Révisions de 2de

le programme

Certaines de ces fiches de révision ont déjà été données mais non corrigées (il me semble) quelques-uns des exercices proposés ne sont pas nouveaux (ils ont été donnés et corrigés ailleurs) mais le but est de maintenir une activité qui invite à consolider et approfondir certaines notions vues cette année. De véritables nouveaux exercices portant sur tous les chapitres du programme de seconde sont en préparation mais il faudra être un peu patient(e) car j'ai aussi prévu de reprendre tout mon cours (pour le simplifier et le clarifier, et aussi l'adapter mieux à ce qui est fait en classe).

Pour ceux qui sont intéressés par ces exercices supplémentaires, rendez-vous en aout. En attendant, traitez ces 9 pages d'exercices (les corrections vont bientôt suivre) et revoyez l'ensemble des tds de cette année (une bonne trentaine de pages). C'est déjà un programme consistant, mais vous pouvez encore compléter cela avec un livre d'exercices corrigés trouvé en librairie pour mieux consolider les bases (même si ils ne visent que les connaissances du programme officiel, un peu en-dessous de ce qu'on a visé, ils donnent des rappels de cours et des exercices corrigés progressifs).

Bonnes vacances (studieuses ou non) à tous!

2^{de} Révisions n°1 : Vecteurs et coordonnées

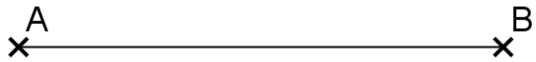
1) Position de point sur une droite

Soient A et B deux points du plan. Déterminer le réel x tel que $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$ dans les cas suivants :

a) $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

b) $2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BM}$

En déduire la position précise du point M sur (AB) dans les deux cas.



2) Position de point sur le plan

Soient A, B et C trois points non-alignés du plan.

Déterminer, si possible, les réels x et y tels que $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ dans les cas suivants :

a) $2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CB}$

c) $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$

e) $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MC}$

En déduire les coordonnées du point M dans le repère (A, B, C)

a) M(...... ; ......) b) M(...... ; ......) c) M(...... ; ......) d) M(...... ; ......) e) M(...... ; ......)

3) Parallélisme

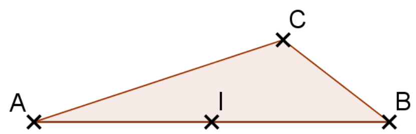
ABC est un triangle.

a) E et F sont des points définis par $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Placer E et F sur la figure.

Montrer que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

En déduire que l'on a $\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{AF}$.

Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?



b) Soit I le milieu de $[AB]$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

En déduire que $(CI)//(AF)$.

4) Alignement

a) A, B et C sont trois points non-alignés du plan ; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=-6\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b) $ABCD$ est un parallélogramme.

I, J et K sont des points définis par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $3\overrightarrow{DJ}=2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

Montrer que I, J et K sont alignés.

5) Centre de gravité

a) Le centre de gravité G du triangle ABC est tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Montrer que, pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

b) On donne $A(-2\ ;\ 7)$, $B(-3\ ;\ 5)$ et $C(4\ ;\ 6)$.

Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

6) Natures de triangles

Quelle est la nature du triangle ABC dans les trois cas suivants :

a) $A(1\ ;-1)$, $B(4\ ;-2)$ et $C(4\ ;3)$

b) $A(-2\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ \sqrt{3})$ et $C(1\ ;-\sqrt{3})$

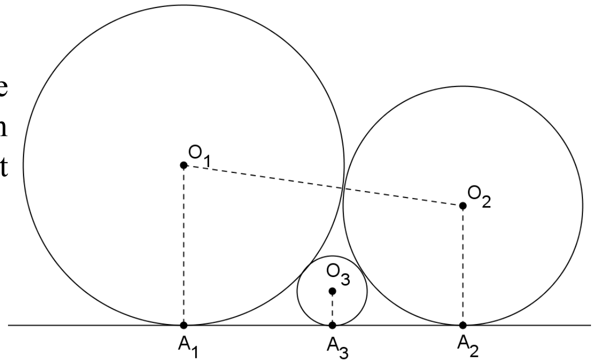
c) $A(2\ ;\ 5)$, $B(-2\ ;-1)$ et $C(-3\ ;\ 4)$

7) Coordonnées

ABCD est un parallélogramme. I est le milieu de [AB]. E est le point tel que $\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$. Déterminer les coordonnées des points de la figure dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Les points A, E et C sont-ils alignés ?

