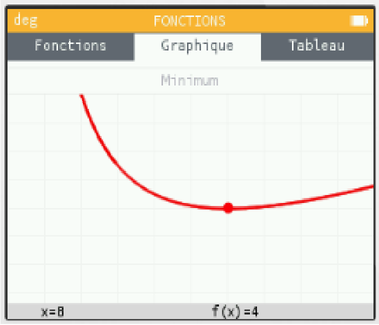
CORRECTION

1) <u>Fonctions</u>



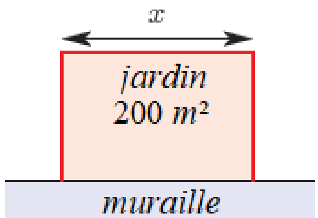
a) Tracer la courbe de la fonction *f* définie par $f(x)=x-7+\frac{9}{x-5}$ pour $x\in]5\ ;\ 10]$, conjecturer l'existence d'un maximum ou d'un minimum ainsi que la valeur *a* de *x* pour laquelle il est atteint, puis démontrer cette conjecture en étudiant *f*(*x*)–*f*(*a*).

La courbe montre un minimum pour *x*=*a*=8, ce minimum étant égal à *f*(*a*)=*f*(8)= $1+\frac{9}{3}$=1+3=4.

Calculons *f*(*x*)–*f*(*a*)=*f*(*x*)–4= $x-11+\frac{9}{x-5}=\frac{(x-11)(x-5)+9}{x-5}=\frac{x^2-16x+64}{x-5}=\frac{(x-8)^2}{x-5}$.

Le numérateur $(x-8)^2$ est positif (c'est un carré) pour tout réel et nul pour *x*=8 ; le dénominateur est nul pour *x*>5. On a donc *f*(*x*)–*f*(*a*)≥0 c'est-à-dire *f*(*x*)≥*f*(*a*) avec égalité pour *x*=8. Cela prouve que 4 est un minimum de *f* sur $]5\ ;\ 10]$, atteint pour *x*=8.

b) On désire clôturer un jardin rectangulaire de 200 *m*² en bordure d'une muraille. La longueur de la clôture *g*(*x*) dépend de la longueur *x* du jardin. Pour minimiser le coût de l'opération, on cherche à déterminer la valeur *a* de *x* qui minimise *g*(*x*).

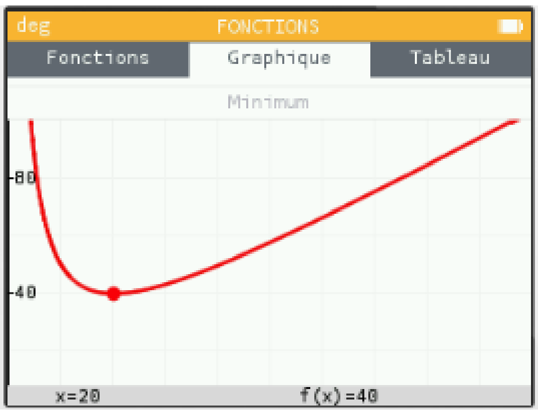


- Montrer que $g(x)=x+\frac{400}{x}$
- Montrer que $(x+\frac{400}{x})^2=(x-\frac{400}{x})^2+m$ où *m* est un nombre indépendant de *x* à déterminer.
- En déduire le minimum de $[g(x)]^2$, puis la valeur *a* de *x* pour laquelle ce minimum est atteint.
- Calculer *g*(*a*) et expliquer pourquoi *g*(*a*) est le minimum cherché.
- Quelles seront finalement les dimensions du jardin ?

La longueur de la clôture est *g*(*x*)=*x*+2*L*, où *L* est la largeur du champ. Comme l'aire de ce champ est 200 *m*², on a *L*×*x*=200 d'où $L=\frac{200}{x}$ et donc la longueur de la clôture est $x+\frac{2\times 200}{x}=x+\frac{400}{x}$.
On en déduit que $g(x)=x+\frac{400}{x}$.

$(g(x))^2=(x+\frac{400}{x})^2=x^2+800+(\frac{400}{x})^2=x^2-800+(\frac{400}{x})^2+1600=(x-\frac{400}{x})^2+1600$ et donc *m*=1600.

