et P, Q et R sont trois points définis par $\vec{CR}=-\alpha\vec{CB}$, $\vec{CQ}=\alpha\vec{CA}$ et $\vec{AP}=\alpha\vec{AB}$.

Déterminer α pour que les points P, Q et R soient alignés et distincts.

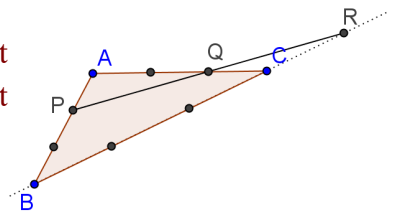
$\vec{QR}=\vec{CR}-\vec{CQ}=-\alpha\vec{CB}-\alpha\vec{CA}=-\alpha(\vec{CB}+\vec{CA})=-\alpha(\vec{AB}-\vec{AC}-\vec{AC})=-\alpha\vec{AB}+2\alpha\vec{AC}$.

$\vec{RP}=\vec{RC}+\vec{CA}+\vec{AP}=\alpha\vec{CB}+\vec{CA}+\alpha\vec{AB}=\alpha(\vec{AB}+\vec{CB})+\vec{CA}=\alpha(\vec{AB}+\vec{AB}-\vec{AC})-\vec{AC}=2\alpha\vec{AB}-(1+\alpha)\vec{AC}$.

C'est un peu laborieux mais nous voulions arriver à exprimer ces deux vecteurs dans la base (\vec{AB}, \vec{AC}) choisie. Les points P, Q et R sont alignés si et seulement si $\det(\vec{QR}, \vec{RP})=0$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha(1+\alpha)-2\alpha \times 2\alpha = \alpha(1+\alpha)-4\alpha^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ou $(1+\alpha)-4\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ou $\alpha=\frac{1}{3}$.

La valeur $\alpha=0$ ne conduit pas à des points distincts car alors, on aurait $\vec{CR}=\vec{0}$ soit $C=R$ et aussi $\vec{CQ}=\vec{0}$ soit $C=Q$ et donc R et Q au moins seraient confondus. Il reste la valeur $\alpha=\frac{1}{3}$ qui conduit bien à des points alignés et distincts.

On peut aller jusqu'à faire une figure pour vérifier visuellement cet alignement.



2. Représentations paramétriques des droites

a) La droite $D(A, \vec{u})$ passe par $A(3;5)$ et a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}(-1; 2)$.

L'appartenance d'un point M à cette droite $D(A, \vec{u})$ s'écrit $M \in D \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{AM}=\lambda\vec{u}$.

Traduire cette égalité vectorielle par un système d'équations donnant x et y en fonction de λ

(on appelle un tel système une *représentation paramétrique* de la droite D , λ étant le paramètre).

\vec{AM} a pour coordonnées $(x-3, y-5)$ tandis que $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(-\lambda, 2\lambda)$. Ces vecteurs sont

égaux si et seulement si $\begin{cases} x-3=-\lambda \\ y-5=2\lambda \end{cases}$, système qui s'écrit aussi $\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=5+2\lambda \end{cases}$, ce qui constitue la représentation

paramétrique de D .

Déterminer une équation cartésienne de D .

$M \in D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \det(\vec{AM}; \vec{u})=0 \Leftrightarrow 2(x-3)-(-1)(y-5)=0 \Leftrightarrow 2x-6+y+5=0 \Leftrightarrow 2x+y-1=0$.

En déduire l'équation réduite de D .

De cette dernière, on tire l'équation réduite $y=-2x+1$.

b) La droite D' a pour représentation paramétrique le système $\begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = 1-2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer deux points de la droite D' .

On peut prendre n'importe quelle valeur du paramètre, pour $\lambda=0$ on a le point A de coordonnées $(2, 1)$ et pour $\lambda=1$ on a le point B de coordonnées $(2+3=5, 1-2=-1)$.

Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de D' .

$\vec{AB}(5-2=3; -1-1=-2)$.

Déterminer une équation cartésienne de D' .

$M \in D'(A, \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow 3(x-2) - (-2) \times (y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 6 + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 8 = 0$
 En déduire l'équation réduite de D' .

$$M \in D'(A, \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow 2y = -3x + 8 \Leftrightarrow y = \frac{-3}{2}x + 4.$$

c) D'une façon générale, déterminer une représentation paramétrique et une équation cartésienne de la droite passant par $A(a;b)$ de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta)$.

\overrightarrow{AM} a pour coordonnées $(x-a, y-b)$ tandis que $\lambda \vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda\alpha, \lambda\beta)$. Ces vecteurs sont égaux si et seulement si $\begin{cases} x-a = \lambda\alpha \\ y-b = \lambda\beta \end{cases}$, système qui s'écrit aussi $\begin{cases} x = a + \lambda\alpha \\ y = b + \lambda\beta \end{cases}$, ce qui constitue la représentation paramétrique de D .

$$M \in D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta(x-a) - \alpha(y-b) = 0 \Leftrightarrow \beta x - a\beta - \alpha y + b\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta x - \alpha y + (b\alpha - a\beta) = 0.$$

De cette dernière, on tire l'équation réduite $y = \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha}$ si $\alpha \neq 0$ car sinon c'est $x = a$. On peut aussi retenir comment on retrouve les coordonnées d'un vecteur directeur à partir de l'équation cartésienne.

Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur et une équation cartésienne de la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = a + b\lambda \\ y = c + d\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

On peut prendre n'importe quelle valeur du paramètre, pour $\lambda = 0$ on a le point A de coordonnées (a, c) et pour $\lambda = 1$ on a le point B de coordonnées $(a+b, c+d)$.

Les coordonnées d'un vecteur directeur sont donc $\overrightarrow{AB}(a+b-a; c+d-c)$, soit $\overrightarrow{AB}(b; d)$.

$$M \in d(A, \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow d(x-a) - b(y-c) = 0 \Leftrightarrow dx - by + bc - ad = 0$$

Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur et une représentation paramétrique de la droite

- d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

On a vu qu'une équation cartésienne de la droite passant par $A(a;b)$ de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta)$ est :

$\beta x - \alpha y + (b\alpha - a\beta) = 0$. On en déduit que les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ sont $(b; -a)$ (ou $(-b; a)$, coordonnées du vecteur opposé au premier). Le point de cette droite d'abscisse 0 (si $b \neq 0$) a pour coordonnées $(0, -\frac{c}{b})$.

On peut alors écrire directement une représentation paramétrique de cette droite $\begin{cases} x = -\lambda b \\ y = \frac{-c}{b} + \lambda a \end{cases}$.

- d'équation réduite $y = ax + b$.

Choisissons deux points de cette droite :

Pour $x = 0$ on a le point A de coordonnées $(0, b)$ et pour $y = 0$ on a le point B de coordonnées $(-\frac{b}{a}, 0)$.

Les coordonnées d'un vecteur directeur sont donc $\overrightarrow{AB}(-\frac{b}{a}; -b)$, ou encore $\vec{u}(\frac{1}{a}; 1)$ ou encore $\vec{v}(1; a)$.

Le point de cette droite d'abscisse 0 a pour coordonnées $(0, b)$.

On peut alors écrire une représentation paramétrique de cette droite $\begin{cases} x = \lambda \\ y = b + \lambda a \end{cases}$. Vous remarquerez que cette représentation paramétrique est très exactement la transcription de l'équation réduite.

- d'équation réduite $x = k$.

On peut écrire directement une représentation paramétrique de cette droite $\begin{cases} x = k \\ y = \lambda \end{cases}$, le paramètre (variable) de la représentation est λ , tandis que le nombre k est une constante (invariable).

On peut se poser d'autres questions sur les représentations paramétriques des objets connus du plan, mais ces notions seront plus spécialement étudiées en T^{ale} pour les objets de l'espace (plans et droites principalement).

Pour une droite du plan, on a $\begin{cases} x = a + b\lambda \\ y = c + d\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ où (a, b) sont les coordonnées d'un des points de la droite (il y en a une infinité, on peut mettre n'importe lequel) et (c, d) celles d'un vecteur directeur de cette droite (il y en a une infinité, tous colinéaires entre eux, on peut mettre n'importe lequel).

