Exercices de révision n°3 : équations et inéquations du second degré

exercices extraits du cours de L.Lemaire

Ex 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x+\dfrac{1}{x}=3$
2) $\dfrac{3x-4}{x+1}=\dfrac{2x+5}{3x+4}$
3) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}=3$
4) $\dfrac{7}{2x+3}+\dfrac{4}{1-3x}=2$
5) $\dfrac{x+3}{x-5}+\dfrac{x+5}{x-3}=2$
6) $x+2+\dfrac{1}{x+3}=3$

Ex 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\sqrt{9-x^2}=2x-3$
2) $\sqrt{x+2}=3x-4$
3) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-5}=7$
4) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x-1}=1$

Ex 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $(2x+3)^2=(x^2-5x+4)^2$
2) $(2x^2-3)^2=(x^2-5x+1)^2$
3) $(2x^2+7x-5)^2=(x^2-3x+5)^2$

Ex 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $x^2+4x-4\leqslant 0$
2) $-x^2+x+6>0$
3) $-2x^2+x+1<0$
4) $2x^2-24x+12<-60$
5) $29x\geqslant x^2-96$
6) $m^2+m-20\leqslant 0$
7) $x^2+\dfrac{5}{2}x+1\geqslant 0$
8) $(2x-1)^2>(x+1)^2$
9) $x^3-5x^2+6x<0$

Ex 9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $(x^2+x+7)(3x-8)\geqslant(-2x+3)(3x-8)$
2) $(x^2-7x+13)(x^2+x+1)>0$
3) $(3x^3-x+1)^2\geqslant(2x^2+9x-4)^2$

Ex 10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\dfrac{3x^2-5x+3}{5x^2-3x+1}\leqslant 0$
2) $\dfrac{-x^2+7x-12}{1-2x}\geqslant 0$
3) $\dfrac{x^3-x}{2x+1}\leqslant 0$
4) $\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{x+1}{x-2}$

Ex 12 Des rectangles...

1) Quelles sont les dimensions d'un rectangle de demi-périmètre 25 m et d'aire 114 m^2 ?
2) Calculer la longueur de chacun des côtés d'un rectangle d'aire 2226 m^2 et de périmètre 221 m.
3) Un rectangle a pour périmètre 34 cm et chacune de ses diagonales a pour longueur 13 cm. Calculer les dimensions de ce rectangle.
4) Inscrire un rectangle de 28 cm de périmètre dans un cercle de 5 cm de rayon.

Ex 21 Dans chaque cas, déterminer la fonction trinôme du second degré f vérifiant les conditions suivantes :

1) $f(2)=0$, $f(-3)=0$ et $f(1)=4$.
2) $f(1)=0$, $f(2)=4$ et $f(3)=14$.
3) $f(1)=3$, $f(2)=3$ et $f(3)=5$.
4) Soit a, b et c trois réels distincts.
   a) $f(a)=b$ et $f(b)=f(c)=0$.
   b) $f(a)=b$, $f(b)=c$ et $f(c)=a$

Ex 22 Soit m un nombre réel, et f la fonction trinôme définie par $f(x)=(m+1)x^2-2mx+m-3$.

1) Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x)=0$ admet-elle une seule racine ? Calculer alors cette racine.
2) Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x)=0$ admet-elle deux racines distinctes ?
3) Quel est l'ensemble des réels m pour lesquels $f(x)<0$ pour tout réel x ?
4) Calculer m pour que l'une des solutions soit $\sqrt{3}$. Calculer l'autre solution.

Ex 23 Soit m un nombre réel, et f la fonction trinôme définie par $f(x)=mx^2+4x+2(m-1)$.

1) Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x)=0$ admet-elle une seule racine ? Calculer alors cette racine.
2) Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x)=0$ admet-elle deux racines distinctes ?
3) Quel est l'ensemble des réels m pour lesquels $f(x)<0$ pour tout réel x ?