2^{de} Révisions n°2 : Géométrie classique (1)

1. Trois sangakus

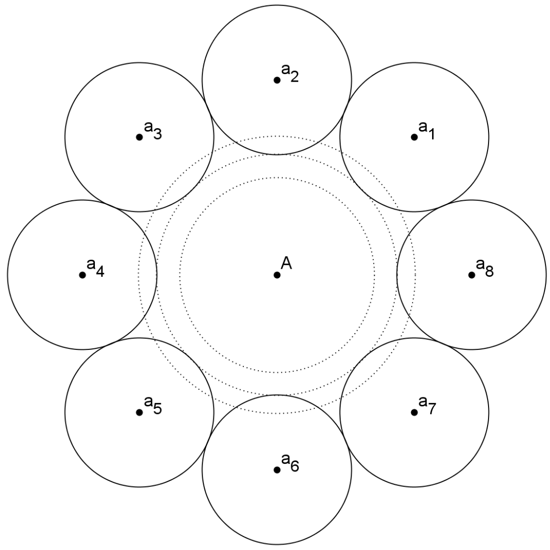


Trois cercles C_1, C_2 et C_3 de centres O_1, O_2 et O_3 et de rayons respectifs R_1, R_2 et R_3 sont tangents à une droite en A_1, A_2 et A_3 et tangents entre eux (C_1 et C_2 extérieurement et C_3 intérieurement à C_1 et C_2.

a) Montrer que $A_1A_2=2\sqrt{R_1R_2}$.

b) Écrire deux autres égalités semblables.

En déduire que $\dfrac{1}{\sqrt{R_3}}=\dfrac{1}{\sqrt{R_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{R_2}}$.



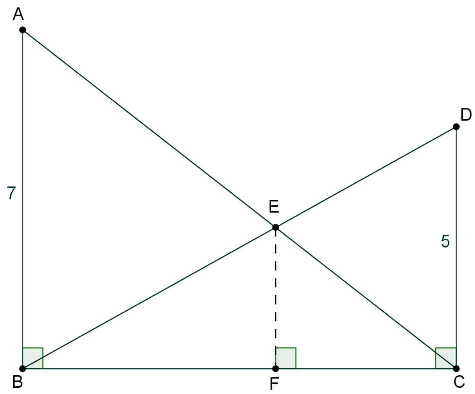
c) On dispose huit boules de même rayon *r* autour d'une boule de rayon *R*, de manière à ce que les neuf boules soient tangentes à un même plan et tangentes entre elles.

On demande de déterminer le rapport $\dfrac{r}{R}$.

On utilisera le 1er sangaku, la vue par dessus de la situation ci-contre et une des versions de la duplication du cosinus :

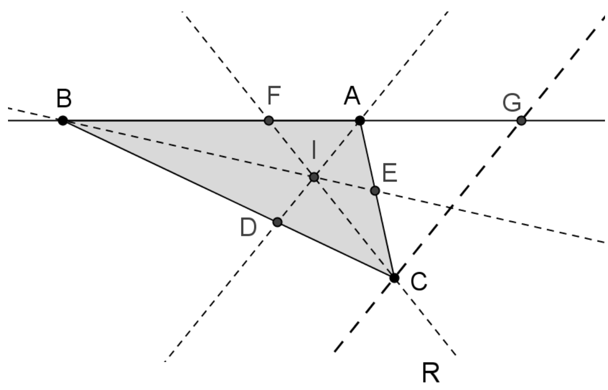
$\cos 2x=2(\cos x)^2-1=(\cos x)^2-(\sin x)^2=1-2(\sin x)^2$

