2de	TD n°4 : utilisation de la calculatrice (2)

1) Les modes Graphique et Tableau

a) Mise en mémoire de la fonction

Casio : dans le menu TABLE, entrer l'expression de la fonction à la suite de Y1=...
TI : dans le mode Fct, sélectionner « *f*(*x*) », entrer l'expression de la fonction à la suite de Y1=...
Numworks : dans l'application Fonctions, dans la case de droite entrer l'expression à la suite de f(x) …

Attention : la variable X n'est pas obtenue par « alpha X », mais avec la touche spéciale « X,θ,t ».

- Application : Entrer la fonction (déjà vue) $f(x)=\frac{1}{(5x-2)(2-x)}$

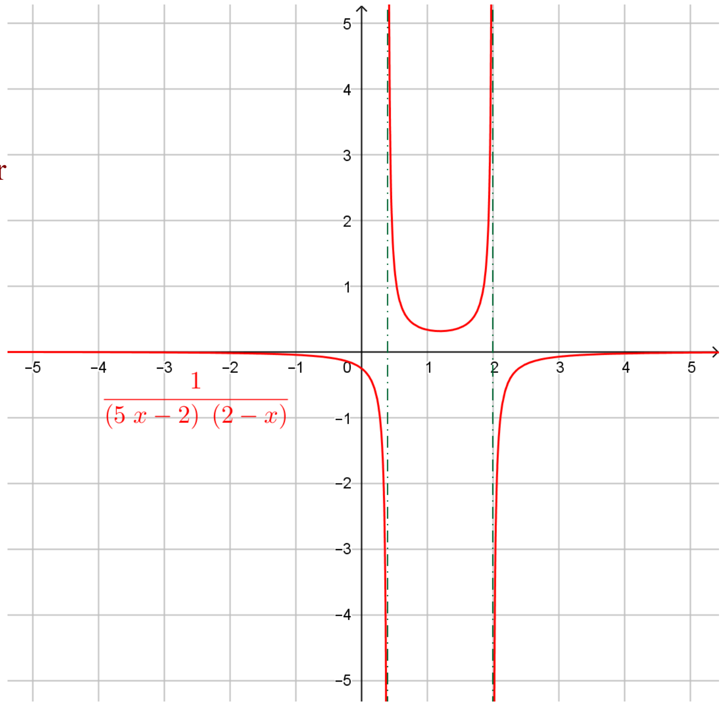
Notez qu'il faut ajouter des parenthèses : on tape Y1=1÷((5×X−2)×(2−X)) ou bien f(x)=...
Notez également qu'on utilise la touche *« X,θ,t ».*
Il est possible que, selon les modèles, on peut supprimer certains symboles × (à tester sur votre calculatrice)

b) Obtenir un graphique

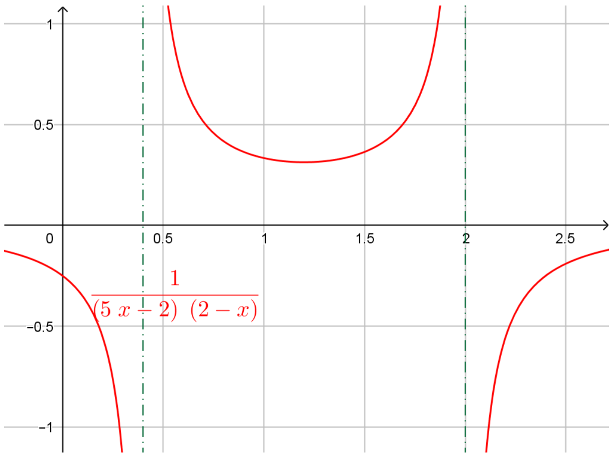
Casio : dans le menu GRAPH, une fois la fonction entrée (par la méthode décrite précédemment), appuyer sur « shift F3 » (v-window). Taper les paramètres de la fenêtre d'affichage (Xmin, Xmax, scl, puis Ymin, Ymax, scl). Valider puis tracer la courbe avec Draw, Trace ou F6.
TI : appuyer sur « fenêtre » puis entrer les paramètres de la fenêtre d'affichage (Xmin, Xmax, Xgrad, puis Ymin, Ymax, scl).
Numworks : sélectionner l'option « Tracer le graphique ». La courbe est tracée mais les paramètres de la fenêtre d'affichage ($x\in[-10;10]$, *y* auto) doivent être changés : entrer dans « Axes » et modifier.