Ex 24 Soit m un nombre réel, et f la fonction trinôme définie par $f(x)=(m-6)x^2-2mx+1$.

1) Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x)=0$ admet-elle une seule racine ? Calculer alors cette racine.
2) Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x)=0$ admet-elle deux racines distinctes ?
3) Quel est l'ensemble des réels m pour lesquels $f(x)<0$ pour tout réel x ?

Ex 25 Soit $P(x)=x^4+6x^3-11x^2-60x+100$.

1) a) Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(x)=(ax^2+bx+c)^2$
   b) Résoudre alors l'équation $P(x)=0$.
2) Trouver trois réels a, b, c tels que $x^3+6x^2+6x+5=(x+5)(ax^2+bx+c)$.
3) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction rationnelle f suivante et la simplifier
$$f(x)=\frac{x^4+6x^3-11x^2-60x+100}{x^3+6x^2+6x+5}.$$

Ces notions et méthodes sont assez pointues et spécifiques mais s'appliquent dans de nombreux domaines ; on les a notamment abordées dans le chapitre 3 (TD n°1 pour l'aspect équation) et le chapitre 5 (TD n°1 pour l'aspect fonction). Les méthodes étant les mêmes pour toutes les séries de questions, je n'en corrige que les deux premières de chaque série. NB : Il peut y avoir une(des) erreur(s) de calcul dans ma correction (et oui, personne n'est parfait !) : ne vous affolez pas pour autant, envoyez moi un mail pour que je la(les) corrige... Bonne révision !

Exercice n°5 :

1) Si $x+\frac{1}{x}=3$, on doit avoir $x\neq 0$. À cette condition, l'équation est équivalente à $x^2+1=3x$ (j'ai multiplié par $x\neq 0$), soit $x^2-3x+1=0$. Comme $\Delta=3^2-4\times 1\times 1=9-4=5>0$, cette équation a deux solutions qui sont $x=\frac{3\pm\sqrt{\Delta}}{2\times 1}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Comme aucune de ces solutions n'est nulle, on les accepte toutes les deux et donc $S=\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\}$.

2) Si $\frac{3x-4}{x+1}=\frac{2x+5}{3x+4}$, on doit avoir $x+1\neq 0$ et $3x+4\neq 0$, soit $x\neq -1$ et $x\neq\frac{-4}{3}$. À ces conditions, l'équation est équivalente à $(3x-4)(3x+4)=(x+1)(2x+5)$ (j'ai fait le produit en croix), soit $9x^2-16=2x^2+7x+5\Leftrightarrow 7x^2-7x-21=0\Leftrightarrow x^2-x-3=0$. Comme $\Delta=1^2-4\times 1\times(-3)=1+12=13>0$, cette équation a deux solutions qui sont $x=\frac{1\pm\sqrt{\Delta}}{2\times 1}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. Comme aucune de ces solutions n'est égale aux valeurs interdites (-1 et $-\frac{4}{3}$), on les accepte toutes les deux et donc $S=\{\frac{1-\sqrt{13}}{2};\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\}$.

Exercice n°6 :

1) Si $\sqrt{9-x^2}=2x-3$, on doit avoir $9-x^2\geq 0\Leftrightarrow 9\geq x^2\Leftrightarrow -3\leq x\leq 3$ (penser à la courbe ou au tableau de variation de la fonction carré). À cette condition, l'équation a du sens pour un réel x donné. Comme la racine carrée d'un nombre positif est positive, on doit avoir également $2x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{3}{2}$. Finalement, il faut que $\frac{3}{2}\leq x\leq 3$. C'est à cette condition que l'équation revient à $9-x^2=(2x-3)^2$ (j'ai élevé l'équation au carré), soit $9-x^2=4x^2-12x+9\Leftrightarrow 5x^2-12x=0\Leftrightarrow x(5x-12)=0$. Ne pas calculer le discriminant quand il y a une factorisation évidente ! Il y a donc deux solutions à cette équation (0 et $\frac{12}{5}=2{,}4$) mais une seule vérifie la condition $\frac{3}{2}\leq x\leq 3$. On a donc $S=\{\frac{12}{5}\}$.