2. Triangles



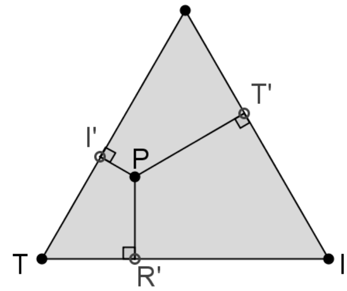
a) *ABC* et *DBC* sont deux triangles rectangles tels que *AB*=7 et *DC*=5. [*BD*] et [*AC*] se coupent en *E*. *F* est le pied de la hauteur issue de *E* dans le triangle *BCE*. Calculer *EF*.

b) *ABC* est un triangle quelconque.
La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe (*BC*) en *D*.
La bissectrice de $\widehat{ABC}$ coupe (*AC*) en *E*.
La bissectrice de $\widehat{BCA}$ coupe (*AB*) en *F*.
La parallèle à (*AD*) passant par *C* coupe (*AB*) en *G*.
Coder la figure ci-contre.
Montrer que le triangle *ACG* est isocèle en *A*.
En posant $k=\frac{BD}{BC}$, montrer que
$DC=BC\times(1-k)$ et $AC=BG\times(1-k)$.



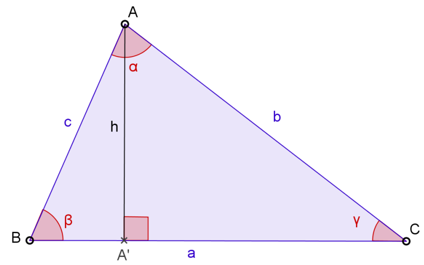
Montrer alors que $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$

On appelle *I* le centre du cercle inscrit au triangle *ABC*.
Évaluer les rapports $\frac{ID}{IA}$, $\frac{IE}{IB}$ et $\frac{IF}{IC}$.
On pourra montrer au préalable que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$
Calculer le produit $P=\dfrac{ID}{IA}\times\dfrac{IE}{IB}\times\dfrac{IF}{IC}$.



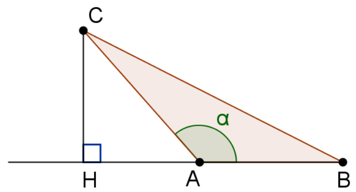
c) *ABC* est un triangle équilatéral de côté *c*.
M est un point quelconque intérieur au triangle.
Exprimer la somme des distances de *M* aux trois côtés de *ABC* en fonction de *c*.

3. Angles d'un triangle



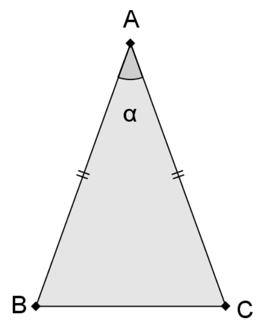
a) *ABC* est un triangle acutangle (trois angles aigus).
L'angle géométrique $\widehat{BAC}$ a pour mesure α, avec $0<\alpha\leq\frac{\pi}{2}$.
Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle *ABC* se calcule par la formule :
$\mathcal{A}=\dfrac{AB\times AC\times\sin\widehat{BAC}}{2}$, notée aussi $\dfrac{bc\sin\alpha}{2}$.

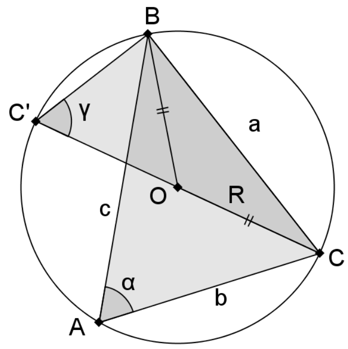
En déduire deux autres expressions de $\mathcal{A}$.



Montrer que, si le triangle *ABC* est obtusangle en *A*, la formule de l'aire mise au point pour un triangle acutangle est encore valable.

b) *ABC* est un triangle isocèle en *A*.
Montrer que la base principale *BC* se calcule à l'aide de la formule suivante : $BC=2\,AB\sin\frac{\alpha}{2}$.