Pour un cercle, on a $\begin{cases} x = a + r \cos \lambda \\ y = b + r \sin \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ où (a, b) sont les coordonnées du centre du cercle (il n'y a qu'une valeur possible) et r le rayon (il n'y a qu'une valeur possible). Vous vérifierez qu'alors le cercle centré sur l'origine et de rayon 1 a pour représentation $\begin{cases} x = \cos \lambda \\ y = \sin \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$, ce qui ne nous surprend pas outre mesure.

3. Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leurs directions sont perpendiculaires.

On se place dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Montrer que le vecteur $\vec{u}(\alpha; \beta)$ est orthogonal au vecteur $\vec{v}(\alpha'; \beta')$ si et seulement si $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$.

On utilisera les représentants \vec{OA} et \vec{OB} des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Ainsi placés, les points O, A et B ont pour coordonnées $O(0;0)$, $A(\alpha; \beta)$ et $B(\alpha'; \beta')$. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $AB^2 = OA^2 + OB^2$ c'est-à-dire si et seulement si $(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 = (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha'^2 + \beta'^2)$.

Développons le membre de gauche et supprimons ce qui est commun aux deux membres $\alpha^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha' + \beta^2 + \beta'^2 - 2\beta\beta' = (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha'^2 + \beta'^2)$ et puis, $-2\alpha\alpha' - 2\beta\beta' = 0$. Il ne reste plus qu'à simplifier par -2 pour trouver la condition d'orthogonalité $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$.

Exemple d'application : le vecteur $\vec{u}(-2; 4)$ est-il orthogonal au vecteur $\vec{v}(3; 2)$? Calculons le produit $\alpha\alpha' + \beta\beta' = -2 \times 3 + 2 \times 4 = -6 + 8 = 2 \neq 0$. Donc, non, ces vecteurs ne sont pas orthogonaux.

b) Donner une équation de la médiatrice de $[AB]$ dans le cas général où $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

\vec{AB} a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$. La médiatrice de $[AB]$ passe par le milieu I de ce segment.

Or, I a pour coordonnées $(\frac{x_B + x_A}{2}; \frac{y_B + y_A}{2})$. On va traduire que M est sur la médiatrice de $[AB]$ en écrivant la condition d'orthogonalité de \vec{MI} et \vec{AB} : $(\frac{x_B + x_A}{2} - x)(x_B - x_A) + (\frac{y_B + y_A}{2} - y)(y_B - y_A) = 0$. Simplifions en multipliant tout par 2 : $(x_B + x_A - 2x)(x_B - x_A) + (y_B + y_A - 2y)(y_B - y_A) = 0$, puis développons :

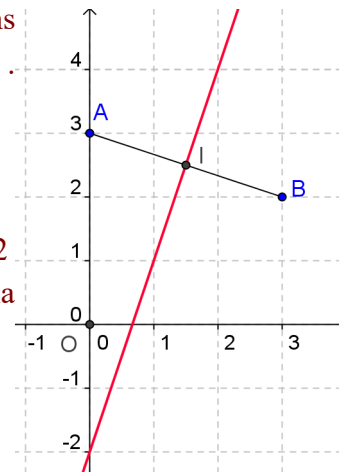
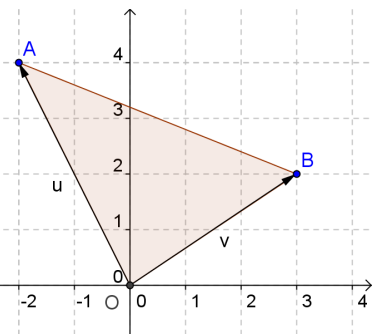
$(x_B + x_A)(x_B - x_A) - 2x(x_B - x_A) + (y_B + y_A)(y_B - y_A) - 2y(y_B - y_A) = 0$. Réduisons pour obtenir une équation cartésienne : $x(x_B - x_A) + y(y_B - y_A) + \frac{x_A^2 + y_A^2 - (x_B^2 + y_B^2)}{2} = 0$.

Cela paraît une forme acceptable (sur le plan de la simplicité).

Vérifions-la en déterminant l'équation de la médiatrice de $A(0;3)$ et $B(3;2)$:

Notre formule s'écrit $x(3 - 0) + y(2 - 3) + \frac{0^2 + 3^2 - (3^2 + 2^2)}{2} = 0$ qui se simplifie en

$3x - y + \frac{9 - (9 + 4)}{2} = 0$ puis en $3x - y - 2 = 0$. L'équation réduite est donc $y = 3x - 2$ ce que l'on vérifie aisément sur la figure (l'ordonnée à l'origine est bien -2 , et la pente est bien 3).



4. Droite d'Euler

On se place dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Préalable : donner une équation de la perpendiculaire à $[AB]$ passant par C dans le cas général où $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$.

\overline{AB} a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

La perpendiculaire à $[AB]$ passe par C . On traduit que M est sur cette droite en écrivant la condition d'orthogonalité de \overline{MC} et \overline{AB} :

$(x_C - x)(x_B - x_A) + (y_C - y)(y_B - y_A) = 0$. Développons :

$x_C(x_B - x_A) - x(x_B - x_A) + y_C(y_B - y_A) - y(y_B - y_A) = 0$.

Réduisons pour obtenir une équation cartésienne :

$x(x_B - x_A) + y(y_B - y_A) - (x_C(x_B - x_A) + y_C(y_B - y_A)) = 0$.

Vérifions-la en déterminant l'équation de la hauteur issue de $C(-2; 3)$ avec $A(8; 6)$ et $B(1; -1)$:

Notre formule s'écrit $x(1-8) + y(-1-6) - (-2(1-8) + 3(-1-6)) = 0$ qui se simplifie en

$-7x - 7y - (14 - 21) = 0$ puis en $x + y - 1 = 0$. L'équation réduite est donc $y = -x + 1$ ce que l'on vérifie aisément sur la figure (l'ordonnée à l'origine est bien 1, et la pente est bien -1).

Pour éviter des formules générales trop longues et complexes à manipuler, on va étudier un exemple :

Soient $A(8; 6)$, $B(1; -1)$ et $C(-2; 3)$ trois points.

a) Déterminer une équation des hauteurs h_A et h_C du triangle ABC issues de A et de C .

La hauteur h_C a une équation que nous venons de déterminer : $y = -x + 1$.

La hauteur h_A est la perpendiculaire à $[BC]$ passe par A . On traduit que M est sur cette droite en échangeant A et C dans l'équation obtenue au préalable : $x(x_B - x_C) + y(y_B - y_C) - (x_A(x_B - x_C) + y_A(y_B - y_C)) = 0$.

Déterminons maintenant h_A : $x(1+2) + y(-1-3) - (8(1+2) + 6(-1-3)) = 0$ qui se simplifie en

$3x - 4y - (24 - 24) = 0$ puis en $3x - 4y = 0$. L'équation réduite est donc $y = \frac{3}{4}x$. C'est bien la droite qui passe par l'origine et le point de coordonnées $(4; 3)$ que l'on voit sur la figure.

En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle.

L'orthocentre H du triangle est le point d'intersection des trois hauteurs. On va donc trouver ses coordonnées en résolvant le système formé par les équations h_A et h_C . Remplaçons y par $\frac{3}{4}x$ dans $y = -x + 1$, cela donne $\frac{3}{4}x = -x + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x + x = 1 \Leftrightarrow (\frac{3}{4} + 1)x = 1 \Leftrightarrow \frac{7}{4}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{4}{7}$. On a alors $y = \frac{3}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$, et $H(\frac{4}{7}; \frac{3}{7})$, ce qui est confirmé par la figure.

b) Déterminer une équation des médiatrices d_A et d_C du triangle ABC des côtés $[BC]$ et $[AB]$.

Passons aux médiatrices. Celle, d_C , du côté $[AB]$ a pour équation $x(x_B - x_A) + y(y_B - y_A) + \frac{x_A^2 + y_A^2 - (x_B^2 + y_B^2)}{2} = 0$ soit $-7x - 7y + \frac{64 + 36 - (1 + 1)}{2} = 0$, soit encore $-7x - 7y + 49 = 0 \Leftrightarrow x + y - 7 = 0$ et celle, d_A , du côté $[BC]$ a pour équation $3x - 4y + \frac{4 + 9 - (1 + 1)}{2} = 0$ soit $3x - 4y + \frac{11}{2} = 0$.

En déduire les coordonnées du centre O du cercle circonscrit au triangle.