2) Si $\sqrt{x+2}=3x-4$, on doit avoir $x+2\geq 0\Leftrightarrow x\geq -2$ et $3x-4\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{4}{3}$, soit $x\geq\frac{4}{3}$. À cette condition, l'équation revient à $x+2=(3x-4)^2=9x^2-24x+16$ (j'ai élevé l'équation au carré), soit $9x^2-25x+14=0$. Comme $\Delta=25^2-4\times 9\times 14=121=11^2>0$, cette équation a deux solutions qui sont $x=\frac{25\pm 11}{18}$, soit $x=\frac{14}{18}=\frac{7}{9}$ et $x=\frac{36}{18}=2$ mais une seule vérifie la condition $x\geq\frac{4}{3}$. On a donc $S=\{2\}$.

3) Si $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-5}=7$, on doit avoir $x+2\geq 0\Leftrightarrow x\geq -2$ et $3x-5\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{5}{3}$, soit $-2\leq x\leq\frac{5}{3}$. À cette condition, l'équation revient à $(x+2)+(3x-5)+2\sqrt{x+2}\sqrt{3x-5}=7^2\Leftrightarrow 4x-3+2\sqrt{(x+2)(3x-5)}=49$ (j'ai élevé l'équation au carré), soit $\sqrt{(x+2)(3x-5)}=\frac{49-(4x-3)}{2}=\frac{52-4x}{2}=26-2x$. Nous revoilà avec une inéquation comportant une racine carrée, mais cette fois il n'y en a qu'une et on va pouvoir la faire disparaître en élevant une seconde fois au carré. Petite précaution $26-2x$ est-il toujours positif ? Résolvons cette petite inéquation supplémentaire : $26-2x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 13$. Cette dernière condition ne restreint pas davantage les valeurs acceptables ($-2\leq x\leq\frac{5}{3}$) mais il fallait s'en assurer. Élevons maintenant l'inéquation au carré, on obtient :

$$(x+2)(3x-5)=(26-2x)^2\Leftrightarrow 3x^2+x-10=676+4x^2-104x\Leftrightarrow x^2-105x+686=0$$

Le discriminant de cette gentille équation étant $\Delta=105^2-4\times 686=8281=91^2>0$, il y a deux solutions qui sont $x=\frac{105+91}{2}=\frac{196}{2}=98$ et $x=\frac{105-91}{2}=\frac{14}{2}=7$. Ces deux solutions satisfont-elles les contraintes ? Non, aucune des deux. Il n'y a pas de solution.

Exercice n°7 :

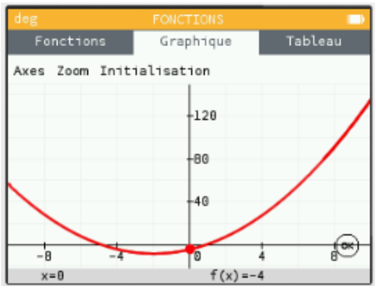
1) Si $(2x+3)^2=(x^2-5x+4)^2$, on ne peut pas enlever le carré sans précaution. Il est plus sage d'écrire cette équation comme une différence de carrés et de factoriser :
$(2x+3)^2-(x^2-5x+4)^2=0\Leftrightarrow(2x+3-(x^2-5x+4))(2x+3+(x^2-5x+4))=0$
On doit donc résoudre l'équation $(-x^2+7x-1)(x^2-5x+7)=0$ qui est vérifiée si et seulement si l'un ou l'autre des facteurs est nul. L'équation $-x^2+7x-1=0$ a deux solutions $x=\frac{-7\pm\sqrt{49-4}}{2\times(-1)}=\frac{7\pm\sqrt{45}}{2}$ tandis que l'équation x^2-5x+7 n'en a aucune car $\Delta=25-28=-3<0$. On a donc $S=\{\frac{7-\sqrt{45}}{2}\ ;\ \frac{7+\sqrt{45}}{2}\}$.