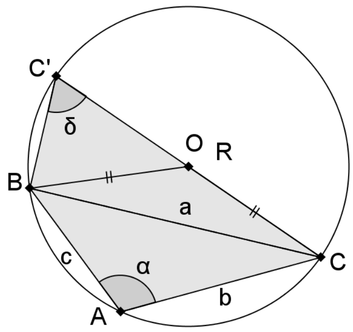


c) *ABC* est un triangle quelconque dont le cercle circonscrit a pour rayon *R*. *O* étant le centre du cercle circonsrit, on note *C'* le symétrique de *C* par rapport à *O*. Justifier que $\widehat{BAC}=\widehat{BC'C}$.

Combien mesure $\widehat{CBC'}$?

Pourquoi ?

Montrer alors que $\sin\widehat{BAC}=\dfrac{BC}{2R}$.



Dans le cas d'un triangle obtusangle, montrer que cette relation reste vraie.

En déduire que, avec les notations précédentes, on a toujours :
$$2R=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

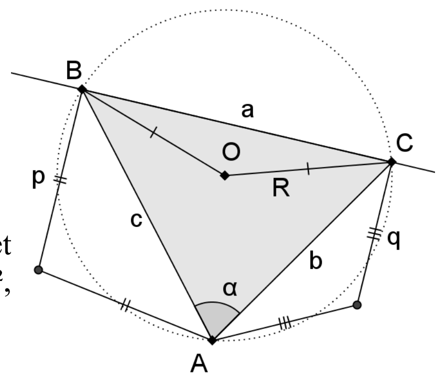
d) L'idée de la démonstration de cette "loi des sinus" (question c) est tirée du livre de H.S.M. Coxeter et S.L. Greitzer "Redécouvrons la géométrie" (*Geometry Revisited,* 1967, édité en France aux éditions Dunod en 1971, puis réimprimé par les éditions Jacques Gabay en 1997). L'ouvrage commence par cette propriété et donne les quatre exemples que voici (on pourra les chercher à titre d'approfondissement) :

- Montrer que dans tout triangle *ABC*, même si l'un des angles *B* et *C* est obtus, on a $a=b\cos\gamma+c\cos\beta$. Appliquer la loi des sinus pour obtenir la "formule d'addition" $\sin(\beta+\gamma)=\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta$.

- Dans tout triangle *ABC*, on a : $a(\sin\beta-\sin\gamma)+b(\sin\gamma-\sin\alpha)+c(\sin\alpha-\sin\beta)=0$.

- Dans tout triangle *ABC*, on a $A_{ABC}=\dfrac{abc}{4R}$.

- Si *p* et *q* sont les rayons de deux cercles passant par un point *A* et tangents en *B* et *C*, respectivement, à la droite (*BC*), on a : $pq=R^2$, *R* étant le rayon du cercle circonsrit au triangle *ABC*.
(la figure n'est pas présente dans le livre et a été ajoutée par mes bons soins)



1. Repère

ABC est un triangle. On se place dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.
Rappeler quelles sont les coordonnées de *A*, *B* et *C* dans ce repère ?

a) *a*, *b* et *c* sont trois réels non nuls tels que $a+b+c\neq 0$.
Soit *M* le point défini par l'égalité $a\vec{MA}+b\vec{MB}+c\vec{MC}=\vec{0}$.
Déterminer les coordonnées de *M* en fonction de *a*, *b* et *c*.

Montrer que (*AM*)//(*BC*) si et seulement si *b*+*c*=0.

b) α est un réel et *P*, *Q* et *R* sont trois points définis par $\vec{CR}=-\alpha\vec{CB}$, $\vec{CQ}=\alpha\vec{CA}$ et $\vec{AP}=\alpha\vec{AB}$.
Déterminer α pour que les points *P*, *Q* et *R* soient alignés et distincts.

2. Représentations paramétriques des droites

a) La droite *D(A,* $\vec{u}$) passe par *A*(3;5) et a pour *vecteur directeur* le vecteur $\vec{u}(-1;2)$.
L'appartenance d'un point *M* à cette droite *D(A,* $\vec{u}$) s'écrit $M\in D\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}, \vec{AM}=\lambda\vec{u}$.
Traduire cette égalité vectorielle par un système d'équations donnant *x* et *y* en fonction de λ
(on appelle un tel système une *représentation paramétrique* de la droite *D*, λ étant le paramètre).

