Exercices de révision n°1 : Généralités sur les fonctions

exercices extraits du cours de L. Lemaire

Ex 19 On donne les informations suivantes pour une fonction f définie sur l'intervalle $[-1;5]$:

$f(-1) = f(5) = 0$ $\quad f(2) = 3$ $\quad f(4) = -2$

f est croissante sur $[-1;2]$ et sur $[4;5]$

f est décroissante sur $[2;4]$

Dresser le tableau de variation de f

Ex 20 Les variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5\ ;\ 10]$ sont consignées dans le tableau suivant :

x	-5		-3		1		5		10
$f(x)$	4	↘	2	↗	7	↘	-3	↗	8

1) Construire une courbe susceptible de représenter la fonction f.
2) Quel est le minimum de la fonction f :
   a) sur $[-5\ ;\ 10]$?
   b) sur $[-5\ ;\ 1]$?
   c) sur $[-5\ ;\ -3]$?
3) Quel est le maximum de la fonction f :
   a) sur $[-5\ ;\ 10]$?
   b) sur $[-5\ ;\ 1]$?
   c) sur $[-5\ ;\ -3]$?
4) Quel est sur $[-5\ ;\ 10]$ le nombre de solutions de l'équation :
   a) $f(x) = 8$?
   b) $f(x) = 3$?
   c) $f(x) = 0$?
5) Comparer si possible les nombres suivants :
   a) $f(2)$ et $f(3)$;
   b) $f(-4)$ et $f(-3)$;
   c) $f(2)$ et $f(7)$;
   d) $f(0)$ et 0 ;
   e) $f(-2)$ et 2 ;
   f) $f(3)$ et -3 ;
   g) $f(-4)$ et $f(6)$;
   h) $f(\sqrt{2})$ et $f(3)$;
   i) $f(-2,5)$ et $f(0,5)$.

Ex 21 Pour chacune des fonctions :

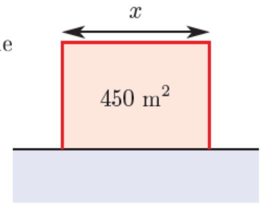
- Tracer sa représentation graphique sur l'écran de la calculatrice.
- Conjecturer l'existence d'un maximum ou d'un minimum ainsi que la valeur a pour lequel il est atteint.
- Démontrer cette conjecture en étudiant $f(x) - f(a)$

1) k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = -x^2 + 4x$
2) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8x + 3$
3) g est définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = 2 - \sqrt{x-1}$
4) h est définie sur $]3;+\infty[$ par $h(x) = x - 8 + \dfrac{4}{x-3}$

Ex 22

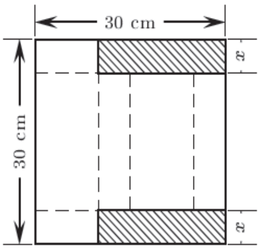
1) On considère sur $]0;+\infty[$ la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{9}{x}$
   a) Pourquoi minimiser $f(x)$ revient à minimiser $(f(x))^2$?
   b) Montrer que $\left(x + \dfrac{9}{x}\right)^2 = \left(x - \dfrac{9}{x}\right)^2 + 36$.
   c) En déduire que f est minimum quand $x = \dfrac{9}{x}$.
2) En s'inspirant de cette méthode, déterminer la valeur minimale sur $]0;+\infty[$ de
   a) $g(x) = 4x + \dfrac{100}{x}$
   b) $h(x) = x^2 + \dfrac{16}{x^2}$

Ex 23 On désire clôturer un terrain rectangulaire de 450 m², dont un côté s'appuie sur le bord d'une rivière de façon que la longueur de la clôture soit minimale.



1) Montrer que la longueur de cette clôture est $\ell(x) = x + \dfrac{900}{x}$
2) Conclure.

Ex 25 Un fabriquant envisage la production de boîtes de lait en carton obtenues en découpant deux bandes (hachurées sur le dessin) de même largeur x (en cm) dans une feuille carrée de côté 30 cm et pliant suivant les pointillés.



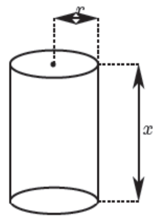
Quelles valeurs peut prendre x ?