Remarquons qu'ici l'équation qui donne les solutions correspond à $2x+3=x^2-5x+4$ (l'équation de départ sans *les carrés) mais cela ne veut pas dire que c'est vrai à chaque fois...comme le montre l'équation suivante.*

2) Si $(2x^2-3)^2=(x^2-5x+1)^2$, on écrit cette équation comme une différence de carrés et on factorise : $(2x^2-3)^2-(x^2-5x+1)^2=0 \Leftrightarrow (2x^2-3-(x^2-5x+1))(2x^2-3+(x^2-5x+1))=0$

On doit donc résoudre l'équation $(x^2+5x-4)(3x^2-5x-2)=0$ qui est vérifiée si et seulement si l'un ou l'autre des facteurs est nul. L'équation $x^2+5x-4=0$ a deux solutions $x=\frac{-5\pm\sqrt{25+16}}{2\times1}=\frac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$ de même que l'équation $3x^2-5x-2=0$ dont les solutions $x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2\times3}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{5\pm7}{6}$.

On a donc quatre solutions, $S=\{\frac{-5-\sqrt{41}}{2} ; \frac{-5+\sqrt{41}}{2} ; \frac{-1}{3} ; 2\}$.



Exercice n°8 :

1) Pour résoudre l'inéquation $x^2+4x-4\leq0$, on commence par résoudre l'équation $x^2+4x-4=0$ qui a deux solutions $x=\frac{-4\pm\sqrt{16+16}}{2}=2\pm2\sqrt{2}$. Comme le coefficient de x^2 est positif, la parabole d'équation $y=x^2+4x-4$ a ses branches tournées vers le haut, et les points d'ordonnées négatives sont situés entre les solutions de l'équation, soit $-2-2\sqrt{2}\leq x\leq-2+2\sqrt{2}$ ou approximativement $-4{,}83\leq x\leq0{,}83$ ce qui se vérifie sur la calculatrice.

2) Pour résoudre l'inéquation $-x^2+x+6>0$, on commence par résoudre l'équation $-x^2+x+6=0$ qui a deux solutions $x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{-2}=\frac{1\pm5}{2}$, soit -2 et 3 . Comme le coefficient de x^2 est négatif, la parabole d'équation $y=-x^2+x+6$ a ses branches tournées vers le bas, et les points d'ordonnées positives sont situés entre les solutions de l'équation (rappel : entre les solutions de l'équation, le signe est toujours le signe opposé à celui de *a*, le coefficient de x^2), soit $-2\leq x\leq3$.

Exercice n°9 :

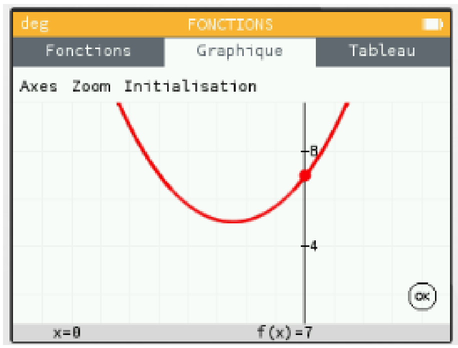
1) Pour résoudre l'inéquation $(x^2+x+7)(3x-8)\geq(-2x+3)(3x-8)$, on ne peut pas simplifier par $3x-8$ sans précaution :