Déterminer une équation cartésienne de *D*.

En déduire l'équation réduite de *D*.

b) La droite *D*' a pour représentation paramétrique le système $\begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = 1-2\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$.
Déterminer deux points de la droite *D*'.
Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de *D*'.
Déterminer une équation cartésienne de *D'*.

En déduire l'équation réduite de D'.

c) D'une façon générale, déterminer une représentation paramétrique et une équation cartésienne de la droite passant par *A*(*a*;*b*) de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta)$.

Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur et une équation cartésienne de la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = a+b\lambda \\ y = c+d\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$.

Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur et une représentation paramétrique de la droite

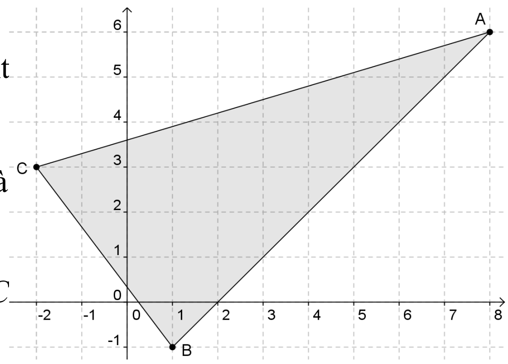
- d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.
- d'équation réduite $y=ax+b$.
- d'équation réduite $x=k$.

3. Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leurs directions sont perpendiculaires.
On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Montrer que le vecteur $\vec{u}(\alpha;\beta)$ est orthogonal au vecteur $\vec{v}(\alpha';\beta')$ si et seulement si $\alpha\alpha'+\beta\beta'=0$.
On utilisera les représentants $\vec{OA}$ *et* $\vec{OB}$ *des vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

b) Donner une équation de la médiatrice de [*AB*] dans le cas général où $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

4. Droite d'Euler



On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Préalable : donner une équation de la perpendiculaire à $[AB]$ passant par C dans le cas général où $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ et $C(x_C ; y_C)$.

Pour éviter des formules générales trop longues et complexes à manipuler, on va étudier un exemple :
Soient $A(8 ; 6)$, $B(1 ; -1)$ et $C(-2 ; 3)$ trois points.
a) Déterminer une équation des hauteurs h_A et h_C du triangle ABC issues de A et de C.

En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle.

b) Déterminer une équation des médiatrices $d_{A'}$ et $d_{C'}$ du triangle ABC des côtés $[BC]$ et $[AB]$.

En déduire les coordonnées du centre O du cercle circonscrit au triangle.

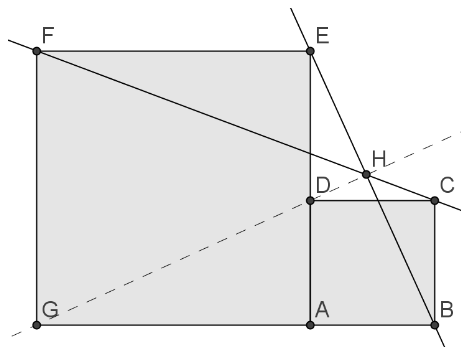
Déterminer au passage le rayon R de ce cercle.

c) Déterminer une équation de la droite d'Euler (OH).

d) Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle.
On rappelera ses coordonnées dans le cas général où $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ et $C(x_C ; y_C)$.

e) Vérifier que $G \in (OH)$.

5. Deux carrés



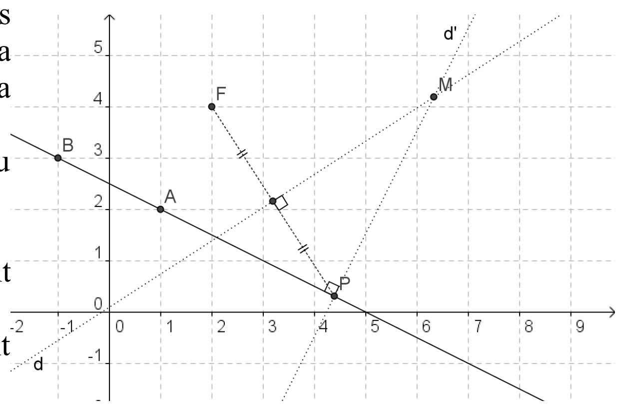
ABCD et *AEFG* sont deux carrés.
Les segments $[EB]$ et $[CF]$ se coupent en H.
Prouver que $H \in (GD)$.