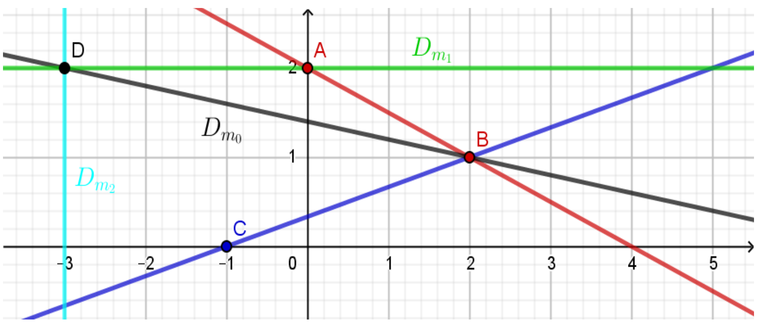
Par conséquent, $(g(x))^2\geq 1600$ avec égalité pour $x-\frac{400}{x}=0\Leftrightarrow x=\frac{400}{x}\Leftrightarrow x^2=400$ (car *g* n'est pas définie pour *x*=0), soit pour $x=\sqrt{400}=20$ car *x*>0 (longueur). La fonction g^2 a un minimum 1600, atteint pour *x*=*a*=20.



$g(a)=g(20)=20+\frac{400}{20}=20+20=40$. La fonction *g* étant positive sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, le minimum de *g* est le minimum de *g*². Le minimum de *g* est donc $g(a)=40$, la clôture minimum mesure 40 *m* de long. On peut vérifier tout cela en traçant la courbe de la fonction *g* sur [0;100]. Le point rouge est ajouté par Numworks quand on demande la localisation du minimum.

Les 40 *m* de clôture se répartissent entre les *a*=20 *m* de long et les deux largeurs de 10 *m* chacune, ce qui fait bien 20×10=200 *m*² et 20+2×10=40 *m*.

2) <u>Droites</u>



a) Déterminer les équations réduites des droites (*AB*) et (*BC*) sachant que $A(0\,;2)$, $B(2\,;1)$ et $C(-1\,;0)$

Pour la droite (*AB*) : $y=\frac{-1}{2}x+2$

Pour la droite (*BC*) : $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

b) m étant un réel quelconque, la droite D_m a pour équation : $y=m(x+3)+2$

- Déterminer m_0 pour que la droite D_{m_0} passe par B.
  Déterminer l'équation réduite de cette droite D_{m_0}, puis tracer sur le graphique cette droite.

Comme $B(2;1)\in D_m$, comme on doit avoir $y_B=m(x_B+3)+2$, m doit vérifier :

$$1=m(2+3)+2=5m+2\Leftrightarrow m=\frac{1-2}{5}=\frac{-1}{5}\text{, donc } m_0=\frac{-1}{5}$$

L'équation de D_{m_0} est $y=\frac{-x+3}{5}+2=\frac{-x}{5}-\frac{3}{5}+2=\frac{-x}{5}+\frac{7}{5}$; je l'ai tracé en noir sur le graphique.

- Déterminer m_1 pour que la droite D_{m_1} soit parallèle à l'axe des abscisses.
  Quelle est l'équation de D_{m_1} ?

Si la droite D_{m_1} est parallèle à l'axe des abscisses, son équation est du type $y=k$ où k est indépendant de x. Comme $y=m(x+3)+2=mx+(3m+2)=k$, on en déduit que, d'une part m=0, et d'autre part $3m+2=k$, d'où k=2. L'équation de D_{m_1} est donc $y=2$; je l'ai tracé en vert.

- Déterminer m_2 pour que la droite D_{m_2} soit parallèle à l'axe des ordonnées.
  Quelle est l'équation de D_{m_2} ?

Si la droite D_{m_2} est parallèle à l'axe des ordonnées, son équation est du type $x=k'$ où k' est indépendant de x. Comme $y=mx+3m+2\Leftrightarrow x=\frac{y-3m-2}{m}=\frac{1}{m}y-3-\frac{2}{m}$, il faudrait que m soit infini et donc que $\frac{1}{m}=0$ pour que la droite D_m soit parallèle à l'axe des ordonnées; on obtient alors l'équation $x=-3$; j'ai tracé en bleu ciel cette droite D_{m_2}.
Remarque : cette valeur de m n'étant pas un nombre défini, la situation verticale est une limite vers laquelle s'approche les droites D_m quand m devient infini (positivement ou négativement). Ceux qui ont répondu qu'il n'existe pas de réel m_2 ont raison. J'ai compté correct les deux réponses.