- si $3x-8>0 \Leftrightarrow x>\frac{8}{3}$ alors l'inéquation est équivalente à $x^2+x+7\geq-2x+3 \Leftrightarrow x^2+3x+4\geq0$. Le trinôme ne s'annulant jamais (car $\Delta=9-16=-7<0$), il garde le même signe positif (pour x=0, on a $0^2+3\times0+4=4\geq0$). Cette inéquation étant toujours vraie, les solutions vérifient $x>\frac{8}{3}$.
- si $3x-8<0$ alors l'inéquation est équivalente à $x^2+x+7\leq-2x+3 \Leftrightarrow x^2+3x+4\leq0$. D'après ce qu'on a vu, il n'y a aucune valeur qui vérifie cette inégalité. L'inéquation n'a alors pas de solution.
- si $3x-8=0 \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$ alors l'inéquation est toujours vérifiée (car $0\leq0$ est toujours vrai).

La méthode la plus efficace consiste en une factorisation, l'inéquation s'écrivant :

$$(3x-8)[(x^2+x+7)-(-2x+3)]\geq0 \Leftrightarrow (3x-8)(x^2+3x+4)\geq0$$

Le trinôme qui est dans le second facteur ayant un discriminant négatif ($\Delta=9-16=-7<0$) reste du même signe positif (pour x=0, on a $0^2+3\times0+4=4\geq0$) et donc l'inéquation est équivalente à $3x-8\geq0$. Les solutions de l'inéquation de départ vérifient donc $x\geq\frac{8}{3}$.



2) Pour résoudre l'inéquation $(x^2-7x+13)(x^2+x+1)>0$, on peut penser faire un tableau de signes pour traiter les différents cas. Le trinôme $x^2-7x+13$ ne s'annulant jamais (car $\Delta=49-52=-3<0$), il garde le même signe positif (pour x=0, on a $0^2-7\times0+13=13\geq0$). L'expression a donc le signe du 2ème trinôme (x^2+x+1), mais celui-là aussi ne s'annule jamais (car $\Delta=1-4=-3<0$) et garde le même signe positif (pour x=0, on a $0^2+1\times0+1=1\geq0$). L'inéquation est donc toujours vraie (voir la courbe pour vérification).

Exercice n°10 :

1) Le signe d'un quotient s'étudie comme le signe d'un produit. La méthode générale sera un tableau de signes. Ici le numérateur est le trinôme $3x^2-5x+3$ qui ne s'annule jamais (car $\Delta=25-36=-11<0$) et qui garde le même signe positif (pour x=0, on a $3\times0^2-5\times0+3=3\geq0$). Le quotient a donc le signe du dénominateur. Celui-ci est $5x^2-3x+1$ et il ne s'annule jamais non plus (car $\Delta=9-20=-11<0$) et garde le même signe positif (pour x=0, on a $5\times0^2-3\times0+1=1\geq0$). Le quotient est donc toujours strictement positif. L'inéquation n'a pas de solution.

2) Le numérateur du quotient est ici le trinôme $-x^2+7x-12$ qui peut s'annuler car $\Delta=49-48=1>0$). Il

garde le signe opposé du coefficient de x^2, donc le signe +, entre les solutions qui sont $x=\frac{-7\pm\sqrt{1}}{-2}$, soit 3 et 4. On peut alors vérifier que le trinôme s'écrit $-(x-3)(x-4)$ et utiliser cette forme factorisée pour déterminer le signe du trinôme, mais ce n'est pas nécessaire si on se rappelle que $a\,x^2+b\,x+c$ est du signe opposé à celui de a entre les solutions de l'équation $a\,x^2+b\,x+c=0$ (entre les « racines » du trinôme).
Le dénominateur est l'expression affine $1-2x$ qui s'annule pour $x=\frac{1}{2}$ et qui est positive pour $x\leq\frac{1}{2}$ (car la coefficient de x étant négatif, l'expression affine est négative pour les valeurs de x supérieures à la racine). Dressons maintenant un tableau de signes.

x		$\frac{1}{2}$		3		4	
$-x^2+7x-12$	-	-	-	0	+	0	-
$1-2x$	+	0	-	-	-	-	-
$\frac{-x^2+7x-12}{1-2x}$	-	||	+	0	-	0	+

L'inéquation est vérifiée pour x appartenant à l'ensemble $S=\left]\frac{1}{2}\ ;\ 3\right]\cup\left[4\ ;\ +\infty\right[$.