Montrer que le volume V de la boîte (en cm³) en fonction de x est : $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

Pour quelle valeur de x le volume de la boîte est-il maximal ?

Le fabricant veut obtenir des boîtes à base carrée. Quelle valeur de x doit-il prendre ? Quel est alors le volume de la boîte ?

Ex 26



Les dimensions intérieures d'une boite de conserve cylindrique contenant 425 mL sont une hauteur $x = 8,1$ cm et un rayon $r = 4,1$ cm.

Pourquoi l'entreprise qui l'a conçue a-t-elle choisi ces dimensions ?

1) a) Exprimer le volume V du cylindre en fonction de r et x.
   b) La surface du cylindre est composée de trois parties. Lesquelles ? Exprimer la surface totale S du cylindre en fonction de r et x.
   c) Calculer, à 10^{-2} près, le volume V en mL et la surface S en cm^2 du cylindre présenté dans l'énoncé.
2) Dans la suite, on considère que la hauteur x est un nombre variable.
   a) Démontrer que pour $x > 0$, $r = \sqrt{\dfrac{425}{\pi x}}$.
   b) En déduire que pour $x > 0$, la surface est donnée par $S(x) = \dfrac{850}{x} + 2\pi x\sqrt{\dfrac{425}{\pi x}}$
   c) À l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de variations de $S(x)$ en fonction de x.
   d) Expliquer le choix des dimensions de la boîte de conserve.
3) Quelle volume offre le meilleur rapport de volume et de surface ? Pourquoi ce volume n'est-il pas choisi comme contenant ?

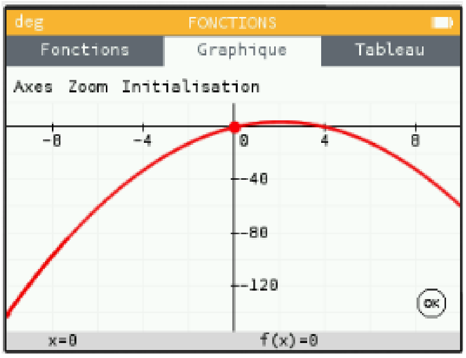
Ces notions sont transversales et correspondent globalement au chapitre 1 de notre cours.

Exercice n°21 :

1) k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=-x^2+4x$.

Le graphique est donné par la calculatrice.

D'après ce graphique, la fonction k étant croissante puis décroissante, elle passe par un maximum, atteint visiblement pour x=2.



- La *forme canonique* de $k(x)$, un polynôme du second degré :

$k(x)=-x^2+4x=-(x^2-4x)=-((x-2)^2-2^2)=-(x-2)^2+4$.

De là, on montre que, comme $\forall x\in\mathbb{R}\,(x-2)^2\geq 0$ avec égalité pour $x-2=0\Leftrightarrow x=2$, on a $-(x-2)^2\leq 0$ et donc :

$-(x-2)^2+4\leq 4\Leftrightarrow k(x)\leq 4$ avec égalité pour x=2.

C'est ce qu'il fallait prouver : le maximum est 4, atteint pour x=2.

On remarque que k(2)= $-2^2+4\times 2=-4+8=4$.

- La méthode préconisée (en cours) revient à utiliser le taux de variation de k entre x_1 et x_2 :

$\tau=\frac{k(x_1)-k(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-x_1^2+4x_1-(-x_2^2+4x_2)}{x_1-x_2}$, cela se simplifie grandement avec la forme canonique

$\tau=\frac{-(x_1-2)^2+4-(-(x_2-2)^2+4)}{x_1-x_2}=\frac{-(x_1-2)^2+(x_2-2)^2}{x_1-x_2}=\frac{(x_2-2-(x_1-2))(x_2-2+(x_1-2))}{x_1-x_2}=\frac{(x_2-x_1)(x_2-2+(x_1-2))}{x_1-x_2}=-(x_2-2+x_1-2)$. Ouf !