Le centre O du cercle circonscrit au triangle est le point d'intersection des trois médiatrices. On va donc trouver ses coordonnées en résolvant le système formé par les équations d_A et d_C . Remplaçons y par $7 - x$ (équation de d_C) dans $3x - 4y + \frac{11}{2} = 0$, cela donne

$3x - 4(7 - x) + \frac{11}{2} = 0 \Leftrightarrow (3 + 4)x - 28 + \frac{11}{2} = 0 \Leftrightarrow 7x - \frac{45}{2} = 0 \Leftrightarrow 7x = \frac{45}{2} \Leftrightarrow x = \frac{45}{14} \approx 3,214$.

On a alors $y = 7 - \frac{45}{14} = \frac{53}{14} \approx 3,786$, et $O(\frac{45}{14}; \frac{53}{14})$, ce qui est confirmé par la figure.

Déterminer au passage le rayon R de ce cercle.

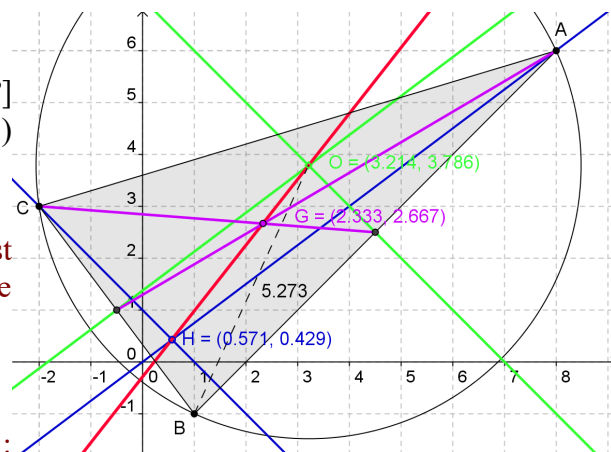
Le rayon R de ce cercle est la distance $OA = OB = OC$.

Il vaut $OB = \sqrt{(\frac{45}{14} - 1)^2 + (\frac{53}{14} + 1)^2} = \sqrt{(\frac{31}{14})^2 + (\frac{67}{14})^2} = \frac{\sqrt{31^2 + 67^2}}{14} = \frac{\sqrt{5450}}{14} = 5 \frac{\sqrt{218}}{14} \approx 5,273$.

c) Déterminer une équation de la droite d'Euler (OH) .

La droite d'Euler passe par O et H . Nous avons une formule pour les coefficients de l'équation réduite $y = fx + g$ de la droite passant par les points de coordonnées $(a; b)$ et $(c; d)$: $f = \frac{b-d}{a-c}$ et $g = \frac{ad-bc}{a-c}$ (voir la feuille

"algorithmique"). Nous pouvons l'utiliser. Cela donne $f = \frac{\frac{53}{14} - \frac{3}{7}}{\frac{45}{14} - \frac{4}{7}} = \frac{\frac{47}{14}}{\frac{47}{14}} = \frac{47}{14} \times \frac{14}{37} = \frac{47}{37} \approx 1,027$, ce qui est un résultat cohérent



avec la pente de la droite rouge sur la figure. Pour l'ordonnée à l'origine, on a $g = \frac{\frac{45}{14} \times \frac{3}{7} - \frac{33}{14} \times \frac{4}{7}}{\frac{45}{14} - \frac{4}{7}} = \frac{-\frac{77}{98}}{\frac{37}{14}} = \frac{-11}{37} \approx -0,297$, ce qui est un résultat cohérent avec l'ordonnée à l'origine de la droite rouge sur la figure.

L'équation de la droite d'Euler est donc $y = \frac{47x-11}{37}$.

d) Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle.

On rappellera ses coordonnées dans le cas général où $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$.

Les coordonnées du centre de gravité G du triangle sont $(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3})$.

Ici, on a $G(\frac{8+1-2}{3} = \frac{7}{3}; \frac{6-1+3}{3} = \frac{8}{3})$.

e) Vérifier que $G \in (OH)$.

Les coordonnées de G doivent vérifier $y = \frac{47x-11}{37}$. Est-ce le cas ? $\frac{47 \times \frac{7}{3} - 11}{37} = \frac{\frac{296}{3} - 11}{37} = \frac{296 - 33}{111} = \frac{263}{111} = \frac{8}{3}$. Oui, le point G est bien sur la droite d'Euler. On le savait pour l'avoir prouvé dans un DM, mais cela rassure pour ces calculs qui sont longs (beaucoup de chances de se tromper en cours de route).

Pour conclure sur ce travail : la méthode analytique en géométrie a certains mérites et certains inconvénients. L'inconvénient principal est sa lourdeur. Les formules sont pratiques, rassurantes mais leur emploi génère souvent des calculs interminables. Cela vous dirait-il de recommencer tout cela (montrer que $G \in (OH)$) dans le cas général, avec des formules qui ne se simplifient jamais (forcément, on ne peut pas mener les calculs car on n'a que des valeurs littérales pour les coordonnées...)?

5. Deux carrés

$ABCD$ et $AEGF$ sont deux carrés.

Les segments $[EB]$ et $[CF]$ se coupent en H .

Prouver que $H \in (GD)$.

Comme cet exercice se trouve dans une feuille intitulée "géométrie analytique" on suppose que la méthode analytique s'impose. Cet exercice peut sans doute être abordé autrement.

Le choix du repère est important en géométrie analytique. Cela peut être choisi de manière à alléger les calculs.

Prenons le repère orthonormé (G, \vec{GA}, \vec{GF}) . On peut supposer que le carré $ABCD$ est le plus petit (sinon on change les lettres). Disons que le carré $GAEF$ a pour côté 1 et que le carré $ABCD$ a pour côté $c < 1$. Dans ces conditions, les coordonnées des points sont :

$G(0; 0)$, $A(1; 0)$, $F(0; 1)$, $E(1; 1)$, $B(1+c; 0)$, $C(1+c; c)$ et $D(1; c)$.

H est l'intersection de (EB) et (CF) .

Il nous faut donc obtenir les équations de ces droites. Reprenons nos formules utilisées plus haut.

Pour (EB) : $y = \frac{1-0}{1-(1+c)}x + (\frac{1 \times 0 - 1 \times (1+c)}{1-(1+c)}) = \frac{-x}{c} + \frac{1+c}{c} = \frac{1+c-x}{c}$.

Pour (CF) : $y = \frac{c-1}{1+c-0}x + (\frac{(1+c) \times 1 - c \times 0}{1+c-0}) = \frac{c-1}{1+c}x + 1$.

L'abscisse de H vérifie donc $\frac{c-1}{1+c}x + 1 = \frac{1+c-x}{c}$, soit

$$c(1+c+(c-1)x) = (1+c-x)(1+c) \Leftrightarrow c(c-1)x = 1+c-x-cx \Leftrightarrow c^2x = 1+c-x \Leftrightarrow (c^2+1)x = 1+c \Leftrightarrow x = \frac{1+c}{c^2+1}.$$

L'ordonnée vaut $y = (1+c - \frac{1+c}{c^2+1}) \div c = \frac{(1+c)(1+c^2) - (1+c)}{c(c^2+1)} = \frac{c^2(c+1)}{c(c^2+1)} = \frac{c(c+1)}{c^2+1}$.

Les coordonnées de H vérifient-elles l'équation de la droite (GD) ?

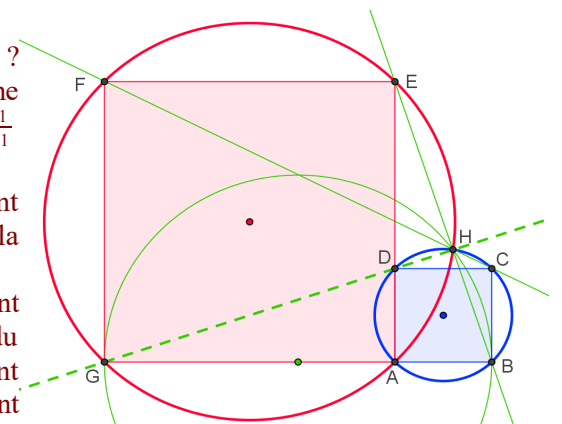
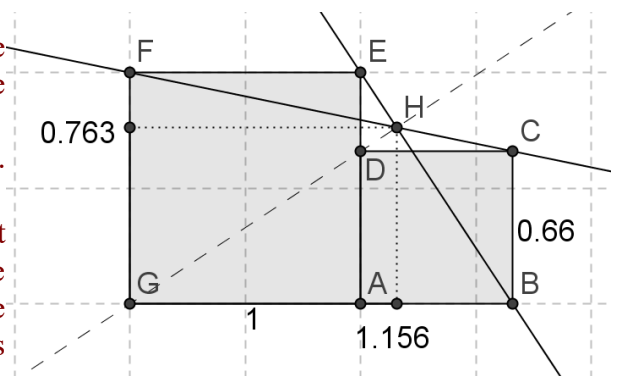
Comme cette droite passe par l'origine, son équation est de la forme $y=ax$. La pente de cette droite est $a = \frac{0-c}{0-1} = c$. On a bien $y = \frac{c(c+1)}{c^2+1} = c \frac{c+1}{c^2+1}$

donc, oui, le point H est bien sur (GD) .