- Application : Obtenir la courbe de la fonction *f* sur [-5;5] avec $y\in[-5;5]$.

On obtient cette courbe (à droite).
À cette échelle, on voit bien l'allure de la courbe.



Zoomer pour centrer *l'observation* sur $x\in[0;2{,}5]$ et $y\in[-1;1]$.
Voilà le produit de ce zoomage qui se focalise sur la partie centrale, la plus intéressante :



c) Obtenir un tableau de valeurs

Casio : dans TABLE, une fois entrée l'expression de la fonction, appuyer sur la touche F5 (set range). Entrer les bornes de l'intervalle [*a*;*b*] qui nous intéresse (Start=*a*, End=*b*) et le pas (Pitch=0,1 pour avoir des valeurs tous les dixièmes). Appuyer ensuite sur la touche F6 (table).
TI : appuyer sur « 2de fenêtre » (def table) puis entrer DebTbl=*a*, pour l'intervalle [*a*;*b*] et le pas (PasTabl=0,1 pour avoir des valeurs tous les dixièmes). Se placer sur « Auto » puis appuyer sur « 2de graphe » (table). On fait ensuite défiler les valeurs du tableau qui ne sont pas limitées par un paramètre.
Numworks : sélectionner l'option « Afficher les valeurs » (depuis la fenêtre graphique, elle s'appelle « Tableau ») et « régler l'intervalle » (par défaut, xDébut=0, xFin=10 et pas=1)

- application : Obtenir un tableau pour la fonction *f* entrée précédemment, sur l'intervalle de définition restreint à [0,5 ; 1,5] tout d'abord avec un pas de 0,1 :

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
f(x)	1,3333333333	0,7142857143	0,5128205128	0,4166666667	0,3636363636	0,3333333333	0,3174603175	0,3125	0,3174603175	0,3333333333	0,3636363636

Ici il y a trop de chiffres. On n'en demande pas tant ! Trois ou quatre suffisent généralement.

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
f(x)	1,333	0,714	0,513	0,417	0,364	0,333	0,317	0,313	0,317	0,333	0,364

- Choisir ensuite un intervalle d'amplitude 0,2 où se situe le minimum sur]0,4 ; 2[, et balayer cet intervalle avec un pas de 0,01 pour affiner la valeur du minimum.

x	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,2	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25
f(x)	0,31373	0,31328	0,31294	0,31270	0,31255	0,31250	0,31255	0,31270	0,31294	0,31328	0,31373

Voilà ! J'ai mis cinq chiffres pour la précision car on veut pouvoir distinguer le minimum (zone en jaune).

- Donner un encadrement le plus précis possible du minimum de f :

D'après le tableau ci-dessus, le minimum est inférieur ou égal à 0,3125 (valeur atteinte pour x= 1,2).

Donner l'encadrement le plus précis possible de la valeur x_0 pour laquelle f atteint son maximum :

Si on cherche la plus grande précision, il faut affiner jusqu'à la limite de détection de ce minimum (lorsqu'on aura 0,3125 pour plusieurs valeurs consécutives de *f(x)*, on ne pourra pas détecter laquelle correspond au minimum).

x	1,1995	1,1996	1,1997	1,1998	1,1999	1,2	1,2001	1,2002	1,2003	1,2004	1,2005
f(x)	0,31250012	0,31250008	0,31250004	0,31250002	0,31250000	0,31250000	0,31250000	0,31250002	0,31250004	0,31250008	0,31250012