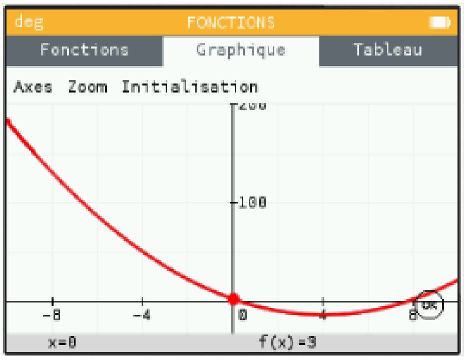
Il ne reste plus qu'à remarquer que si $x_1\leq 2$ et $x_2\leq 2$ avec $x_1<x_2$ alors $x_1-2\leq 0$ et $x_2-2<0$ et donc $x_1-2+x_2-2<0$, soit $-(x_1-2+x_2-2)<0\Leftrightarrow\tau<0$. Cela montre que k est croissante sur] $-\infty$;2].

De même on montre que k est décroissante sur [2 ;] $+\infty$ [et, finalement, cela implique la présence d'un maximum pour x=2.

- La méthode préconisée dans l'énoncé est d'étudier $k(x)-k(2)$, soit $k(x)-4$.

$k(x)-4=-x^2+4x-4=-(x^2-4x+4)=-(x-2)^2$.

Comme on l'a remarqué plus haut $\forall x\in\mathbb{R}-(x-2)^2\leq 0$ avec égalité pour x=2, on a donc $\forall x\in\mathbb{R}, k(x)-4\leq 0\Leftrightarrow k(x)\leq 4$, ce qui prouve que 4 est le maximum, et ce maximum est atteint pour x=2 (lorsqu'il y a égalité).



2) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-8x+3$.

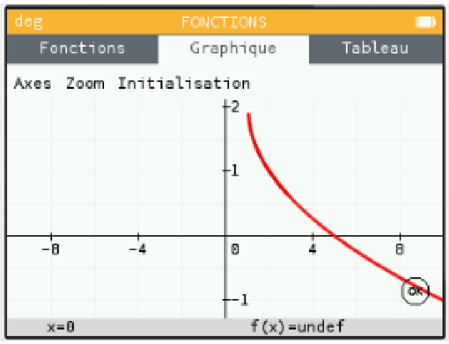
La méthode est la même (f est une fonction du second degré) :

le minimum est atteint pour x = 4 et vaut f(4) = 16−32+3 = −13.

La forme canonique est $f(x)=(x-4)^2-4^2+3=(x-4)^2-13$.

On arrive au même résultat en écrivant que $f(x)-f(4)=(x-4)^2\geq 0$, et comme $f(4)=-13$, on a $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq -13$.

3) g est la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $g(x)=2-\sqrt{x-1}$.



La courbe montre une fonction décroissante.

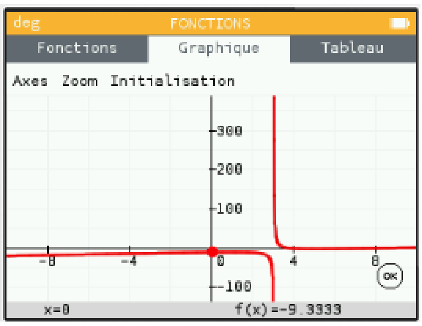
Pour x=1, la fonction g est définie : $g(1)=2-\sqrt{0}=2$.

Par contre, pour x<2 il n'y a pas d'image réelle, la racine carrée d'un nombre négatif n'étant pas définie dans $\mathbb{R}$.

Le maximum est donc 2 et il est atteint pour x = 1.

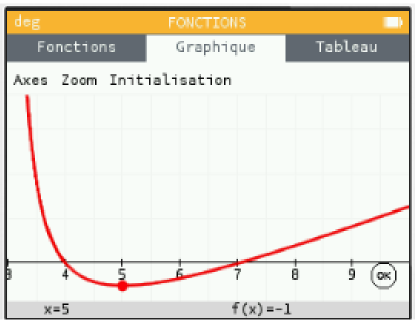
$g(x)-g(1)=2-\sqrt{x-1}-2=-\sqrt{x-1}$.

$\forall x>1, \sqrt{x-1}\geq 0\Leftrightarrow -\sqrt{x-1}\leq 0\Leftrightarrow g(x)-g(1)\leq 0\Leftrightarrow g(x)\leq g(1)$.



4) h est la fonction définie sur $]3;+\infty[$ par $h(x)=x-8+\frac{4}{x-3}$.

