2^{de}	DS n°8 : Probabilités	15 Mai 2018	*Barème prévisionnel : 2-3-3-4-4-4*

Bon courage ! Optimisez le temps : essayez de répondre à toutes les questions sans s'obstiner sur aucune. Quand vous passez, laissez un peu de place pour y revenir ultérieurement...

I] Course autour du monde

Douze motos solaires sont au départ du Prix de la Terre, fameuse et non fumeuse course autour du monde. Quelle chance a t-on de trouver au hasard le tiercé gagnant (les trois motos de tête, dans le bon ordre) ?

II] Jeu de cartes

On dispose d'un jeu de 52 cartes (13 cartes dans 4 couleurs) dans lequel on puise au hasard 5 cartes.
a) Combien y a t-il de mains différentes de 5 cartes ?
b) Quelle est la probabilité de l'événement A l'événement « on obtient les 4 as » ?

III] Jeu florentin

Galilée et son ami Cosme jouent à lancer une pièce : Galilée lance deux fois la pièce et Cosme la lance trois fois. Ils comptabilisent leurs « pile ».

- Si Galilée en obtient plus que Cosme, Cosme donne 10 *écus* à Galilée ;
- Si Galilée en obtient autant que Cosme, Cosme donne 1 *écu* à Galilée ;
- Si Galilée en obtient moins que Cosme, Galilée donne 5 *écus* à Cosme.

Le jeu est-il à l'avantage de Galilée ou de Cosme ?
(Justifier avec un arbre de probabilité où chaque branche est associée au gain algébrique de Cosme)

IV] Restaurant

Un certain nombre N de personnes sont dans un restaurant et commandent un menu avec entrée, plat et dessert. On a le choix entre 4 entrées, 3 plats et 2 desserts. Les choix étant aléatoires et indépendants, on s'interroge sur la probabilité p_N de l'événement E : « au moins deux commandes sont identiques » :
a) Combien de menus différents peut-il y avoir ? Notons C ce nombre.
b) Déterminer la probabilité p_N lorsque $N=C+1$.
c) Déterminer une formule donnant la probabilité p_N pour $N\leq C$
(*on peut commencer par déterminer la probabilité de F : « toutes les commandes sont différentes »*)
d) Dresser un tableau donnant la probabilité p_N pour $N>1$, jusqu'à la $1^{ère}$ valeur N_0 telle que $p_N > 0{,}5$.

V] La cloche de l'abbé

L'abbé Barnabé a mis au point ce petit rituel matinal : il tire deux dés (faces numérotées de 1 à 6) en rejouant s'il obtient un double six (il n'aime pas le double six car cela lui fait penser à la Bête...), puis s'intéresse à la réalisation de l'événement E : « obtenir une somme égale à 2 ou 5 » (ses nombres préférés). Si E est réalisé, il sonne la lourde cloche à l'aurore, sinon c'est un moine de l'abbaye qui la sonne à sa place.
a) Quelle est la probabilité de E ?
b) Quelle est la probabilité que, pendant une semaine entière, il sonne la cloche au moins une fois ?
c) Quelle est la probabilité que, pendant une semaine entière, il sonne la cloche plus d'une fois ?

bonus1 (1,5pt)

Comme il se fait vieux, l'abbé voudrait, en tirant les deux dés à sa façon (en retirant lorsqu'une certaine combinaison se produit), obtenir un événement E' qui se réalise seulement une fois sur huit. Pouvez-vous l'aider ?

VI] L'urne de Pólya

On considère une urne contenant au départ a boules blanches et b boules rouges. On tire une boule de l'urne et on la remet avec une autre boule de la même couleur ; on a donc maintenant $a+b+1$ boules. On recommence un certain nombre de fois l'opération qui consiste à tirer une boule de l'urne et à la remettre avec une autre boule de la même couleur. On cherche à déterminer l'évolution de la proportion de boules blanches dans l'urne. On note $B(n)$ le nombre de boules blanches dans l'urne au bout de n tirages.
a) Écrire un algorithme ou un programme qui simule M fois cette expérience aléatoire avec N tirages, A boules blanches et B boules rouges. Cet algorithme affiche la valeur de $B(N)$ pour chaque expérience.
b) Programmer ce programme sur la calculatrice et l'exécuter avec $N=100$, $M=10$, $A=2$ et $B=2$.
Noter les résultats et commenter : les résultats vous semblent-ils converger vers une valeur particulière ?

bonus2 (1,5pt tant que bonus1+bonus2 $\leq 1{,}5$)

Le jeu de Jeanne consiste à jeter des dés autant de fois que nécessaire pour obtenir N fois la face 6, de la façon suivante : au départ on jette N dés, on reprend ceux qui n'ont pas fait 6 et on les rejette, et ainsi de suite jusqu'à obtenir les N faces 6. On note K la variable donnant le nombre de jets nécessaire pour obtenir les N faces 6. Écrire un algorithme ou un programme qui simule ce jeu et affiche K. Donner quelques résultats d'exécution pour $N=5$.