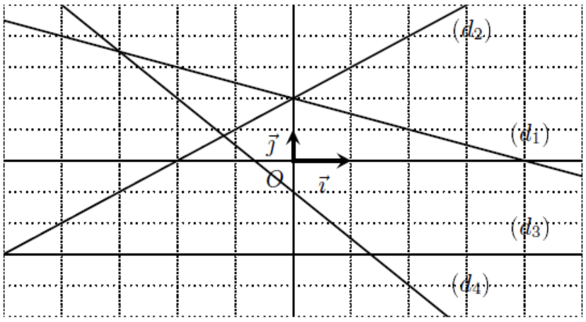
Exercices de révision n°2 : Equations de droite

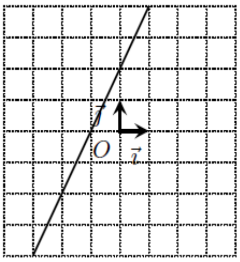
exercices extraits du cours de L. Lemaire

Ex 41 Déterminer une équation des droites représentées ci-contre. Puis tracer sur le même graphique les droites :

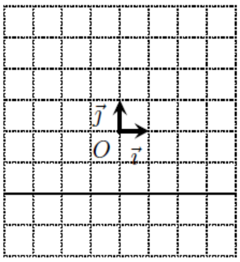
$(d_5) : y = -\frac{1}{4}x - 3 \quad (d_6) : x - y = 2 \quad (d_7) : 2x + 3y - 5 = 0$



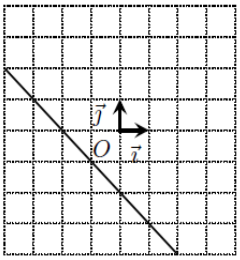
Ex 42 Déterminer graphiquement l'équation réduite de la droite.



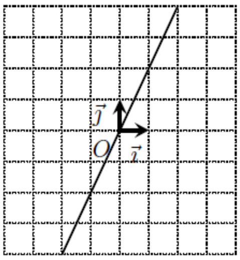
$y =$ ....



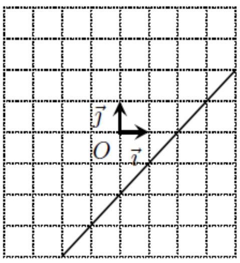
$y =$ ....



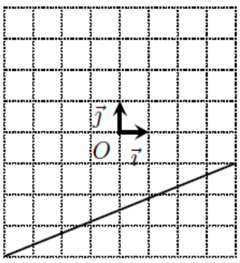
$y =$ ....



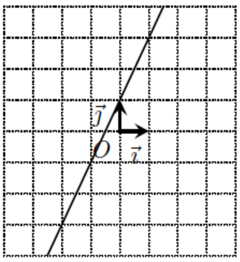
$y =$ ....



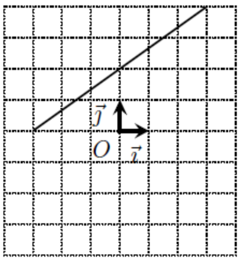
$y =$ ....



$y =$ ....



$y =$ ....



$y =$ ....

Condition de parallélisme

Ex 43 Déterminer le parallélisme des droites suivantes :

- $(D_1) \; : \; \sqrt{2}x + (\sqrt{2} - 1)y = 2$
- $(D_2) \; : \; (2 + \sqrt{2})x - y = 2\sqrt{2}$
- $(D_3) \; : \; (2 - \sqrt{2})x + (2\sqrt{2} - 3)y = \sqrt{2} - 1$
- $(D_4) \; : \; x + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) y = \sqrt{2}$

Ex 44 Dans chaque cas, donner une équation cartésienne de la parallèle à la droite Δ passant par A.

1) $A(1;1)$
$\Delta : \; 2x - 3y + 2 = 0$

2) $A(2;-2)$
$\Delta : \; y = 3x - 2$

3) $A(3;4)$
$\Delta : \; y = 4$

4) $A(4;-7)$
$\Delta : \; x + 4 = 0$

5) $A(5;8)$
$\Delta \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

6) $A(6;-1)$
$\Delta : \; \frac{x}{-2} + \frac{y}{7} = 1$

Problèmes

Ex 51 Soient les points $A(1;-2)$, $B(0;3)$, $C(-1;0)$. I est le milieu de $[AB]$, J celui de $[BC]$ et K celui de $[AC]$.

1) Calculer les coordonnées de I, de J et de K.