Sur l'intervalle considéré, la courbe de gauche montre que la fonction h est décroissante, mais sans changer les bornes de la fenêtre d'affichage, il est difficile de distinguer l'allure véritable de la courbe. À droite, j'ai pris x et y



entre 0 et 10, puis j'ai déplacé le point rouge pour trouver le minimum : c'est -1 et il est atteint pour $x = 5$. Montrons cela :

$$h(x)-h(5)=x-8+\frac{4}{x-3}-(5-8+\frac{4}{5-3})=x-8+\frac{4}{x-3}+1=x-7+\frac{4}{x-3}=\frac{(x-7)(x-3)+4}{x-3}=\frac{x^2-10x+25}{x-3}=\frac{(x-5)^2}{x-3}$$

Le numérateur est positif et le dénominateur aussi lorsque $x>3$, d'où $h(x)-h(5)\geq 0 \Leftrightarrow h(x)\geq h(5)$.

Exercice n°22 :

1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x)=x+\frac{9}{x}$.

a) Minimiser f pour $x > 0$ revient à déterminer s'il existe k tel que $\forall x>0, x+\frac{9}{x}\geq k \Leftrightarrow \frac{x^2+9}{x}\geq k$.

On sait déjà que $k=0$ convient car, quand $x>0$, on a $f(x)=\frac{x^2+9}{x}>0$ (quotient de deux nombres positifs).

Le problème est de trouver une valeur de $k>0$ qui est atteinte par la fonction f.

Comme la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, prendre le carré d'une inégalité sur $\mathbb{R}^{+*}$ respecte le sens de l'inégalité. On en déduit que $f(x)\geq k>0 \Rightarrow (f(x))^2\geq k^2>0$.

b) $(f(x))^2=(x+\frac{9}{x})^2=x^2+\frac{2\times x\times 9}{x}+(\frac{9}{x})^2=x^2+18+(\frac{9}{x})^2$

$(x-\frac{9}{x})^2+36=x^2-\frac{2\times x\times 9}{x}+(\frac{9}{x})^2+36=x^2-18+(\frac{9}{x})^2+36=x^2+18+(\frac{9}{x})^2$

On a donc bien $(f(x))^2=(x-\frac{9}{x})^2+36$.

c) Trouver le minimum de $(x-\frac{9}{x})^2+36$ est évident puisque $\forall x\in\mathbb{R}, (x-\frac{9}{x})^2\geq 0$ avec égalité lorsque $x-\frac{9}{x}=0 \Leftrightarrow x=\frac{9}{x}$, et donc $(x-\frac{9}{x})^2+36\geq 36 \Leftrightarrow (f(x))^2\geq 36$. Le minimum de $(f(x))^2$ étant 36, on en déduit que le minimum de $f(x)$ est 6, et que ce minimum est atteint lorsque $x=\frac{9}{x}$, soit lorsque $x^2=9$. La solution positive de cette équation est $x=3$. Le minimum est donc atteint pour $x=3$.

2-a) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x)=4x+\frac{100}{x}$.

$(g(x))^2=(4x+\frac{100}{x})^2=16x^2+800+(\frac{100}{x})^2=(4x-\frac{100}{x})^2+1600$ et donc $(g(x))^2\geq 1600$ avec égalité pour $4x=\frac{100}{x}$, donc pour la solution positive de $4x^2=100 \Leftrightarrow x^2=25$, soit pour $x=5$. Le minimum est la racine carrée de 1600, soit 40 (on peut le retrouver en calculant $g(4)=4\times 5+\frac{100}{5}=20+20=40$).

2-b) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $h(x)=x^2+\frac{16}{x^2}$.

$(h(x))^2=(x^2+\frac{16}{x^2})^2=x^4+32+(\frac{16}{x^2})^2=(x^2-\frac{16}{x^2})^2+64$ et donc $(h(x))^2\geq 64$ avec égalité pour $x^2=\frac{16}{x^2}$, donc pour la solution positive de $x^4=16$, soit pour $x = 2$. Le minimum est la racine carrée de 64, soit 8 (on peut le retrouver en calculant $h(2)=2^2+\frac{16}{2^2}=4+4=8$).