6. Ensembles de points

Soient $A(1 ; 2)$ et $B(-1 ; 3)$ deux points.
a) Déterminer l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $MA^2 + MB^2 = 7$.

b) Déterminer l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $2\,MA = 3\,MB$.

c) On considère la droite (AB) et un point F n'appartenant pas à (AB), prenons $F(2 ; 4$. Soit P un point de (AB), d la médiatrice de $[FP]$ et M le point d'intersection de d et de la droite perpendiculaire à (AB) passant par P.
Réaliser la construction sur GeoGebra. Activer la trace du point M. Faire varier la position de P sur (AB).
Qu'observe t-on ?
Quel est la nature de l'ensemble des points $M(x ; y)$ vérifiant cette construction ?
Prouver votre affirmation de façon analytique en choisissant bien le repère.



2[de]	Révisions n°4 : Transformations algébriques (1)

1) Pratiquer

Pour simplifier une fraction $\frac{a}{b}$, il faut pouvoir trouver un réel k tel que $a=k\,a'$ et $b=k\,b'$. Ainsi on a $\frac{a}{b}=\frac{k\,a'}{k\,b'}=\frac{a'}{b'}$. Par exemple, $\frac{8}{12}=\frac{4\times 2}{4\times 3}=\frac{2}{3}$ (ici k vaut 4), mais aussi $\frac{2x+2}{x^2-1}=\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{x-1}\,(si\;x\neq -1)$.

Simplifier les expressions suivantes :

$$A=\frac{3x-x^2(2x-1)}{3x(x+1)} \qquad B=\frac{a^2b+2ac}{3a(1-2a)}$$

Si a et b sont des entiers, on trouve la fraction irréductible en simplifiant par le PGCD(a;b).

Pour « simplifier » une expression fractionnaire contenant des radicaux, on utilise la *quantité conjuguée*. Par exemple $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{2}+2}{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}+1$. La quantité conjuguée de $a+b\sqrt{c}$ est $a-b\sqrt{c}$.

Simplifier les expressions suivantes :

$$C=\frac{2-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}} \qquad D=\frac{3-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$$

b) Mettre sous la forme d'une seule fraction

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions, il faut qu'elles aient le même dénominateur. Au pire, on a donc : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=\frac{ad+bc}{bd}$. Cette façon de faire est toujours possible, mais parfois on peut faire un peu plus simple : $\frac{1}{8}+\frac{5}{12}=\frac{3}{8\times 3}+\frac{5\times 2}{12\times 2}=\frac{3+10}{24}=\frac{13}{24}$ ou $\frac{1}{8}+\frac{3}{4}=\frac{1}{8}+\frac{3\times 2}{4\times 2}=\frac{1+6}{8}=\frac{7}{8}$, tout dépend du PPCM (Plus Petit Commun Multiple) de b et de d. Pour 8 et 12, le PPCM étant 24, il est inutile de prendre $8\times 12=96$ comme dénominateur... Le PPCM(b;d)= $b\times d$ lorsque PGCD(b;d)=1 (nombres premiers entre eux).

- Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule fraction (préciser les valeurs interdites) :

$$E=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}$$

$$F=1-\frac{2+x}{1-x^2}-\frac{1+x}{1-x}$$

$$G=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\times\frac{2}{x-y}$$

$$H=\frac{1+\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y}-1}$$

$$I=\frac{\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}}{x+\frac{x(x-1)}{x+1}}$$