Avec le tableur d'OpenOffice, la précision est grande (15 chiffres) mais on voit qu'en affichant 8 chiffres après la virgule, il n'est plus possible de détecter le minimum entre 1,1999 et 1,2001. À cette précision, je donnerai l'encadrement $1{,}1999 \leq x_0 \leq 1{,}2001$, mais en réalité je n'ai pas de certitude. Il se pourrait que x_0 soit inférieur à 1,999 ou supérieur à 1,2001. Pour plus de sécurité, il faut donc affirmer que :

$$1{,}1998 < x_0 < 1{,}2002$$

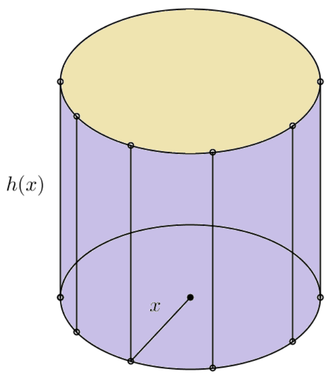
2) Utiliser une fonction pré-enregistrée en mode Programmation

Nous avions jusque là besoin de taper l'expression de la fonction dans le programme. Mais lorsqu'une fonction a été enregistrée comme nous venons de le faire, il est possible de l'utiliser dans un programme.

A→X (utiliser la touche *X,θ,t*) : on affecte la valeur de A à la variable X.

Y_1→D (Y_1 est calculé à partir de la fonction qui a été entrée dans le menu de saisie des fonctions) sur Casio : taper *Vars* F_4 F_1 1 ; sur TI : taper VARS Y_VARS 1 : Fonction « Entrer » 1 : Y1 « Entrer ») ; sur Numworks : il me semble que ce n'est pas (encore) possible d'utiliser la fonction f enregistrée et la fonction copier/coller ne permet pas de faire cela entre les applications « Fonctions » et « Python ».

Entraînement pour le DS : On fabrique une boîte cylindrique de rayon x, de manière à avoir une aire des parois (les deux bases et la face latérale) constante, égale à 1 *dm*². Montrer que la hauteur de la boîte est $h(x)=\frac{1}{2\pi x}-x$ et que le volume de la boîte s'écrit alors $V(x)=\frac{x}{2}-\pi x^3$. Déterminer l'intervalle I dans lequel ces fonctions prennent leurs valeurs. Donner un tableau de valeurs pour la fonction V. Montrer que la fonction V admet un maximum M sur I ? Déterminer au *mm* près, la valeur x_0 de x qui permet d'atteindre ce maximum ? Donner une valeur approchée de $M=V(x_0)$.



L'aire du cylindre de rayon x et de hauteur h est $A=2\pi x^2+h\times 2\pi x$

(le premier terme correspond aux deux bases, le second à l'aire latérale qui est un rectangle de côtés h et $2\pi x$). Comme A=1, on obtient $1-2\pi x^2=h\times 2\pi x$, d'où

$$h=\frac{1-2\pi x^2}{2\pi x}=\frac{1}{2\pi x}-\frac{2\pi x^2}{2\pi x}=\frac{1}{2\pi x}-x$$

Le volume de la boîte est égal à $h\pi x^2=\left(\frac{1}{2\pi x}-x\right)\pi x^2=\frac{\pi x^2}{2\pi x}-x\left(\pi x^2\right)=\frac{x}{2}-\pi x^3$.

Déterminons l'intervalle I dans lequel ces fonctions prennent leurs valeurs.

Ces fonctions sont définies pour $x \geq 0$ car x est une longueur et pour $h \geq 0$ car h est aussi une longueur. Donc $\frac{1}{2\pi x}-x\geq 0$, ce qui s'écrit $\frac{1-2\pi x^2}{2\pi x}\geq 0$.

Comme $x \geq 0$, le dénominateur est positif.

Pour que $h \geq 0$, il faut que $1-2\pi x^2\geq 0$ c'est-à-dire $x^2\leq\frac{1}{2\pi}$ et donc $x\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

La plus grande valeur que peut prendre x est $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0{,}399$.

On pouvait trouver cette valeur en cherchant le rayon x maximum (lorsque h=0) car l'aire est toute entière dans les deux bases et donc on a $2\pi x^2=1$, ce qui conduit à $x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

L'intervalle I est donc $[0 ; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$.

Donnons un tableau de valeurs pour la fonction V.

x	0	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2	0,24	0,28	0,32	0,36	0,4
$V(x)=x/2 -\pi x^3$	0	0,0198	0,0384	0,0546	0,0671	0,0749	0,0766	0,0710	0,0571	0,0334	-0,0011

Pour que ce soit régulier, on a pris un pas de 0,04, ce qui nous conduit à onze valeurs. La dernière (0,04) est en dehors de I de peu (l'image de 0,4 est négative, ce qui ne se peut pas avec une longueur).