La méthode analytique aboutit souvent alors que le raisonnement purement géométrique est en butte à des difficultés. Comment apporter la preuve ici, sans faire tous ces calculs assez disgracieux ?

On peut déjà remarquer que les triangles ABE et ADG sont superposables : on obtient l'un en faisant tourner l'autre de 90° autour du point A . Les segments $[BE]$ et $[DG]$, les hypoténuses de ces triangles, sont donc perpendiculaires. D est donc sur la perpendiculaire à $[BE]$ passant par G . Pour montrer que H est aussi sur cette perpendiculaire à $[BE]$

passant par G , on peut essayer de prouver ce que l'on voit sur la figure : que H est sur les cercles circonscrits aux deux carrés. On peut essayer pour cela de montrer que $\widehat{EHF} = \widehat{EAF} = 45^\circ$ car, si on arrivait à prouver cela, on en déduirait aussitôt que le point H , interceptant un arc égal à celui qu'intercepte le point A sur le cercle circonscrit à AFE , est sur ce cercle. Comme ce cercle a pour diamètre $[GE]$, on en déduirait alors que le triangle GHE est rectangle en H ce qui



achèverait la démonstration.

Nous allons coder les angles de la figure, en utilisant la même couleur pour les angles complémentaires. Ainsi, \widehat{AEB} et \widehat{EBA} étant complémentaires sont colorés en bleu. De même, les angles \widehat{AGD} et \widehat{GDA} qui sont égaux, respectivement, aux deux précités. Nous avons codé en rouge les angles \widehat{EFN} et \widehat{FNE} du triangle EFN . Dans le triangle DNH , nous retrouvons l'angle rouge $\widehat{DNH} = \widehat{FNE}$ (ils sont opposés par le sommet) et l'angle bleu $\widehat{NDH} = \widehat{GDA} = \widehat{EBA}$ (les deux premiers sont également opposés par le sommet). Nous pouvons en déduire l'angle restant $\widehat{NHD} = 180 - \widehat{DNH} - \widehat{NDH}$, donc $\widehat{NHD} = 180 - \widehat{FNE} - \widehat{EBA} = 180 - (90 - \widehat{EFN}) - (90 - \widehat{AEB}) = \widehat{EFN} + \widehat{AEB}$.

Dans le triangle ENH , on a $\widehat{ENH} = 180 - \widehat{ENF}$ (supplémentaires) et on a l'angle

$$\widehat{EHN} = 180 - \widehat{NEH} - \widehat{ENH} = 180 - \widehat{NEH} - (180 - \widehat{ENF}) = \widehat{ENF} - \widehat{NEH} = (90 - \widehat{EFN}) - \widehat{NEH} = 90 - (\widehat{EFN} + \widehat{AEB}).$$

Tiens, on dirait que c'est fini! $\widehat{DHE} = \widehat{NHD} + \widehat{EHN} = (\widehat{EFN} + \widehat{AEB}) + (90 - (\widehat{EFN} + \widehat{AEB})) = 90^\circ$.

On n'a même pas besoin d'argumenter, comme prévu, pour prouver que \widehat{DHE} est droit ce qui achève la démonstration.

6. Ensembles de points

Soient $A(1; 2)$ et $B(-1; 3)$ deux points.

a) Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $MA^2 + MB^2 = 7$.

$$MA^2 + MB^2 = (1-x)^2 + (2-y)^2 + (-1-x)^2 + (3-y)^2 = 1 - 2x + x^2 + 4 - 4y + y^2 + 1 + 2x + x^2 + 9 - 6y + y^2, \text{ donc}$$

$$MA^2 + MB^2 = 15 + 2x^2 - 10y + 2y^2.$$

On doit avoir $7 = 15 + 2x^2 - 10y + 2y^2$, soit $-8 = 2x^2 - 10y + 2y^2$ ou encore

$$-4 = x^2 - 5y + y^2 = x^2 + (y - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}; \text{ et finalement, } x^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}.$$

Cette égalité est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(0; \frac{5}{2})$ et de rayon $R = \frac{3}{2}$.

L'ensemble des points cherché est donc le cercle de centre Ω et de rayon R .

b) Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $2MA = 3MB$.

Comme les distances sont positives, cette égalité est équivalente à $4MA^2 = 9MB^2$.

$$4(1-2x+x^2+4-4y+y^2) = 9(1+2x+x^2+9-6y+y^2) \text{ et donc}$$

$$4-8x+4x^2+16-16y+4y^2 = 9+18x+9x^2+81-54y+9y^2 \text{ ou encore}$$

$$5+26x+5x^2+65-38y+5y^2=0. \text{ En divisant par 5, on obtient } 5,2x+x^2-7,6y+y^2=-14.$$

Cela peut se mettre sous la forme d'une équation de cercle $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$.

Il suffit de prendre la forme développée $x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y = R^2 - \alpha^2 - \beta^2$, car alors

$$-2\alpha = 5,2 \Leftrightarrow \alpha = -2,6 \text{ et } -2\beta = -7,6 \Leftrightarrow \beta = 3,8.$$

Dans ce cas, $R^2 - \alpha^2 - \beta^2 = R^2 - 2,6^2 - 3,8^2 = R^2 - 21,2$ et comme $R^2 - 21,2 = -14 \Leftrightarrow R^2 = 21,2 - 14 = 7,2$.

L'ensemble des points cherché est le cercle de centre $\Omega'(-2,6; 3,8)$ et de rayon $R' = \sqrt{7,2}$.

c) On considère la droite (AB) et un point F n'appartenant pas à (AB) , prenons $F(2; 4)$. Soit P un point de (AB) , d la médiatrice de $[FP]$ et M le point d'intersection de d et de la droite perpendiculaire à (AB) passant par P .

Réaliser la construction sur GeoGebra. Activer la trace du point M . Faire varier la position de P sur (AB) .

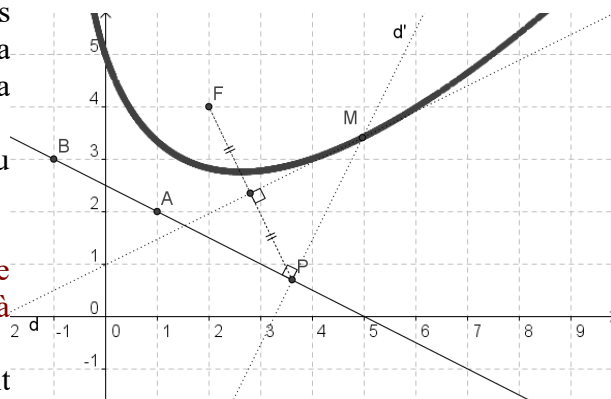
Qu'observe-t-on ?

Les points M semblent dessiner une parabole dont l'axe de symétrie est perpendiculaire à la droite (AB) et le sommet à mi-chemin entre F et cette droite.

Quel est la nature de l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant cette construction ?

Prouver votre affirmation de façon analytique en choisissant bien le repère.