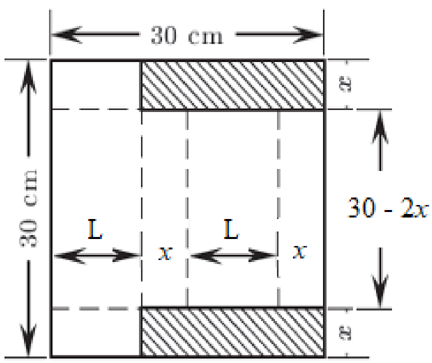
Exercice n°23 :

1) La longueur de la clôture est $x+2L$, où L est la largeur du champ. Comme l'aire de ce champ est 450 m², on a $L\times x=450$ d'où $L=\frac{450}{x}$ et donc la longueur de la clôture est $x+\frac{2\times 450}{x}=x+\frac{900}{x}$.

En notant l la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $l(x)=x+\frac{900}{x}$, on peut appliquer la méthode précédente pour minimiser l.

2) $(l(x))^2=(x+\frac{900}{x})^2=x^2+1800+(\frac{900}{x})^2=(x-\frac{900}{x})^2+3600$ et donc $(l(x))^2\geq 3600$ avec égalité pour $x=\frac{900}{x}$ donc pour la solution positive de $x^2=900$, soit pour $x = 30$. Le minimum est la racine carrée de 3600, soit 60 (on peut le retrouver en calculant $l(30)=30+\frac{900}{30}=30+30=60$). La clôture minimum mesure 60 m de long qui se répartissent entre les 30 m de long et les deux largeurs de 15 m, ce qui fait bien $30\times 15=450$ m^2.

Exercice n°25 :



Les bandes ne peuvent dépasser la moitié de la hauteur de la feuille (30 cm), donc $0\leq x\leq 15$.

Si on note h la hauteur de la brique de lait, on a $h=30-2x$.

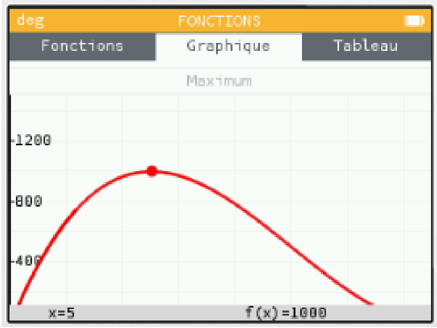
De même, la largeur de la brique étant noté L, l'autre longueur est x, d'où $L=(30-2x)\div 2$. On en déduit le volume V de la brique :

$V(x)=\frac{x\times(30-2x)}{2}\times(30-2x)=2x(15-x)^2$, d'où, en développant

$V(x)=2x(225+x^2-30x)=2x^3-60x^2+450x$.

Pour connaître le sens de variation et le maximum de cette fonction, appliquons la méthode de l'exercice 21 : estimation de la valeur de a pour laquelle le maximum semble atteint et vérification que $V(x)-V(a)$ est négatif pour toutes les valeurs de [0;15].

La courbe donnée par la calculatrice est tracée ci-contre.
La calculatrice donne également le maximum : 1000, atteint pour x=5.
C'est trop facile ! Montrons que cette valeur convient bien.
$V(x)-V(5)= V(x)=2x^3-60x^2+450x-1000=2(x^3-30x^2+225x-500)$
Pour étudier le signe de cette expression, ce n'est pas si facile.
On peut vérifier qu'elle est égale à $2(x-20)(x-5)^2$ et cela devient plus aisé car le seul facteur qui peut changer de signe est $x-20$ qui est négatif sur [0;15].
$V(x)-V(5)\leq 0$ avec égalité pour x=5 (et x=20 mais cette valeur est en dehors du domaine), donc $V(x)\leq 1000$ pour $0\leq x\leq 15$.



Si la base est un carré, on veut avoir $x=(30-2x)\div 2$ soit $4x=30$, il faut prendre x=7,5 *cm*. Dans ce cas, le volume devient $V(7{,}5)=2\times 7{,}5(15-7{,}5)^2=2\times 7{,}5^3=843{,}75$ cm^3, ce qui est assez loin du maximum mais sans doute plus pratique à ranger.