1) Factorisations/développements

La distributivité de × sur + est la propriété $a\times b+a\times c=a\times(b+c)$ qui se décline avec des signes + ou − : $ab-ac=a(b-c)$ et avec des facteurs plus complexes $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$. Pour développer (transformer un produit en somme), on applique ces règles directement ou on utilise une identité remarquable : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ou $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

a) Développer puis réduire (si nécessaire)

$$J=(2x-1)(3x+5)$$

$$K=3x(2x+7)-4(2x-1)^2$$

$$L=(3x-\sqrt{5})(3x+\sqrt{5})$$

b) Factoriser puis réduire dans chacun des facteurs (si nécessaire)

$$M=3x^2(2x-1)-12x(2x-1)^2$$

$$N=9x^2-16(2x-1)^2$$

$$O=1-x^2-(x+1)^2+2x(x+1)$$

Pour aller plus loin :

Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$.

En déduire la valeur exacte de $S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ ...\ +\frac{1}{2015\times 2016}$.

2^{de}	Transformations algébriques (2)

1) Pratiquer

a) Simplifier l'expression $A=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}}{x+\dfrac{x(x-1)}{x+1}}$ en précisant la (ou les) valeur(s) interdite(s).

b) Écrire le nombre $B=\dfrac{2-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}}$ avec un seul radical au numérateur.
(utiliser la *quantité conjuguée*[1] du dénominateur)

c) Factoriser $C=1-x^2-(x+1)^2+2x(x+1)$

2) Raisonner

a) Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}$.
En déduire la valeur exacte de $S=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\ ...\ +\dfrac{1}{2015\times 2016}$.

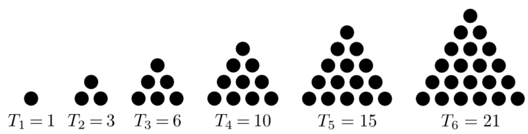
b) Comparer $S_1=\dfrac{1}{3}$, $S_2=\dfrac{1+3}{5+7}$, $S_3=\dfrac{1+3+5}{7+9+11}$ et $S_4=\dfrac{1+3+5+7}{9+11+13+15}$.

Montrer que la somme des *n* premiers entiers impairs $I_n=1+3+5+\ ...\ +(2n-1)$ vaut n^2
(calculer, en arrangeant les termes pour que cela se simplifie, $2I_n$).

En déduire une formule simple pour $S_n=\dfrac{1+3+\ ...\ +(2n-1)}{(2n+1)+\ ...\ +(4n-1)}$ en fonction de *n* et conclure.

c) Exprimer $T_n=1+2+3+\ ...\ +n$ en fonction de *n* (calculer $2T_n$).

Montrer que $T_n+T_{n+1}=(n+1)^2$ (identifier les deux membres).



Montrer que $8T_n+1=(2n+1)^2$ et aussi que $T_{n+1}^{\ 2}-T_n^{\ 2}=(n+1)^3$.

En déduire finalement que $T_n^{\ 2}=C_n=1^3+2^3+3^3+\ ...\ +n^3$ (utiliser l'identité précédente pour chaque entier).

Vérifier si vous souhaitez ces relations en complétant le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6
n^3	1	8	27	64		
T_n	1	3	6	10		
$T_n^{\ 2}$	1	9	36	100		
$C_n=1^3+\ ...\ +n^3$	1	9				

NB : Les nombres notés T_n sont les *nombres triangulaires*.

1 La *quantité conjuguée* de $a+b\sqrt{c}$ est $a-b\sqrt{c}$; le produit des deux nombres est entier.

2^de^ Révisions n°5 : Puissances et racines carrées (1)

1) Puissances

a) Simplifier

Pour simplifier* une expression contenant des puissances, on utilise une des propriétés suivantes : $a^n\times a^p=a^{n+p}$, $\frac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$, $a^n\times b^n=(a\times b)^n$, $\frac{a^n}{b^n}=(\frac{a}{b})^n$, $(a^n)^p=a^{n\times p}$.

*On cherche à obtenir des expressions sans dénominateur.

Simplifier les expressions suivantes :

$A=\frac{2^2\times(5^2)^3}{5^{-3}\times(2^3)^2}$ $\qquad B=\frac{(10^2)^3}{2^{-4}\times5^3}$

$C=\frac{(2^{-1}\times3^2)^2}{(3^2)^3\times(-6)^{-2}}$ $\qquad D=\frac{(a^{-2})^{-3}\times(-2b^2)^3}{(a^2b)^{-1}\times(ab^3)^2}$

Écrire les nombres suivants sous la forme d'un carré.