Nous voici devant un problème que nous savons résoudre, à condition d'avoir une parabole dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des ordonnées (dans ce cas, la relation recherchée est une équation du second degré de la forme $y = ax^2 + bx + c$). La relation se simplifie encore lorsque notre axe de symétrie est l'axe des ordonnées lui-même (dans ce cas l'équation devient $y = ax^2$ seulement). Choisissons donc la droite passant par F et perpendiculaire à (AB) (sur notre figure, dans le cas choisi, il s'agit de la droite (AF)) comme axe des ordonnées et la droite (AB) comme axe des abscisses. Les deux axes se coupent en un point O (A sur la figure). O est donc l'origine d'un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF})$ dans lequel les coordonnées des points sont $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(\beta; 0)$, $F(0; 1)$, $P(p; 0)$. Le milieu I de $[FP]$ a pour coordonnées $I(\frac{p}{2}; \frac{1}{2})$, le vecteur \overrightarrow{FP} a pour coordonnées $\overrightarrow{FP}(p; -1)$. Les coordonnées d'un point $M(x; y)$ de la médiatrice de $[FP]$ vérifient l'équation $p(x - \frac{p}{2}) + (y - \frac{1}{2}) = 0$ soit $y = -px + \frac{p^2+1}{2}$. La droite perpendiculaire à (AB) passant par P a pour équation $x = p$. Le point M est l'intersection de ces deux droites. Il a une abscisse $x = p$ et une



ordonnée y égale à $-p^2 + \frac{p^2+1}{2} = \frac{-p^2+1}{2} = \frac{-x^2+1}{2}$. La relation $y = \frac{-x^2+1}{2}$ est l'équation d'une parabole qui a pour sommet le point de coordonnées $(0; \frac{1}{2})$, le milieu du segment $[OF]$ (sur notre figure, le milieu de $[AF]$). Par construction, les points de cette parabole sont à égale distance du point F et de la droite (AB) . Ce point et cette droite sont appelés, respectivement, *foyer* et *directrice* de la parabole.

1) Fractionsa) Simplifier

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{3x - x^2(2x-1)}{3x(x+1)} = \frac{x(3-x(2x-1))}{3x(x+1)} = \frac{3-x(2x-1)}{3(x+1)}$$

On a simplifié par x , ce qui ne peut se faire que si $x \neq 0$.

$$B = \frac{a^2b + 2ac}{3a(1-2a)} = \frac{a(ab+2c)}{3a(1-2a)} = \frac{ab+2c}{3(1-2a)}$$

On a simplifié par a , ce qui ne peut se faire que si $a \neq 0$.

Simplifier les expressions suivantes :

$$C = \frac{2-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}} = \frac{(2-\sqrt{5})(1-2\sqrt{5})}{(1+2\sqrt{5})(1-2\sqrt{5})} = \frac{2-\sqrt{5}-4\sqrt{5}+2 \times 5}{1^2-(2\sqrt{5})^2} = \frac{12-5\sqrt{5}}{-19} = \frac{-12+5\sqrt{5}}{19}, \text{ soit } \frac{-12}{19} + \frac{5\sqrt{5}}{19}$$

$$D = \frac{3-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})} = \frac{3x-x\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3}{x^2-3} = \frac{x(3-\sqrt{3})+3(\sqrt{3}-1)}{x^2-3}$$

b) Mettre sous la forme d'une seule fraction➤ Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule fraction (préciser les valeurs interdites) :

$$E = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x}{(1+x)(1-x)} - \frac{1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1-x-(1+x)}{1^2-x^2} = \frac{1-x-1-x}{1^2-x^2} = \frac{-2x}{1^2-x^2}$$

Il faut signaler ici que l'expression de départ n'est pas définie pour $x = \pm 1$.

$$F = 1 - \frac{2+x}{1-x^2} - \frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x^2} - \frac{2+x}{1-x^2} - \frac{(1+x)^2}{(1+x)(1-x)} = \frac{1-x^2-(2+x)-(1+x)^2}{1-x^2} = \frac{1-x^2-2-x-1-2x-x^2}{1-x^2}$$

$$F = \frac{-2x^2-3x-2}{1^2-x^2} = \frac{2x^2+3x+2}{x^2-1}$$

Ici aussi, on doit avoir $x \neq \pm 1$.

$$G = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \times \frac{2}{x-y} = \frac{y-x}{xy} \times \frac{2}{x-y} = \frac{-2(x-y)}{xy(x-y)} = \frac{-2}{xy}$$

Ici, on doit avoir $x \neq 0$, $y \neq 0$ (pour que G soit définie) et $x \neq y$ (car on a simplifié par $x-y$).

$$H = \frac{1 + \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} - 1} = \frac{\frac{x+y}{x+y} + \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x-y}} = \frac{\frac{2x}{x+y}}{\frac{2y}{x-y}} = \frac{2x(x-y)}{2y(x+y)} = \frac{x(x-y)}{y(x+y)}$$

Ici, on doit avoir $y \neq 0$, $x \neq y$, $x \neq -y$.

$$I = \frac{\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}}{x + \frac{x(x-1)}{x+1}} = \frac{\frac{x(x-1)+x(x+1)}{(x-1)(x+1)}}{\frac{x(x+1)+x(x-1)}{x+1}} = \frac{(x+1)(x(x-1)+x(x+1))}{(x-1)(x+1)(x(x-1)+x(x+1))} = \frac{1}{x-1}$$

La simplification par $x(x-1)+x(x+1)=x(x-1+x+1)=2x^2$ oblige à prendre $x \neq 0$. On a aussi simplifié par $x+1$, donc $x \neq -1$. Et pour que I soit défini, il faut aussi que $x \neq 1$.2) Factorisations/développementsa) Développer puis réduire (si nécessaire)

$$J = (2x-1)(3x+5) = 6x^2 - 3x + 10x - 5 = 6x^2 + 7x - 5$$

$$K = 3x(2x+7) - 4(2x-1)^2 = 6x^2 + 21x - 4(4x^2 - 4x + 1) = 6x^2 + 21x - 16x^2 + 16x - 4 = -10x^2 + 37x - 20$$

$$L = (3x-\sqrt{5})(3x+\sqrt{5}) = 9x^2 - 5 \text{ (direct, c'est une identité remarquable)}$$

b) Factoriser puis réduire dans chacun des facteurs (si nécessaire)

$$M = 3x^2(2x-1) - 12x(2x-1)^2 = 3x(2x-1)(x-4(2x-1)) = 3x(2x-1)(-7x+4)$$

$$N = 9x^2 - 16(2x-1)^2 = (3x-4(2x-1))(3x+4(2x-1)) = (-5x+4)(11x-4)$$

$$O = 1 - x^2 - (x+1)^2 + 2x(x+1) = (x+1)(1-x-(x+1)+2x) = (x+1)(1-x-x-1+2x) = 0$$

Pour aller plus loin :

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Pour que ces fractions existent, il faut que $n \neq 0$ et $n \neq -1$.

Si n est un entier naturel, il faut donc qu'il soit différent de 0.

En déduire la valeur exacte de $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2015 \times 2016}$.

Bien sûr, il faut remplacer toutes les fractions de cette somme par ce qu'apporte la propriété que l'on vient

d'établir : $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, etc. $\frac{1}{2015 \times 2016} = \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}$. On a donc :

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2015 \times 2016} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2016} = \frac{2015}{2016}$$

Vous en voulez encore ?

1) Fractions de sommes d'impairs

a) Comparer $S_1 = \frac{1}{3}$, $S_2 = \frac{1+3}{5+7}$, $S_3 = \frac{1+3+5}{7+9+11}$ et $S_4 = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15}$.

$$S_2 = \frac{4}{12} = \frac{4 \times 1}{4 \times 3} = \frac{1}{3} = S_1, \quad S_3 = \frac{9}{27} = \frac{9 \times 1}{9 \times 3} = \frac{1}{3} = S_1, \quad S_4 = \frac{16}{48} = \frac{16 \times 1}{16 \times 3} = \frac{1}{3} = S_1.$$

Ces quatre nombres sont donc égaux.

b) Montrer que la somme des n premiers entiers impairs $I_n = 1+3+5+\dots+(2n-1)$ vaut n^2

(calculer, en arrangeant les termes pour que cela se simplifie, $2I_n$).

$$2I_n = 1+3+5+\dots+(2n-1) + 1+3+5+\dots+(2n-1) = (1+(2n-1)) + (2+(2n-2)) + \dots + ((2n-1)+1),$$

$$2I_n = (2n) + (2n) + \dots + (2n) = 2n \times n. \text{ Il y a en effet } n \text{ termes dans chacun des deux nombres qu'on ajoute,}$$

terme à terme, tête-bêche (une liste à l'endroit et l'autre à l'envers). Finalement, $2I_n = 2n^2$ et donc $I_n = n^2$.

c) En déduire une formule simple pour $S_n = \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{(2n+1)+\dots+(4n-1)}$ en fonction de n et conclure.

$$S_n = \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{(2n+1)+\dots+(4n-1)} = \frac{n^2}{(2n+1)+(2n+2)+\dots+(2n+(2n-1))} = \frac{n^2}{n \times 2n + I_n} = \frac{n^2}{2n^2 + n^2} = \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3} = S_1$$

2) Nombres triangulaires

a) Exprimer $T_n = 1+2+3+\dots+n$ en fonction de n .