- Montrer que les droites D_m sont concourantes (passent toutes par un même point) en un point D dont on précisera les coordonnées.

Si les droites D_m sont concourantes en un point D, il ne peut s'agir que du point $D(-3;2)$ qui est l'intersection des trois droites D_m tracées. Vérifions que toutes les droites D_m passent par D :
Remplaçons dans $y_D=m(x_D+3)+2$, les coordonnées de D par leur valeur.
On obtient $2=m(-3+3)+2=0+2=2$ qui est une égalité toujours vraie. Les droites D_m sont donc bien concourantes en $D(-3;2)$.

3) <u>Équations/inéquations</u>

a) Résoudre dans ℝ l'inéquation suivante : $(2x-1)^2>(x+1)^2$

Si $(2x-1)^2>(x+1)^2$, on écrit cette équation comme une différence de carrés et on factorise :
$(2x-1)^2-(x+1)^2>0\Leftrightarrow(2x-1-(x+1))(2x-1+(x+1))>0\Leftrightarrow 3x(x-2)>0$
Ce produit de facteurs est positif quand les facteurs sont du même signe (un tableau de signes c'est bien aussi). Il faut donc avoir x>0 et x>2 ou bien x<0 et x<2, ce qui revient à dire que, soit x>2, soit x<0. Conclusion : il faut que $x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$.

b) Calculer la longueur de chacun des côtés d'un rectangle d'aire 2016 m^2 et de périmètre 190 m.

Un rectangle de dimensions x et y a pour périmètre $2(x+y)$ et pour aire xy. Ici x et y sont donc les solutions positives, si elles existent, du système $2(x+y)=190$ et $xy=2016$.
De la première égalité on tire $y=\frac{190}{2}-x=95-x$ que l'on substitue au y de la seconde qui devient $x(95-x)=2016\Leftrightarrow -x^2+95x=2016\Leftrightarrow x^2-95x+2016=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta=9025-8064=961=31^2>0$, il y a donc deux solutions qui sont $x=\frac{95\pm31}{2}$, soit $\frac{95+31}{2}=\frac{126}{2}=63$ et $\frac{95-31}{2}=\frac{64}{2}=32$. Ces deux solutions étant positives conviennent.
On peut vérifier pour se rassurer : 63×32=2016 et 2×(63+32)=2×95=190.

c) Soit m un nombre réel, et f la fonction définie par $f(x)=mx^2+4x+2(m-1)$.

- Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x)$=0 admet-elle une seule racine ?
  Calculer alors cette racine.

L'équation $m x^2+4x+2(m-1)=0$ a pour discriminant :
$\Delta=4^2-8m(m-1)=-8m^2+8m+16=8(-m^2+m+2)$
Elle n'a qu'une seule solution quand $\Delta=0 \Leftrightarrow -m^2+m+2=0$.
Le discriminant de cette équation du 2^d degré en m est $\Delta'=1^2+4\times 2=9$ qui est positif. Le discriminant Δ s'annule donc pour deux valeurs de m qui sont $m=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{-2}=\frac{1\pm 3}{2}$, soit pour $m=2$ et $m=-1$. La racine unique est alors égale à $x=\frac{-4\pm\sqrt{0}}{2m}=\frac{-2}{m}$.
Si $m=2$ alors cette racine vaut $x=-1$ et si $m=-1$, la racine vaut $x=2$.

- Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x)=0$ admet-elle deux racines distinctes ?

L'équation $f(x)=0$ admet deux racines distinctes quand le discriminant est strictement positif, soit lorsque $-m^2+m+2>0$. Cela arrive pour $-1<m<2$ car le trinôme en m s'annule pour -1 et 2 et, le coefficient de m^2 étant négatif, le trinôme a le signe opposé (donc positif) entre les racines.

- Quel est l'ensemble des réels m pour lesquels $f(x)<0$ pour tout réel x ?

Pour que l'inéquation $m x^2+4x+2(m-1)<0$ soit toujours vraie, il faut que le discriminant soit strictement négatif (le trinôme ne s'annulant pas, il ne peut changer de signe) et que le coefficient de x^2 soit négatif. Donc on doit avoir $m<0$ et $-m^2+m+2<0$. Cette dernière condition implique que $m<-1$ ou $m>2$. L'ensemble des contrainte est satisfait quand $m<-1$, soit $x\in]-\infty;-1[$.