<u>Exercice n°12</u> :
1) Un rectangle de dimensions x et y a pour demi-périmètre $x+y$ et pour aire xy. Ici x et y sont donc les solutions positives si elles existent du système $x+y=25$ et $xy=114$.
De la première égalité on tire $y=25-x$ que l'on substitue au y de la seconde qui devient $x(25-x)=114\Leftrightarrow x^2-25x+114=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta=625-456=169=13^2>0$, il y a donc deux solutions qui sont $x=\frac{25\pm13}{2}$, soit $\frac{25+13}{2}=\frac{38}{2}=19$ et $\frac{25-13}{2}=\frac{12}{2}=6$.
Ces deux solutions étant positives conviennent. On remarque que si $x=6$ alors $y=25-6=19$ et réciproquement si $x=19$ alors $y=25-19=6$. Ceci est normal puisque dans les expressions $x+y$ et xy on peut permuter x et y (l'addition et la multiplication sont deux opérations commutatives).

2) Un rectangle de dimensions x et y a pour périmètre $2(x+y)$ et pour aire xy. Ici x et y sont donc les solutions positives, si elles existent, du système $2(x+y)=221$ et $xy=2226$.
De la première égalité on tire $y=\frac{221}{2}-x$ que l'on substitue au y de la seconde qui devient $x\left(\frac{221}{2}-x\right)=2226\Leftrightarrow x(221-2x)=4452\Leftrightarrow 2x^2-221x+4452=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta=48841-35616=13225=115^2>0$, il y a donc deux solutions qui sont $x=\frac{221\pm115}{4}$, soit $\frac{25+13}{2}=\frac{38}{2}=19$ et $\frac{221-115}{4}=\frac{106}{4}=26{,}5$. Ces deux solutions étant positives conviennent. On peut vérifier pour se rassurer : $84\times26{,}5=2226$ et $2\times(84+26{,}5)=2\times110{,}5=221$.

<u>Exercice n°21</u> :
1) On sait que la courbe est une parabole ayant un axe de symétrie vertical et un maximum obtenu pour $x=\frac{-b}{2a}$. Si on a deux valeurs de x qui ont même image, et c'est le cas ici, la valeur $x=\frac{-b}{2a}$ se situe au milieu. Puisque $f(2)=f(-3)=0$ alors on sait que $\frac{-b}{2a}=\frac{2+(-3)}{2}=\frac{-1}{2}$, autrement dit $a=b$. L'équation de la courbe est donc $y=a\,x^2+a\,x+c$. Les équations vérifiées par a et c sont $a\times2^2+a\times2+c=0\Leftrightarrow6a+c=0$ et $a\times1^2+a\times1+c=4\Leftrightarrow2a+c=4$. De cette dernière je tire $c=4-2a$ que je reporte dans la 1ère $6a+(4-2a)=0\Leftrightarrow4a+4=0\Leftrightarrow a=-1$. On en déduit que $c=4-2a=4+2=6$; l'équation cherchée est donc $y=-x^2-x+6$.
Vérifions : $f(2)=-2^2-2+6=0$, $f(-3)=-(-3)^2+3+6=0$ et $f(1)=-1^2-1+6=4$.