2) Écrire les équations des droites (IC), (JA) et (KB).

3) Calculer les coordonnées de G intersection de (IC) et (JA).

4) Montrer que G appartient à (KB)

Ex 52 À tout réel m, on associe le droite (D_m) d'équation : $(2m-1)x + (5-m)y - 7m + 6 = 0$.

1) Déterminer m pour que :

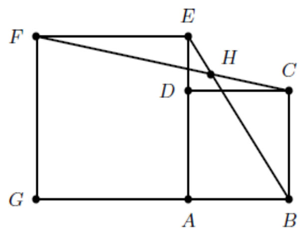
- **a)** (D_m) passe par le point $A(1;1)$.
- **b)** (D_m) passe par l'origine O de repère.
- **c)** (D_m) soit parallèle à l'axe des abscisses.
- **d)** (D_m) soit parallèle à l'axe des ordonnées.

2) Montrer qu'il existe un point K qui appartient à toutes les droites (D_m).

3) On donne $\Delta : \; 3x + 2y = 6$.
Déterminer m pour que (D_m) soit parallèle à Δ.

Ex 55 $ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés.

Les droites (EB) et (FC) se coupent en H.
Montrer que G, D et H sont alignés.



Ces notions sont transversales, nous les avons notamment abordées en introduction du chapitre sur les vecteurs (TD n°1).

Exercice n°43 :

On a vu une méthode en classe : « déterminer la pente de chaque droite », mais pour comparer les pentes entre elles ici (avec les racines carrées) cela demande de transformer les nombres obtenus pour qu'ils soient sous la même forme (sans racines carrées au dénominateur).

(D_1) : Exprimons y en fonction de x : $y=\frac{2-\sqrt{2}x}{\sqrt{2}-1}$, la pente est $a=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ mais pour la comparer avec les autres, on l'écrit $\frac{-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{-2-\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-(1)^2}=-(2+\sqrt{2})$.

(D_2) : Exprimons y en fonction de x : $y=(2+\sqrt{2})x-2\sqrt{2}$, la pente est $a=2+\sqrt{2}$.

(D_3) : Exprimons y en fonction de x : $y=\frac{-(2-\sqrt{2})x-\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-3}$,

la pente est $a=\frac{-(2-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}-3}=\frac{(\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}+3)}{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)}=\frac{(3-4)\sqrt{2}+2(\sqrt{2})^2-6}{(2\sqrt{2})^2-(3)^2}=\frac{-\sqrt{2}-2}{8-9}=\sqrt{2}+2$.

(D_4) : Exprimons y en fonction de x : $y=\frac{\sqrt{2}-x}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2(\sqrt{2}-x)}{2+\sqrt{2}}$,

la pente est $a=\frac{-2}{2+\sqrt{2}}=\frac{-2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{-4+2\sqrt{2}}{(2)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{-4+2\sqrt{2}}{2}=-2+\sqrt{2}$.

Sauf erreur de ma part, les droites (D_2) et (D_3) sont parallèles car elles ont même pente. Les autres droites ne sont parallèles à aucune autre droite.

Une autre méthode : « déterminer un vecteur directeur de la droite » et pour comparer les directions des droites, on calcule le déterminant des vecteurs (s'il est nul, les droites sont parallèles). Rappelons que la droite d'équation $ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$.

(D_1) : Donnons un vecteur directeur $\vec{u_1}(-(\sqrt{2}-1)\,;\sqrt{2})=(1-\sqrt{2}\,;\sqrt{2})$

(D_2) : Donnons un vecteur directeur $\vec{u_2}(1\,;2+\sqrt{2})$

(D_3) : Donnons un vecteur directeur $\vec{u_3}(-(2\sqrt{2}-3)\,;2-\sqrt{2})=(3-2\sqrt{2}\,;2-\sqrt{2})$

(D_4) : Donnons un vecteur directeur $\vec{u_4}(-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\,;1)$

Pour savoir quelles droites sont parallèles, il y a beaucoup de vérifications à faire...

Vérifions juste que (D_2) et (D_3) sont parallèles :

$det(\vec{u_2}\,;\vec{u_3})=(2+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})=6-2(\sqrt{2})^2+(3-4)\sqrt{2}=2-\sqrt{2}-2+\sqrt{2}=0$.

Le déterminant des vecteurs directeurs de (D_2) et (D_3) étant nul, les droites sont bien parallèles.

Exercice n°44 :

Encore une fois, il y a plusieurs méthodes. Utilisons l'équation réduite dont le coefficient a donne la pente.