(écrire $2T_n$ en réarrangeant les termes)

$$2T_n = 1+2+3+\dots+n + 1+2+3+\dots+n = (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + \dots + (n+1) = n \times (n+1).$$

Il y a en effet n termes dans chacun des deux nombres qu'on ajoute, terme à terme, tête-bêche (une liste à

l'endroit et l'autre à l'envers). Finalement, $2T_n = n(n+1)$ et donc $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

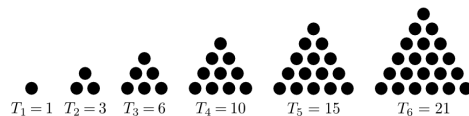
b) Montrer que $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$ (identifier les deux membres).

$$T_n + T_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1) + (n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{2n^2 + 4n + 2}{2}, \text{ d'où}$$

$$T_n + T_{n+1} = \frac{2(n^2 + 2n + 1)}{2} = \frac{2(n+1)^2}{2} = (n+1)^2$$

c) Montrer que $8T_n + 1 = (2n+1)^2$ et aussi que $T_{n+1}^2 - T_n^2 = (n+1)^3$.

$$8T_n + 1 = 8 \frac{n(n+1)}{2} + 1 = 4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2.$$



$$T_{n+1}^2 - T_n^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{((n+1)(n+2))^2 - (n(n+1))^2}{4}, \text{ d'où}$$

$$T_{n+1}^2 - T_n^2 = \frac{((n+1)(n+2) - n(n+1))((n+1)(n+2) + n(n+1))}{4} = \frac{(n+1)(n+2-n)(n+1)(n+2+n)}{4}, \text{ et}$$

$$T_{n+1}^2 - T_n^2 = \frac{2(n+1)^2(2+n)}{4} = \frac{4(n+1)^2(1+n)}{4} = (n+1)^3$$

d) En déduire finalement que $T_n^2 = C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.

(utiliser l'identité précédente pour chaque entier).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = T_1^2 - T_0^2 + T_2^2 - T_1^2 + T_3^2 - T_2^2 + \dots + T_n^2 - T_{n-1}^2 = T_n^2 - T_0^2 = T_n^2, \text{ car } T_0 = 0.$$

Les termes s'annulent deux à deux dans cette somme.

e) Illustrer et vérifier ces relations en complétant le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6
n^3	1	8	27	64	125	216
T_n	1	3	6	10	15	21
T_n^2	1	9	36	100	$15 \times 15 = 225$	$21 \times 21 = 441$
$C_n = 1^3 + \dots + n^3$	1	9	$9 + 27 = 36$	$36 + 64 = 100$	$100 + 125 = 225$	$225 + 216 = 441$

Les nombres notés T_n sont les *nombre triangulaires*.

3) Factoriser/développer

a) Développer puis réduire :

$$H = (a+b)^3 \text{ voir le TD suivant (qui est placé avant)}$$

$$I = (a-b)^3 \text{ voir le TD suivant}$$

$$J = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \text{ voir le TD suivant}$$

b) Factoriser :

$$K = a^3 + b^3 \text{ voir le TD suivant}$$

NB : H, I, J et K sont des *identités remarquables* (que l'on peut retenir par cœur).

c) Applications :

Développer $(1-x)^3$ voir le TD suivant

Factoriser $1-x^3$ voir le TD suivant

Calculer $(1-\sqrt{2})^3$ voir le TD suivant

1) Pratiquer

a) Simplifier l'expression $A = \frac{\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}}{x + \frac{x}{x+1}}$ en précisant la (ou les) valeur(s) interdite(s).

voir la correction dans la partie « Séance de soutien » à la lettre I.

b) Écrire le nombre $B = \frac{2 - \sqrt{5}}{1 + 2\sqrt{5}}$ avec un seul radical au numérateur.

(utiliser la *quantité conjuguée*¹ du dénominateur)

voir la correction dans la partie « Séance de soutien » à la lettre C.

c) Factoriser $C = 1 - x^2 - (x+1)^2 + 2x(x+1)$

voir la correction dans la partie « Séance de soutien » à la lettre O.

2) Raisonner

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Pour que ces fractions existent, il faut que $n \neq 0$ et $n \neq -1$.

Si n est un entier naturel, il faut donc qu'il soit différent de 0.

En déduire la valeur exacte de $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2014 \times 2015}$.

$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2014 \times 2015} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2015} = \frac{2014}{2015}$.

b) Comparer $S_1 = \frac{1}{3}$, $S_2 = \frac{1+3}{5+7}$, $S_3 = \frac{1+3+5}{7+9+11}$ et $S_4 = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15}$.

$S_2 = \frac{4}{12} = \frac{4 \times 1}{4 \times 3} = \frac{1}{3} = S_1$, $S_3 = \frac{9}{27} = \frac{9 \times 1}{9 \times 3} = \frac{1}{3} = S_1$, $S_4 = \frac{16}{48} = \frac{16 \times 1}{16 \times 3} = \frac{1}{3} = S_1$.

Montrer que la somme des n premiers entiers impairs $I_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ vaut n^2

$2I_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = (1 + (2n-1)) + (2 + (2n-2)) + \dots + ((2n-1) + 1)$,

$2I_n = (2n) + (2n) + \dots + (2n) = 2n \times n$. Il y a en effet n termes dans chacun des deux nombres qu'on ajoute,

terme à terme, tête-bêche (une liste à l'endroit et l'autre à l'envers). Finalement, $2I_n = 2n^2$ et donc $I_n = n^2$.

En déduire une formule simple pour $S_n = \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{(2n+1)+\dots+(4n-1)}$ en fonction de n et conclure.

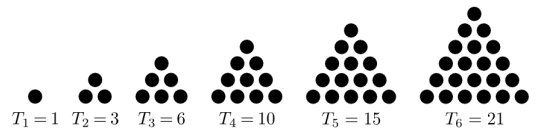
$S_n = \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{(2n+1)+\dots+(4n-1)} = \frac{n^2}{(2n+1)+(2n+2)+\dots+(2n+(2n-1))} = \frac{n^2}{n \times 2n + I_n} = \frac{n^2}{2n^2 + n^2} = \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3} = S_1$

c) Exprimer $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ en fonction de n (calculer $2T_n$).

$2T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + 1 + 2 + 3 + \dots + n = (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + \dots + (n+1) = n \times (n+1)$. Il y

a en effet n termes dans chacun des deux nombres qu'on ajoute, terme à terme, tête-bêche (une liste à l'endroit et l'autre à l'envers). Finalement, $2T_n = n(n+1)$ et donc $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Montrer que $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$ (identifier les deux membres).



$T_n + T_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1) + (n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{2n^2 + 4n + 2}{2}$, d'où

$T_n + T_{n+1} = \frac{2(n^2 + 2n + 1)}{2} = \frac{2(n+1)^2}{2} = (n+1)^2$

Montrer que $8T_n + 1 = (2n+1)^2$ et aussi que $T_{n+1}^2 - T_n^2 = (n+1)^3$.

¹ La *quantité conjuguée* de $a + b\sqrt{c}$ est $a - b\sqrt{c}$; le produit des deux nombres est entier.

$$8T_n + 1 = 8 \frac{n(n+1)}{2} + 1 = 4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2.$$

$$T_{n+1}^2 - T_n^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{((n+1)(n+2))^2 - (n(n+1))^2}{4}, \text{ d'où}$$

$$T_{n+1}^2 - T_n^2 = \frac{((n+1)(n+2) - n(n+1))((n+1)(n+2) + n(n+1))}{4} = \frac{(n+1)(n+2-n)(n+1)(n+2+n)}{4}, \text{ et}$$

$$T_{n+1}^2 - T_n^2 = \frac{2(n+1)^2(2+n)}{4} = \frac{4(n+1)^2(1+n)}{4} = (n+1)^3$$

En déduire finalement que $T_n^2 = C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ (utiliser l'identité précédente pour chaque entier).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = T_1^2 - T_0^2 + T_2^2 - T_1^2 + T_3^2 - T_2^2 + \dots + T_n^2 - T_{n-1}^2 = T_n^2 - T_0^2 = T_n^2, \text{ car } T_0 = 0.$$

Les termes s'annulent deux à deux dans cette somme.