2) Comme on ne peut pas faire comme précédemment ici, on va écrire le système des trois équations que doit vérifier les coefficients a, b et c de l'équation cherchée.
$$\begin{cases} a\times1^2+b\times1+c=0 & (L_1)\\ a\times2^2+b\times2+c=4 & (L_2)\\ a\times3^2+b\times3+c=14 & (L_3)\end{cases}\text{, soit }\begin{cases} a+b+c=0 & (L_1)\\ 4a+2b+c=4 & (L_2)\\ 9a+3b+c=14 & (L_3)\end{cases}$$
Écrivons, à la place de (L_2), l'équation $(L'_2)=(L_2)-4(L_1)$ et, à la place de (L_3), l'équation $(L'_3)=(L_3)-9(L_1)$. Ceci, dans le but de supprimer le coefficient a des deux dernières équations.

$$\begin{cases} a & +b & +c= & 0 & (L_1) \\ & +2b-4b & +c-4c= & 4-0 & (L'_2) \\ & +3b-9b & +c-9c= & 14-0 & (L'_3) \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} a & +b & +c= & 0 & (L_1) \\ & -2b & -3c= & 4 & (L'_2) \\ & -6b & -8c= & 14 & (L'_3) \end{cases}.$$

Cette méthode, qui s'appelle *méthode des combinaisons linéaires* [il s'agit de combiner plusieurs lignes pour simplifier le système, sachant que si on a deux égalités (L_1) et (L_2) on peut obtenir l'égalité supplémentaire (L')=α(L_1)+β(L_2) pour tout couple (α,β) de réels. Dans cette méthode, appliquée à un système de trois équations, on remplace (L_2) et (L_3) par des combinaisons de ces lignes avec (L_1) faisant disparaître une des inconnues ; puis on réitère le procédé pour faire disparaître une 2ème inconnue entre ces deux dernières équations], peut être continuée pour éliminer *b* entre les deux dernières lignes. Pour cela je vais former la ligne (L''_3)=3(L'_2)–(L'_3) :

$$\begin{cases} a & +b & +c= & 0 & (L_1) \\ & -2b & -3c= & 4 & (L'_2) \\ & & -9c+8c= & 12-14 & (L''_3) \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} a & +b & +c= & 0 & (L_1) \\ & -2b & -3c= & 4 & (L'_2) \\ & & -c= & -2 & (L''_3) \end{cases}.$$

On trouve alors *c*, puis en remontant *b* et enfin *a* :

$$\begin{cases} a & +b & +2= & 0 & (L_1) \\ & -2b & -6= & 4 & (L'_2) \\ & & c= & 2 & (L''_3) \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} a-5 & +2= & 0 & (L_1) \\ b & = & -5 & (L'_2) \\ c= & & 2 & (L''_3) \end{cases} \text{ et finalement } \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \\ c=2 \end{cases}.$$

L'équation de la parabole est donc $y=3x^2-5x+2$. Vérifions : $f(1)=3\times1^2-5\times1+2=3-3=0$, $f(2)=3\times2^2-5\times2+2=12-10+2=4$ et $f(3)=3\times3^2-5\times3+2=27-15+2=14$.

NB : la méthode utilisée ici peut être remplacée par une autre, plus familière : la *méthode de substitution*. Avec cette méthode, quand il y a trois équations, on commence par exprimer une inconnue à partir des deux autres, ici on tire de (L_1) l'égalité $a=-b-c$. Ensuite, on reporte cette expression dans les deux autres équations. On obtient ainsi $4(-b-c)+2b+c=4\Leftrightarrow-2b-3c=4$ à la place de (L_2) et $9(-b-c)+3b+c=14\Leftrightarrow-6b-8c=14$ à la place de (L_3). Il suffit alors d'exprimer *b* en fonction de *c* dans (L_2) : $b=-2-\frac{3}{2}c$, et de remplacer *b* par cette valeur dans (L_3) : $-6\left(-2-\frac{3}{2}c\right)-8c=14\Leftrightarrow c=2$. On retrouve les valeurs ensuite de *b* et de *a* en remontant, comme dans l'autre méthode.