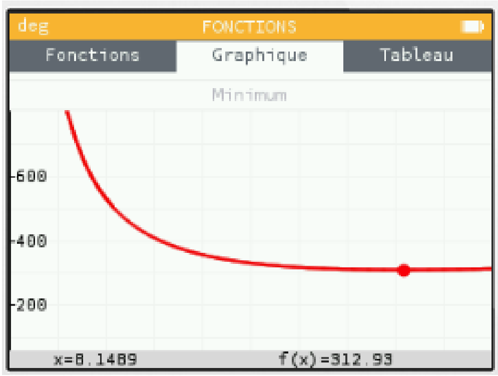
<u>Exercice n°26</u> :
La question posée attendra sa réponse, l'objet de l'exercice étant d'en apporter une.

1-a) Le volume d'un cylindre de hauteur x et de rayon r est $V(x,r)=x\times(\pi r^2)=\pi x r^2$.
1-b) La surface d'un cylindre est composée de deux bases circulaires (deux disques de rayon r) et d'un rectangle enroulé de longueur x et de largeur $2\pi r$ (le périmètre des bases). L'aire d'un disque de rayon r étant πr^2, on obtient l'aire totale des parois de la boîte avec $S(x,r)=2\times(\pi r^2)+x\times(2\pi r)=2\pi r(x+r)$.
1-c) Avec x=8,1 *cm* et r=4,1 *cm*, le volume de la boîte est $V=\pi\times 8{,}1\times 4{,}1^2\approx 427{,}7624\,cm^3$, soit environ 427,76 *mL*. La surface des parois a une aire $S=2\pi 4{,}1(8{,}1+4{,}1)\approx 314{,}28\,cm^2$.

2-a) Si x est variable, r étant fixé de manière à ce que V=425 *mL*, c'est-à-dire de manière à avoir $425=\pi x r^2$, cela implique que $r^2=\frac{425}{\pi x}$ et donc, comme r>0 et x>0 (ce sont des longueurs), que $r=\sqrt{\frac{425}{\pi x}}$.
2-b) La valeur de r en fonction de x peut alors être reportée dans la formule donnant l'aire, et on obtient

$$S(x,r)=2\pi\sqrt{\frac{425}{\pi x}}\left(x+\sqrt{\frac{425}{\pi x}}\right)=2\pi x\sqrt{\frac{425}{\pi x}}+2\pi\left(\frac{425}{\pi x}\right)=2\pi x\sqrt{\frac{425}{\pi x}}+\frac{850}{x}$$

2-c) La courbe de cette fonction est donnée par la calculatrice.
La calculatrice Numworks donne aussi le minimum quand on lui demande (après affichage, taper OK puis choisir calculer et puis minimum). On constate alors que le minimum de S(x) est obtenu pour x=8,1489 cm approximativement, ce minimum étant égal environ à 312,93 *mL*.
2-c) Le choix du fabriquant a donc été un choix économique : pour minimiser la surface de la boîte, donc son coût de fabrication (prix en partie proportionnel au poids donc à la surface), il a choisi la valeur de x donnant l'aire minimum.



3) Le rapport volume/surface est donné par $V/S=\frac{V(x,r)}{S(x,r)}=\frac{\pi x r^2}{2\pi r(x+r)}=\frac{xr}{2(x+r)}=\frac{1}{2\frac{x+r}{xr}}=\frac{1}{2(\frac{1}{r}+\frac{1}{x})}$.

La question porte sur le volume V qui maximise ce rapport V/S, *l*'industriel cherchant, en effet, à avoir le plus grand volume (plus de quantité) pour une surface minimale (moins chère).

Comme $V/S=\frac{1}{2(\frac{1}{r}+\frac{1}{x})}$, pour que ce rapport soit maximum, il faut que le dénominateur soit minimum. On cherche donc le minimum de $\frac{1}{r}+\frac{1}{x}$. Mais les deux quantités n'atteignent pas de minimum sur leur ensemble de définition : $\frac{1}{r}$ s'approche de 0 quand r s'approche de l'infini, de même pour $\frac{1}{x}$. Il suffit de faire tendre x et r vers l'infini pour que le rapport V/S soit maximisé... Ce n'est pas très pratique. Le choix retenu fixe le volume et une des dimensions (pour des raisons pratiques) et minimise le coût de fabrication en choisissant l'autre dimension comme on l'a vu question 2.