Vérifier si vous souhaitez ces relations en complétant le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6
n^3	1	8	27	64	125	216
T_n	1	3	6	10	15	21
T_n^2	1	9	6×6=36	10×10=100	15×15=225	21×21=441
$C_n = 1^3 + \dots + n^3$	1	9	9+27=36	36+64=100	100+125=225	225+216=441

NB : Les nombres notés T_n sont les *nombres triangulaires*.

1) Puissancesa) Simplifier

Pour simplifier* une expression contenant des puissances, on utilise une des propriétés suivantes :

$$a^n \times a^p = a^{n+p}, \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}, \quad a^n \times b^n = (a \times b)^n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad (a^n)^p = a^{n \times p}.$$

*On cherche à obtenir des expressions sans dénominateur.

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{2^2 \times (5^2)^3}{5^{-3} \times (2^3)^2} = \frac{2^2 \times 5^6}{5^{-3} \times 2^6} = 2^{2-6} \times 5^{6+3} = 2^{-4} \times 5^9$$

$$B = \frac{(10^2)^3}{2^{-4} \times 5^3} = \frac{10^6}{2^{-4} \times 5^3} = \frac{(2 \times 5)^6}{2^{-4} \times 5^3} = \frac{2^6 \times 5^6}{2^{-4} \times 5^3} = 2^{6+4} \times 5^{6-3} = 2^{10} \times 5^3$$

$$C = \frac{(2^{-1} \times 3^2)^2}{(3^2)^3 \times (-6)^{-2}} = \frac{2^{-2} \times 3^4}{3^6 \times 6^{-2}} = \frac{2^{-2} \times 3^4}{3^6 \times (2 \times 3)^{-2}} = \frac{2^{-2} \times 3^4}{3^6 \times 2^{-2} \times 3^{-2}} = 2^{-2+2} \times 3^{4-6+2} = 2^0 \times 3^0 = 1$$

$$D = \frac{(a^{-2})^{-3} \times (-2b^2)^3}{(a^2b)^{-1} \times (ab^3)^2} = \frac{a^6 \times (-2)^3 \times b^6}{a^{-2} \times b^{-1} \times a^2 \times b^6} = -2^3 \times a^{6+2-2} \times b^{6+1-6} = -8a^6b$$

Écrire les nombres suivants sous la forme d'un carré.

$$E = \frac{2^7 \times 3^3}{2^3 \times 3^{-5}} = 2^4 \times 3^8 = (2^2)^2 \times (3^4)^2 = (2^2 \times 3^4)^2$$

$$F = 2^6 \times 3^4 \times 4^3 \times 5^2 = 2^6 \times 3^4 \times (2^2)^3 \times 5^2 = 2^6 \times 3^4 \times 2^6 \times 5^2 = 2^{12} \times 3^4 \times 5^2 = (2^6)^2 \times (3^2)^2 \times (5)^2 = (2^6 \times 3^2 \times 5)^2$$

b) Factoriser/diviser

On utilise les propriétés des puissances ci-dessus pour simplifier les développements/factorisations d'expressions contenant des puissances.

➤ Développer puis réduire :

$$G = 3x^2y(2xy^2 - x^2 + \frac{y}{x}) - 4xy^2(2x^2y - \frac{x^3}{y} + 1) = 6x^3y^3 - 3x^4y + 3xy^2 - 8x^3y^3 + 4x^4y - 4xy^2$$

$$= (6-8)x^3y^3 + (-3+4)x^4y + (3-4)xy^2 = -2x^3y^3 + x^4y - xy^2.$$

$$H = (a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$I = (a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$J = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

➤ Factoriser les identités remarquables suivantes :

$$K = a^3 + b^3 = a^3 - (-b)^3 = (a - (-b))(a^2 + a(-b) + (-b)^2) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

par exemple : $2^3 + 3^3 = (2+3)(2^2 - 2 \times 3 + 3^2) = 5 \times (4 - 6 + 9) = 5 \times 7$, et en effet, $2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35 = 5 \times 7$.

$L = 8(x+4)^5 - (2x+8)^4(x-3)$. Ici la consigne est incorrecte, il faut lire simplement « factoriser »

$$L = 8(x+4)^5 - (2x+8)^4(x-3) = 8(x+4)^5 - 2^4(x+4)^4(x-3) = 8(x+4)^4(x+4-2(x-3)) = 8(x+4)^4(-x+10)$$

NB : H, I, J et K sont des *identités remarquables* (à retenir).

Applications :

Développer $M = (1-x)^3 = 1^3 - 3 \times 1^2 \times x + 3 \times 1 \times x^2 - x^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$

Factoriser $N = 1 - x^3 = 1^3 - x^3 = (1-x)(1^2 - 1 \times x + x^2) = (1-x)(1-x+x^2)$

Calculer

$$(1-\sqrt{2})^3 = (1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2) = (1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2}+2) = (1-\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 3-\sqrt{2}-3\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2 = 5-4\sqrt{2}.$$

2) Racines carréesa) Calculer

On rappelle que si $a \geq 0$ alors $\sqrt{a^2} = a$ et si $a \leq 0$ alors $\sqrt{a^2} = -a$. Par exemple, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2 = -(-2)$.

$$M = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}. \text{ Comme } 3 > \sqrt{5}, \text{ on a } 3-\sqrt{5} > 0 \text{ et donc } \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = 3-\sqrt{5}.$$

De la même façon, comme $3 > \sqrt{5}$, on a $\sqrt{5}-3 < 0$ et donc $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = -(\sqrt{5}-3) = 3-\sqrt{5}$.

Finalement, $M = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = 3-\sqrt{5} + 3-\sqrt{5} = 6-2\sqrt{5}$.

b) Prouver

On rappelle que si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $a=b$ est équivalent à $a^2=b^2$.

Montrer que $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ et aussi que $\sqrt{6+4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$.

Élevons les deux membres de la 1^{ère} égalité au carré (car la somme de nombres positifs est un nombre positif), on a, à gauche $(\sqrt{7+4\sqrt{3}})^2=7+4\sqrt{3}$ et à droite $(2+\sqrt{3})^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$. Ces nombres sont bien égaux, donc l'égalité est vraie.

Élevons les deux membres de la 2^{ème} égalité au carré (car la somme de nombres positifs est un nombre positif), on a, à gauche $(\sqrt{6+4\sqrt{2}})^2=6+4\sqrt{2}$ et à droite $(2+\sqrt{2})^2=4+4\sqrt{2}+2=6+4\sqrt{2}$. Ces nombres sont bien égaux, donc l'égalité est vraie.

Une dernière question : si $a > b$, a t-on $\sqrt{a^2-b^2}=a-b$? Non, en général. Car $a^2-b^2 \neq (a-b)^2$.

Par exemple, avec $a=2$ et $b=0$, a t-on $\sqrt{2^2-0^2}=2-0$? Oui, ici c'est vrai car $b=0$ et $a^2-0^2=a^2=(a-0)^2$.

Expliquer. Ce qui est vrai, c'est $\sqrt{(a-b)^2}=a-b$ (dans le cas où $a > b$, car sinon $\sqrt{(a-b)^2}=b-a$) et souvent, au début, on confond a^2-b^2 et $(a-b)^2$, mais ce n'est pas du tout pareil (sauf quand $b=0$).

1) Pratiquer

a) Simplifier l'expression suivante : $A = \frac{(a^{-2})^{-3} \times (-2b^2)^3}{(a^2b)^{-1} \times (ab^3)^2}$

voir la correction dans la partie « Séance de soutien » à la lettre D.

b) Écrire le nombre suivant sous la forme d'un carré : $B = 2^6 \times 3^4 \times 4^3 \times 5^2$

voir la correction dans la partie « Séance de soutien » à la lettre F.

c) Développer

$C = (a+b)^3$ voir la correction dans la partie « Séance de soutien » à la lettre H.

$D = (a-b)^3$ voir la correction dans la partie « Séance de soutien » à la lettre I.

$E = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ voir la correction dans la partie « Séance de soutien » à la lettre J.

d) En déduire une factorisation de : $F = a^3 + b^3$

voir la correction dans la partie « Séance de soutien » à la lettre K.

NB : C, D, E et F sont des *identités remarquables* (à retenir).