<u>Exercice n°22</u> :

1) Les antécédents de 0 par la fonction *f* définie par $f(x)=(m+1)x^2-2mx+m-3$ sont les solutions d'une équation du second degré de discriminant :

$$\Delta=(-2m)^2-4\times(m+1)(m-3)=4m^2-4(m^2-2m-3)=8m+12$$

Si ce discriminant est nul alors il n'y a qu'une seule racine.

Cela arrive quand $8m+12=0\Leftrightarrow m=\frac{-12}{8}=\frac{-3}{2}$, et l'équation devient alors :

$$\frac{-1}{2}x^2+3x-\frac{9}{2}=0\Leftrightarrow x^2-6x+9=0\Leftrightarrow(x-3)^2=0$$

Cette équation a pour seule solution $x=3$ (on aurait pu aussi écrire directement la solution avec la formule).

2) Si le discriminant est strictement positif alors il y a deux racines distinctes. Cela arrive lorsque $m>\frac{-3}{2}$.

Les solutions sont alors $x=\dfrac{2m\pm\sqrt{8m+12}}{2(m+1)}=\dfrac{m\pm\sqrt{2m+3}}{m+1}$ (j'ai simplifié par 2).

3) Pour que $f(x)<0$ pour tout réel *x*, il faut que $a=m+1$ soit négatif (afin que les branches de la parabole soient tournées vers le bas) et aussi que le trinôme ne s'annule pas (afin de ne pas avoir des valeurs positives ou nulles), ce qui est obtenu lorsque $\Delta=8m+12<0$, soit lorsque $m<\frac{-3}{2}$. Pour que, simultanément, on ait $m+1<0\Leftrightarrow m<-1$ et $m<\frac{-3}{2}$, il faut et il suffit que $m<\frac{-3}{2}$.

4) Si une des solutions est $\sqrt{3}$, le trinôme peut s'écrire $f(x)=(m+1)(x-\sqrt{3})(x-\alpha)$ (je garde le coefficient de x^2 devant et je factorise le reste à droite de ce coefficient ; puisqu'il s'annule pour $x=\sqrt{3}$ un des facteurs doit être $(x-\sqrt{3})$ et l'autre est un facteur du 1er degré qui s'annule pour une valeur α à préciser). Développons cette expressions et identifions les termes de même degré :

$$(m+1)(x-\sqrt{3})(x-\alpha)=(m+1)x^2-(m+1)(\alpha+\sqrt{3})x+\sqrt{3}\alpha(m+1)$$

Le coefficient constant est $\sqrt{3}\alpha(m+1)$ qui doit être égal à $m-3$, d'où

$$\sqrt{3}\alpha(m+1)=m-3\Leftrightarrow\alpha=\frac{m-3}{\sqrt{3}(m+1)}=\frac{\sqrt{3}(m-3)}{3(m+1)}$$

Il faut également que les termes de degré 1 correspondent, soit $-(m+1)(\alpha+\sqrt{3})=-2m$, ce qui conduit à

$$\alpha+\sqrt{3}=2\frac{m}{m+1}\Leftrightarrow\alpha=\frac{2m}{m+1}-\sqrt{3}$$

Le paramètre m doit donc vérifier :

$$\frac{2m}{m+1}-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}(m-3)}{3(m+1)}\Leftrightarrow\frac{6m-\sqrt{3}(m-3)}{3(m+1)}=\sqrt{3}\Leftrightarrow 6m-\sqrt{3}(m-3)=3\sqrt{3}(m+1)\Leftrightarrow(6-4\sqrt{3})m=0\Leftrightarrow m=0$$

Remarque : cette valeur était évidente quand on veut simplement qu'une solution soit égale à $\sqrt{3}$ car les solutions générales étant $x=\frac{m\pm\sqrt{2m+3}}{m+1}$, il suffit de prendre m=0 pour que cela convienne. Mais de cette façon, est-on certain qu'il n'y a pas d'autres réponses possibles pour m ?

L'autre solution de l'équation est $-\sqrt{3}$.