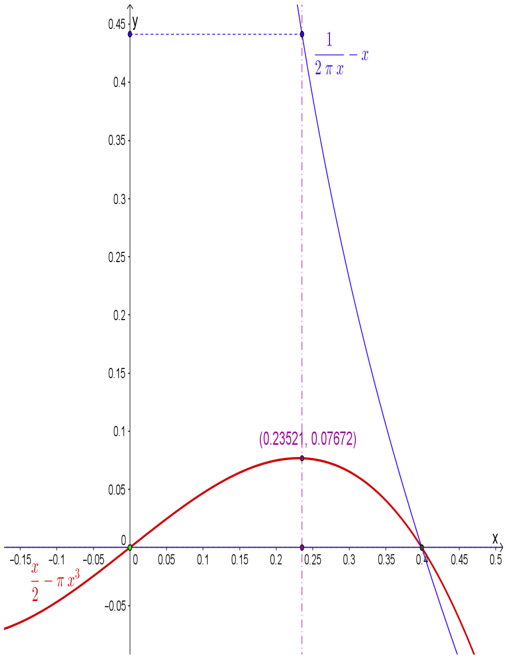
Montrons que la fonction V admet un maximum M sur I.
Les volumes passent de 0 à 0 en restant, évidemment, toujours positifs. Obligatoirement, il doit y avoir un maximum. On voit que ce maximum est approximativement de 0,0766 cette valeur étant atteinte pour x=0,24 dm. En réalité, il faut rechercher ce maximum pour des valeurs de x dans l'intervalle [0,2;0,28].

Déterminons au mm près, la valeur x_0 de x qui permet d'atteindre ce maximum et donnons une valeur approchée de $M = V(x_0)$.

x	0,2	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,3
$V(x)=x/2 -\pi x^3$	0,07	0,0759	0,0765	0,0768	0,0766	0,0759	0,0748	0,0732	0,0710	0,0684	0,0652

Pour déterminer au mm près, la valeur x_0 de x qui permet d'atteindre ce maximum, on a pris un pas de 0,01 (0,01 dm=1 mm). Le maximum, dans ce tableau, a été obtenu pour x=0,23 (bleuté). Si on veut affiner encore (ce n'était pas demandé), au dixième de mm près, la valeur la plus proche de x_0 est 23,0 mm.

x	0,226	0,227	0,228	0,229	0,230	0,231	0,232
$V(x)=x/2 -\pi x^3$	0,076736	0,076753	0,076765	0,076773	0,0767762	0,0767755	0,076770



En première, vous verrez que la valeur x_0 cherchée annule $\frac{1}{2} - 3\pi x^2$.
Cela conduit à la valeur exacte, qui est un nombre irrationnel, $x_0 = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \approx 0{,}230329433$ dm.
Le maximum du volume de la boîte est
$M = V(x_0) \approx \frac{0{,}23}{2} - \pi(0{,}23)^3 \approx 0{,}076776$ dm^3.

<u>Pour information</u> : voici à droite, les courbes de ces fonctions V et h.
La hauteur correspondant au maximum du volume est égale à
$h \approx \frac{1}{2\pi \times 0{,}23} - 0{,}23 \approx 0{,}46$, soit 46 mm.
La valeur exacte est $h = \frac{\sqrt{6\pi}}{2\pi} - \frac{1}{\sqrt{6\pi}} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{\pi}} \approx 0{,}460658866$ dm.
Tant qu'on y est, le rapport *hauteur*/*rayon* est égal à
$\frac{h}{x} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{\pi}} \div \frac{1}{\sqrt{6\pi}} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{\pi}} \times \sqrt{6\pi} = 2$!
Autrement dit, pour une boîte cylindrique dont l'aire des parois est constante, le maximum du volume est atteint lorsque le diamètre et la hauteur sont égaux.

Ce problème a une utilité économique et écologique, par exemple dans la réalisation de boîtes de conserve, canettes, etc. Le matériau des parois ayant un coût, si on veut minimiser ce coût, il faut maximiser le volume contenu par une certaine unité d'aire...