Application1 : Développer puis factoriser :

$$G = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + b^3 - 3b^2c + 3bb^2 - c^3 + c^3 - 3c^2a + 3ca^2 - a^3 \\ = 3(-a^2b + ab^2 - b^2c + bc^2 - c^2a + ca^2) = 3(a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)).$$

La factorisation est partielle mais on ne peut guère faire mieux.

Application2 : Si on sait que $a+b=2$ et que $ab=-2$. Calculer :

$$H = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{2}{-2} = -1.$$

$$I = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 2^2 - 2 \times (-2) = 4 + 4 = 8.$$

$$J = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)((a^2 + b^2) - ab) = 2(8 - (-2)) = 2 \times 10 = 20.$$

2) Raisonner

a) Calculer : $K = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$

voir la correction dans la partie « Séance de soutien » à la lettre M.

b) Montrer que $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$ et aussi que $\sqrt{6+4\sqrt{2}} = 2+\sqrt{2}$.

voir la correction dans la partie « Séance de soutien » question 2b).

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{n+1} - 2^n = 2^n$.

$$2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$$

En déduire la valeur exacte de $S_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$.

D'après la propriété ci-dessus, on peut écrire $S_n = (2^1 - 2^0) + (2^2 - 2^1) + (2^3 - 2^2) + \dots + (2^{n+1} - 2^n)$.

Dans cette somme, les parenthèses ne servent pas à grand-chose (elles indiquent qu'on a remplacé une puissance de 2). En réarrangeant la somme, cela donne :

$$S_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n+1} - (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n).$$

C'est intéressant sous cette forme qui peut s'écrire $(S_{n+1} - 1) - S_n$ ou encore $S_{n+1} - S_n - 1$.

Mais c'est mieux de remarquer que les termes s'annulent deux à deux sauf les extrémités :

$$S_n = -2^0 + (2^1 - 2^1) + (2^2 - 2^2) + (2^3 - 2^3) + \dots + (2^n - 2^n) + 2^{n+1}. \text{ Il reste donc } S_n = -2^0 + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1.$$

$$\text{Testons notre formule : } S_0 = 1 = 2 - 1 = 2^1 - 1. \quad S_1 = 1 + 2 = 3 = 4 - 1 = 2^2 - 1. \quad S_2 = 1 + 2 + 4 = 7 = 8 - 1 = 2^3 - 1.$$

$$S_3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15 = 16 - 1 = 2^4 - 1. \text{ On dirait que c'est bon!}$$

AN : calculer S_{64} (le nombre de grain de riz sur l'échiquier selon la légende : le roi doit donner à l'inventeur du jeu d'échec le nombre de grains sur l'échiquier en mettant 1 grain dans la 1^{ère} case, 2 dans la 2^{ème}, 4 dans la 3^{ème}, et ainsi de suite, en doublant le nombre à chaque case jusqu'à la 64^{ème} case).

$S_{64} = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{64} = 2^{65} - 1$. Combien vaut 2^{65} ? C'est une autre question : ma calculatrice en donne une valeur approchée : $2^{65} \approx 3,68934881 \times 10^{19}$, ce qui s'écrit 36 893 488 100 000 000 000. Les onze derniers chiffres sont faux mais ce n'est pas bien grave.

Si vous voulez la valeur exacte de S_{64} : 36 893 488 147 419 103 231 (calculé avec xcas, logiciel gratuit et très performant qui permet, entre autres, de faire du *calcul formel*, du calcul exact et sans les limitations importantes de la calculatrice ou du tableur).

d) Soit $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$. Développer $(1 + \frac{1}{n-1})(1 + \frac{1}{n})$.

$(1 + \frac{1}{n-1})(1 + \frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n} = \frac{n(n-1) + (n-1) + n + 1}{n(n-1)}$. On a mis au même dénominateur, arrangeons le numérateur : $(1 + \frac{1}{n-1})(1 + \frac{1}{n}) = \frac{n^2 - n + n - 1 + n + 1}{n(n-1)} = \frac{n^2 + n}{n(n-1)} = \frac{n(n+1)}{n(n-1)} = \frac{n+1}{n-1}$, pour $n \neq 0$.

Pour $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$, on définit $P(n) = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})$.

Calculer $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$ et $P(6)$.

$$P(2) = 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad P(3) = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{3 \times 8}{4 \times 9} = \frac{2}{3},$$

$$P(4) = P(3) \times (1 - \frac{1}{4^2}) = \frac{2}{3} \times \frac{15}{16} = \frac{2 \times 15}{3 \times 16} = \frac{5}{8}, \quad P(5) = P(4) \times (1 - \frac{1}{5^2}) = \frac{5}{8} \times \frac{24}{25} = \frac{5 \times 24}{8 \times 25} = \frac{3}{5},$$

$$P(6) = P(5) \times (1 - \frac{1}{6^2}) = \frac{3}{5} \times \frac{35}{36} = \frac{3 \times 35}{5 \times 36} = \frac{7}{12}$$

Montrer que $P(n) = \frac{n+1}{2n}$

1^{ère} méthode : Ce qui apparaît de plus simple est de faire une démonstration par récurrence : on montre que la relation est vraie pour $n=2$ (le début) et ensuite on montre que si elle est vraie pour n alors elle est vraie pour $n+1$. Cela suffit logiquement pour prouver la relation pour tout $n \geq 2$.

$$P(2) = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \times 2}, \text{ ce qui est bien la forme attendue pour } n=2. \text{ Donc la forme proposée est correcte pour } n=2.$$

Supposons que $P(n) = \frac{n+1}{2n}$ et calculons $P(n+1)$.

$$P(n+1) = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})(1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = P(n)(1 - \frac{1}{(n+1)^2}). \text{ Or, } P(n) = \frac{n+1}{2n}.$$

$$\text{Donc : } P(n+1) = (\frac{n+1}{2n})(1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{(n+1)((n+1)^2 - 1)}{2n(n+1)^2} = \frac{(n+1)(n^2 + 2n)}{2n(n+1)^2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2n(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)},$$

ce qui est, très précisément la forme attendue pour $n+1$.

Par conséquent la forme donnée est correcte pour tout $n \geq 2$.

2^{ème} méthode : Il serait bon d'utiliser la propriété qui vient d'être démontrée (car donnée dans le même exercice, elle doit être une sorte d'outil permettant d'arriver à montrer ce que l'on veut, sans utiliser une autre idée de démonstration telle que la démonstration par récurrence, qui est par ailleurs, encore inhabituelle en seconde). Quel est donc le rapport entre $(1 + \frac{1}{n-1})(1 + \frac{1}{n}) = \frac{n+1}{n-1}$ et $P(n) = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})$?

Ce qui apparaît évident est que chacun des facteurs de $P(n)$ est une différence de carrés. Transformons un peu l'écriture donnée pour faire apparaître cela :

$$P(n) = (1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n}). \text{ En réarrangeant les facteurs, on obtient:}$$

$$P(n) = [(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{n})] \times [(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4}) \dots (1 + \frac{1}{n})]. \text{ Ainsi l'identité prouvée juste}$$

avant permet de simplifier la partie de droite du produit $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4}) \dots (1 + \frac{1}{n})$.

- Si n est impair, les termes se groupent par deux en commençant par le début. On a $[(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})][(1 + \frac{1}{4}) \dots (1 + \frac{1}{n})] = \frac{4}{2} \times \frac{6}{4} \times \frac{8}{6} \times \dots \times \frac{n+1}{n-1}$, ce qui se simplifie en $\frac{n+1}{2}$.
- Si n est pair, les termes se groupent par deux en commençant par la fin. On a $(1 + \frac{1}{2})[(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4})][\dots (1 + \frac{1}{n})] = \frac{3}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \dots \times \frac{n+1}{n-1}$, ce qui se simplifie : $\frac{n+1}{2}$.

Il reste à examiner la partie du produit qui reste :

$$(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \text{ qui se simplifie en } \frac{1}{n}. \text{ D'où la formule attendue :}$$

$$\frac{n+1}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}.$$

NB : Cette méthode est plus compliquée que la précédente. La formule mise au point au début nous incite à

l'utiliser mais en réalité, cela complique le travail, car il faut envisager les deux cas (pair ou impair). Il aurait été plus simple de simplifier directement (sans utiliser la propriété) le produit :

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

(simplification de tous les nombre sauf le dernier multiplicateur du numérateur et le premier du dénominateur).

Les propriétés qui ont été utilisées, sans avoir été montrées avant (car presque évidentes), sont les suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \text{ et } 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \text{ (mise au même dénominateur).}$$