1) L'équation de Δ est $y=\frac{2x+2}{3}$ dont la pente $a=\frac{2}{3}$. La parallèle d_1 à Δ passant par $A(1\,;1)$ a pour équation $y=\frac{2}{3}x+b_1$ où b_1 vérifie $1=\frac{2}{3}+b_1\Leftrightarrow b_1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. L'équation réduite de d_1 est donc $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ et on peut donner comme équation cartésienne $3y=2x+1\Leftrightarrow 2x-3y+1=0$.

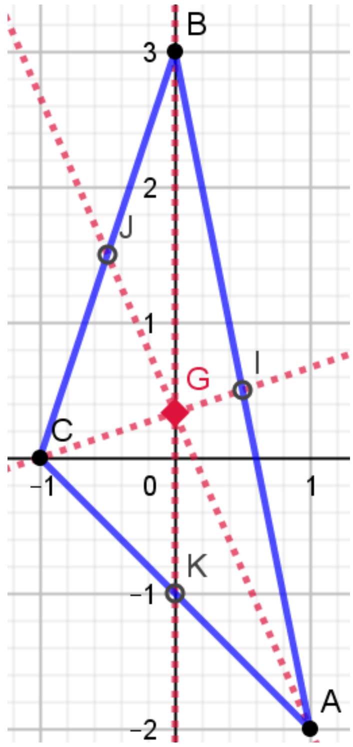
2) L'équation de Δ est $y=3x-2$ dont la pente $a=3$. La parallèle d_2 à Δ passant par $A(2\,;2)$ a pour équation $y=3x+b_2$ où b_2 vérifie $2=3\times2+b_2\Leftrightarrow b_2=2-6=-4$. L'équation réduite de d_2 est donc $y=3x-4$ et on peut donner comme équation cartésienne $3x-y-4=0$.

3) L'équation de Δ est $y=4$ dont la pente $a=0$. La parallèle d_3 à Δ passant par $A(3\,;4)$ est la droite Δ elle-même car A vérifie l'équation de Δ : $y_A=4$.

4) L'équation de Δ est $x=-4$ qui est une droite verticale (parallèle à (Oy)). La parallèle d_4 à Δ passant par $A(4\,;-7)$ est la droite d'équation de Δ : $x=4$ ou $x-4=0$.

5) L'équation de Δ est donnée sous une forme paramétrique, le paramètre m décrivant $\mathbb{R}$. Traduisons cette définition sous la forme réduite : la 1^ère équation nous donne $t=3-x$ que l'on reporte dans la 2^de : $y=2+3(3-x)=2+9-3x=11-3x$. La pente est donc $a=-3$ et la parallèle d_5 à Δ passant par $A(5\,;8)$ a pour équation $y=-3x+b_5$ où b_5 vérifie $8=-3\times5+b_5\Leftrightarrow b_5=8-15=-7$. L'équation réduite de d_5 est donc $y=-3x-7$ et on peut donner comme équation cartésienne $3x+y+7=0$.

6) L'équation de Δ est $-7x+2y=14$ (j'ai multiplié tout par 14 pour supprimer les dénominateurs), soit $y=\frac{7}{2}x+7$ dont la pente $a=\frac{7}{2}$. La parallèle d_6 à Δ passant par $A(6\,;-1)$ a pour équation $y=\frac{7}{2}x+b_6$ où b_6 vérifie $-1=\frac{6\times7}{2}+b_6\Leftrightarrow b_6=-1-21=-22$. L'équation réduite de d_6 est donc $y=\frac{7}{2}x-22$ et on peut donner comme équation cartésienne $7x-2y-44=0$.



Exercice n°51 :

$A(1;-2)$, $B(0;3)$, $C(-1;0)$.

1) Les coordonnées du milieu I de $[AB]$ sont $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, soit $I\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

De même, on a $J\left(\frac{x_B+x_C}{2};\ \frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$ et $K\left(\frac{x_A+x_C}{2};\ \frac{y_A+y_C}{2}\right)=(0;\ -1)$.

2) Pour écrire une équation de droite, on a vu plusieurs méthodes : on peut écrire un système de deux équations ou bien la condition de colinéarité de deux vecteurs, ou encore déterminer directement, avec des formules, la pente et l'ordonnée à l'origine. En définitive, cela revient au même.