$E=\frac{2^7\times3^3}{2^3\times3^{-5}}$ $\qquad F=2^6\times3^4\times4^3\times5^2$

b) Factoriser/développer

On utilise les propriétés des puissances ci-dessus pour simplifier les développements/factorisations d'expressions contenant des puissances.

- Développer puis réduire :

$G=3x^2y(2xy^2-x^2+\frac{y}{x})-4xy^2(2x^2y-\frac{x^3}{y}+1)$

$H=8(x+4)^5-(2x+8)^4(x-3)$

$I=(a+b)^3$

$J=(a-b)^3$

$K=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

- En déduire une factorisation de :

$L=a^3+b^3$

- Applications :

Développer $M=(1-x)^3$

Factoriser $N=1-x^3$

Calculer $O=(1-\sqrt{2})^3$

Développer puis factoriser : $P=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

Si on sait que $a+b=2$ et que $ab=-2$. Calculer : $Q=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; $R=a^2+b^2$; $S=a^3+b^3$

c) Pour s'amuser

Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}, 2^{n+1}-2^n=2^n$.

En déduire une expression simple (sans les pointillés) de $T_n=1+2+4+\ ...\ +2^n$.

Application : calculer T_{64} (le nombre de grain de riz sur l'échiquier selon la légende : le roi doit donner à l'inventeur du jeu d'échec le nombre de grains sur l'échiquier en mettant 1 grain dans la 1^ère^ case, 2 dans la 2^ème^, 4 dans la 3^ème^, et ainsi de suite, en doublant le nombre à chaque case jusqu'à la 64^ème^ case).

2) Racines carrées

On rappelle que si $a\geq0$ alors $\sqrt{a^2}=a$ et si $a\leq0$ alors $\sqrt{a^2}=-a$.

De même, si $a\geq0$ et $b\geq0$ alors $a=b\Leftrightarrow a^2=b^2$.

a) Calculer

$U=\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$

b) Prouver

Montrer que $V=\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ et aussi que $W=\sqrt{6+4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$.

1) Pratiquer

a) Simplifier l'expression suivante : $A=\dfrac{(a^{-2})^{-3}\times(-2b^2)^3}{(a^2b)^{-1}\times(ab^3)^2}$

b) Écrire le nombre suivant sous la forme d'un carré : $B=2^6\times3^4\times4^3\times5^2$

c) Développer

$C=(a+b)^3$

$D=(a-b)^3$

$E=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

d) En déduire une factorisation de : $F=a^3+b^3$

NB : C, D, E et F sont des *identités remarquables* (à retenir).

Application1 : Développer puis factoriser : $G=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

Application2 : Si on sait que $a+b=2$ et que $ab=-2$. Calculer :

$H=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

$I=a^2+b^2$

$J=a^3+b^3$

2) Raisonner

a) Calculer : $K=\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$

b) Montrer que $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ et aussi que $\sqrt{6+4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$.

c) Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}, 2^{n+1}-2^n=2^n$.

En déduire la valeur exacte de $S_n=1+2+4+\ ...\ +2^n$.

AN : calculer S_{64} (le nombre de grain de riz sur l'échiquier selon la légende : le roi doit donner à l'inventeur du jeu d'échec le nombre de grains sur l'échiquier en mettant 1 grain dans la 1ère case, 2 dans la 2ème, 4 dans la 3ème, et ainsi de suite, en doublant le nombre à chaque case jusqu'à la 64ème case).

d) Soit $n\in\mathbb{N}-\{0;1\}$. Développer $(1+\dfrac{1}{n-1})(1+\dfrac{1}{n})$.

Pour $n\in\mathbb{N}-\{0;1\}$, on définit $P(n)=(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})(1-\dfrac{1}{4^2})\ ...\ (1-\dfrac{1}{n^2})$.

Calculer $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$ et $P(6)$.

Montrer que $P(n)=\dfrac{n+1}{2n}$