- $1^{\text{ère}}$ méthode pour (IC) : on a l'équation $y=ax+b$ vérifiée pour deux points, cela permet de trouver a et b. Pour la droite (IC) cela donne $\frac{1}{2}=\frac{a}{2}+b$ (pour I) et $0=-a+b$ (pour C). On tire de la $2^{\text{ème}}$ équation $a=b$ et, en remplaçant dans la $1^{\text{ère}}$, $\frac{1}{2}=\frac{a}{2}+a \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{3a}{2} \Leftrightarrow 1=3a \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$ et donc $b=\frac{1}{3}$. D'où l'équation de (IC) $y=\frac{x+1}{3}$.
- $2^{\text{ème}}$ méthode pour (JA) : les coordonnées de $\overrightarrow{JA}$ sont :
$$(x_A-x_J;\ y_A-y_J)=\left(1+\frac{1}{2};\ -2-\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2};\ -\frac{7}{2}\right)$$
Le point $M(x;y)$ appartient à (JA) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{JA}$, or $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x-1;\ y+2)$ et la condition de colinéarité des deux vecteurs s'écrit $x_{\overrightarrow{AM}}\,y_{\overrightarrow{JA}}-y_{\overrightarrow{AM}}\,x_{\overrightarrow{JA}}=0$, soit $(x-1)\left(\frac{-7}{2}\right)-(y+2)\left(\frac{3}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -7x+7-3y-6=0 \Leftrightarrow -7x-3y=-1 \Leftrightarrow 7x+3y=1 \Leftrightarrow y=\frac{1-7x}{3}$.
- $3^{\text{ème}}$ méthode : la pente de (KB) n'est pas définie car $x_K=x_B$, on est dans le seul cas où l'équation réduite est $x=k$ (dans l'autre cas, celui où la pente a existe, l'équation réduite est $y=ax+b$). On a directement l'équation réduite de (KB) : $x=0$.

3 et 4) Les coordonnées de G, le point d'intersection de (IC) et (JA), sont les solutions du système formé par les équations $y=\frac{x+1}{3}$ et $y=\frac{1-7x}{3}$. Il faut donc avoir $\frac{x+1}{3}=\frac{1-7x}{3} \Leftrightarrow x+1=1-7x \Leftrightarrow 8x=0 \Leftrightarrow x=0$, ce qui montre bien que G appartient à (KB) ; l'autre coordonnée, y_G, est égale à $\frac{1-7x_G}{3}=\frac{1}{3}$. On a donc $G\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$.

Remarque : la conclusion de cet exercice (que l'intersection de (IC) et (JA) appartienne à (KB)) n'a rien d'extraordinaire. Il s'agit de la propriété connue des médianes d'un triangle d'être concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle. Ici, la preuve est analytique et circonstanciée, mais on pourrait généraliser ce raisonnement en remplaçant les coordonnées de A, B et C par des lettres.

Exercice n°52 :

L'équation cartésienne de (D_m) est $(2m-1)x+(5-m)y-7m+6=0$.

1-a) Si (D_m) passe par $A(1;\ 1)$, on a $2m-1+5-m-7m+6=0 \Leftrightarrow -6m+10=0 \Leftrightarrow m=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$.

1-b) Si (D_m) passe par $O(0;\ 0)$, on a $-7m+6=0 \Leftrightarrow m=\frac{6}{7}$.

1-c) Si (D_m) est parallèle à (Ox), la pente de la droite doit être nulle.

La pente de (D_m) est donnée par sa forme réduite quand $5-m\neq 0$:

$$(2m-1)x+(5-m)y-7m+6=0 \Leftrightarrow (5-m)y=-(2m-1)x+7m-6 \Rightarrow y=\frac{-(2m-1)x+7m-6}{5-m}=\frac{-(2m-1)}{5-m}x+\frac{7m-6}{5-m}.$$

La condition s'écrit donc $\frac{-(2m-1)}{5-m}=0$ avec $5-m\neq 0 \Leftrightarrow -(2m-1)=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Vérifions en remplaçant m par $\frac{1}{2}$: on obtient $\frac{9}{2}y+\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow 9y+5=0 \Leftrightarrow y=\frac{-5}{9}$.

1-d) Si (D_m) est parallèle à (Oy), la pente de la droite n'est pas définie, ce qui arrive pour $5-m=0 \Leftrightarrow m=5$.

Vérifions en remplaçant m par 5 : on obtient $9x-29=0 \Leftrightarrow x=\frac{29}{9}$.

2) Remarquons que s'il existe un point K sur toutes les droites (D_m), ce point doit avoir pour coordonnées $\left(x_K=\frac{29}{9};\ y_K=\frac{-5}{9}\right)$ d'après les questions c et d. Montrons que ce point appartient à la droite d'équation $(2m-1)x+(5-m)y-7m+6=0$ en remplaçant x et y par ces coordonnées :

$$(2m-1)\frac{29}{9}+(5-m)\frac{(-5)}{9}-7m+6=0 \Leftrightarrow \frac{(58+5-63)m}{9}+\frac{-29-25+54}{9}=0 \Leftrightarrow 0=0$$

Cette égalité étant toujours vraie, la valeur de m n'importe pas : la droite passe toujours par le point $K\left(\frac{29}{9};\ -\frac{5}{9}\right)$. Ce résultat a été obtenu à partir d'une remarque sur l'intersection de deux droites (D_m), et on aurait pu choisir n'importe quelles droites, par exemple celle des questions a et b.

3) Pour être parallèle à Δ, il suffit d'avoir la pente de Δ qui est égale à $\frac{-3}{2}$. Le paramètre m doit vérifier l'équation $\frac{-(2m-1)}{5-m}=\frac{-3}{2} \Leftrightarrow -2(2m-1)=-3(5-m) \Leftrightarrow -4m+2=-15+3m \Leftrightarrow -7m=-17 \Leftrightarrow m=\frac{17}{7}$.

Exercice n°55 :

L'exercice est orienté vers la méthode analytique du fait de sa position dans une feuille sur les équations de droite, mais il pourrait être abordé autrement. Choisissons le repère (G, A, F) comme repère du plan pour faciliter la résolution du problème. Dans ce repère, on a $G(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $F(0;\ 1)$ et $E(1;\ 1)$. En supposant que le carré ABCD a pour côté m<1, on obtient $B(1+m;\ 0)$, $C(1+m;\ m)$ et $D(1;\ m)$.

Pour trouver les coefficients des équations cartésiennes de droite, nous allons utiliser la méthode n°3 (formules pour la pente et pour l'ordonnée à l'origine :

- La pente de la droite (FC) est $a=\frac{y_C-y_F}{x_C-x_F}=\frac{m-1}{1+m-0}=\frac{m-1}{1+m}$, l'ordonnée à l'origine $b=y_F-a\,x_F=1-0\times a=1$, d'où ($FC$) : $y=\frac{m-1}{1+m}x+1$.
- La pente de la droite (EB) est $a=\frac{y_E-y_B}{x_E-x_B}=\frac{1-0}{1-(1+m)}=\frac{1}{-m}$, l'ordonnée à l'origine $b=y_E-a\,x_E=1-1\times\left(\frac{-1}{m}\right)=\frac{m+1}{m}$, d'où ($EB$) : $y=\frac{-1}{m}x+\frac{m+1}{m}$.

Les coordonnées de H vérifient les deux équations précédentes, d'où $\frac{-1}{m}x+\frac{m+1}{m}=\frac{m-1}{1+m}x+1$ ce qui revient à $\frac{m+1}{m}-1=\left(\frac{m-1}{1+m}+\frac{1}{m}\right)x\Leftrightarrow\frac{m+1-m}{m}=\frac{m(m-1)+1+m}{m(1+m)}x\Leftrightarrow\frac{m(1+m)}{m}=\left(m^2+1\right)x\Leftrightarrow\frac{1+m}{m^2+1}=x$ lorsque $m\neq 0$ (ce qui est réalisé si $ABCD$ est un « vrai » carré) et $m\neq -1$ (ce qui est toujours réalisé, m étant une longueur). Pour l'ordonnée, on remplace x dans une des équations : $y=\left(\frac{m-1}{1+m}\right)\left(\frac{1+m}{m^2+1}\right)+1=\frac{m-1}{m^2+1}+1=\frac{m-1+m^2+1}{m^2+1}=\frac{m(1+m)}{m^2+1}$

- La pente de la droite (GD) est $a=\frac{y_G-y_D}{x_G-x_D}=\frac{0-m}{0-1}=m$, l'ordonnée à l'origine $b=y_G-a\,x_G=0$, d'où (GD) : $y=mx$.

Montrons que $H\in(GD)$: $y=\frac{m(1+m)}{m^2+1}=m\times\frac{1+m}{m^2+1}$ et comme $x=\frac{1+m}{m^2+1}$, on constate qu'on a bien $y_H=m\,x_H$.
G, D et H sont donc bien alignés.